Tạp chí Cơ học T. X, 1988, số 2 (trang 25 – 32)

ỔN ĐỊNH CỦA VỎ TRỤ TRỰC HƯỚNG ĐÀN NHỚT VÀ ĐÀN HỒI

TÔ VĂN TẤN

Trong kỹ thuật hiện đại người ta đã sử dụng nhiều đến các kết cấu từ vật liệu trực hướng đàn nhớt chẳng hạn các vỏ từ chất dẻo thủy tinh hoặc từ chất dẻo có đặt cốt. Sự ổn định của các kết cấu đó cũng đã được nghiên cứu dưới dạng này hay dạng khác.

Trong bài báo này sử dụng phương pháp phân tách các điểm phân nhánh giả của quá trình biến dạng và xây dựng các tương tự đàn hồi để giải bài toán ổn định của vỏ trụ trực – hướng đàn nhớt chịu nén dọc, đồng thời cũng đã đưa ra tiêu chuẩn ổn định mới cho lớp bài toán này.

§1. ỔN ĐỊNH CỦA VỎ TRỤ TRỰC HƯỚNG ĐÀN HỒI

Giả sử cho trước ngoại lực tác dụng và đã biết hệ các chuyển vị, biến dạng và ứng suất trong vỏ. Gọi trạng thái đang xét này là trạng thái cơ bản. Ký hiệu u_i^0, e_{ij}^0, σ_{ij}^0, là hệ các chuyển vị, biến dạng, ứng suất của trạng thái này.

Để nghiên cứu sự ổn định của trạng thái cân bằng cơ bản giả thiết rằng ngoài trạng thái cân bằng cơ bản còn tồn tại trạng thái khác rất gần với nó, được xác định bởi

$$u_i = u_i^0 + \Delta u_i, \quad e_{ij} = e_{ij}^0 + \Delta e_{ij}, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \Delta \sigma_{ij}$$

Các đại lượng Δu_i, Δe_{ij}, $\Delta \sigma_{ij}$, biểu thị sự chênh lệch của chuyển vị, biến dạng ứng suất khi chuyển từ trạng thái cơ bản sang trạng thái lân cận và được gọi là các kích động nếu các đại lượng này đủ nhỏ.

Quy luật đàn hồi của vật liệu trực hướng trong trường hợp trạng thái ứng suất phẳng viết cho các kích động là:

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{11} &= b_{11}\Delta e_{11} + b_{12}\Delta e_{22}, \\ \Delta\sigma_{22} &= b_{21}\Delta e_{11} + b_{22}\Delta e_{22}, \\ \Delta\sigma_{12} &= 2b\Delta e_{12}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

Còn quy luật đàn nhớt có dạng:

$$\Delta\sigma_{11}(t) = b_{11}\Delta e_{11}(t) - b_{11}\int_0^t R_{11}(t-\tau)\Delta e_{11}(\tau)d\tau +$$

$$+ b_{12}\Delta e_{22}(t) - b_{12}\int_0^t R_{12}(t-\tau)\Delta e_{22}(\tau)d\tau,$$

$$\Delta\sigma_{22}(t) = b_{21}\Delta e_{11}(t) - b_{21}\int_0^t R_{21}(t-\tau)\Delta e_{11}(\tau)d\tau +$$

$$+ b_{22}\Delta e_{22}(t) - b_{22}\int_0^t (t-\tau)\Delta e_{22}(\tau)d\tau,$$

$$\Delta\sigma_{12}(t) = 2b\Delta e_{12}(t) - 2b\int_0^t R_{12}(t-\tau)\Delta e_{12}(\tau)d\tau. \quad (1.2)$$

Trong đó :

$$b_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2},\ b_{12} = b_{21} = \frac{\nu_1 E_2}{1-\nu_1\nu_2} = \frac{\nu_2 E_1}{1-\nu_1\nu_2},$$

$$b_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2},\quad 2b = G = \frac{E_{45^\circ}}{2(1+\nu_{45^\circ})} \quad (1.3)$$

R_{ij} — các nhân chừng

Các liên hệ hình học của vỏ trụ viết cho các kích động :

Các liên hệ biến dạng — chuyển vị có dạng

$$\Delta e_{11} = \frac{\partial\Delta u}{\partial x_1} - z\frac{\partial^2\Delta W}{\partial x_1^2},$$

$$\Delta e_{22} = \frac{\partial\Delta v}{\partial x_2} + \frac{\Delta W}{R} - z\frac{\partial^2\Delta W}{\partial x_2^2},$$

$$\Delta e_{12} = \frac{\partial\Delta u}{\partial x_2} + \frac{\partial\Delta v}{\partial x_1} - z\frac{\partial^2\Delta W}{\partial x_1\partial x_2}. \quad (1.4)$$

phương trình liên tục của các biến dạng sẽ là

$$\frac{\partial^2\Delta e_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\Delta e_{22}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2\Delta e_{12}}{\partial x_1\partial x_2} = -\frac{1}{R}\frac{\partial^2\Delta W}{\partial x_1^2} \quad (1.5)$$

Các liên hệ ứng lực — ứng suất :

$$\Delta T_1 = \int_{-h/2}^{h/2}\Delta\sigma_{11}dz,\ \Delta T_2 = \int_{-h/2}^{h/2}\Delta\sigma_{22}dz,\ \Delta S = \int_{-h/2}^{h/2}\Delta\sigma_{12}dz,$$

$$\Delta M_1 = \int_{-h/2}^{h/2} z\Delta\sigma_{11}dz,\ \Delta M_2 = \int_{-h/2}^{h/2} z\Delta\sigma_{22}dz,\ \Delta H = \int_{-h/2}^{h/2} z\Delta\sigma_{12}dz. \quad (1.6)$$

Các phương trình cân bằng cho vỏ trụ có dạng:

$$\frac{\partial\Delta T_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\Delta S}{\partial x_2} = 0,\quad \frac{\partial\Delta T_2}{\partial x_2} + \frac{\partial\Delta S}{\partial x_1} = 0, \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial^2 \Delta M_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Delta M_2}{\partial x_2^2} + 2\frac{\partial^2 \Delta H}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\Delta T_2}{R} + T_1^{\circ}\frac{\partial^2 \Delta W}{\partial x_1^2} + T_2^{\circ}\frac{\partial^2 \Delta W}{\partial x_2^2} + 2S^{\circ}\frac{\partial^2 \Delta W}{\partial x_1 \partial x_2} = 0.$$

Từ (1.1) rút ra các biến dạng và đặt vào (1.5) ta thu được:

$$b_{11}\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^4} + \frac{1}{2b}(b_{11}b_{22} - b_{12}^2 - 4b\,b_{12})\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + b_{22}\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_2^4} =$$

$$= (b_{11}b_{22} - b_{12}^2)\left(-\frac{1}{R}\frac{\partial^2 \Delta W}{\partial x_1^2}\right) \qquad (1.8)$$

Trong đó Φ — là hàm ứng suất.

Đặt (1.4) vào (1.1) rồi đặt kết quả vào (1.6) và kết quả thu được đặt vào (1.7) sau khi biến đổi ta có:

$$b_{11}\frac{\partial^4 \Delta W}{\partial x_1^4} + 2(b_{12} + 4b)\frac{\partial^4 \Delta W}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + b_{22}\frac{\partial^4 \Delta W}{\partial x_2^4} = \frac{12}{h^3}\frac{\partial^2 \Phi}{R\,\partial x_1^2} +$$

$$+ \frac{12}{h^3}\left[\frac{\partial^2 \Phi^{\circ}}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 \Delta W}{\partial x_1^2} - 2\frac{\partial^2 \Phi^{\circ}}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 \Delta W}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \Phi^{\circ}}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 \Delta W}{\partial x_2^2}\right]. \qquad (1.9)$$

Trong đó trạng thái phimômen trước tới hạn, khi chỉ chịu lực nén dọc là:

$$\frac{\partial^2 \Phi^{\circ}}{\partial x_2^2} = T_1^{\circ} = \sigma h, \quad \frac{\partial^2 \Phi^{\circ}}{\partial x_1^2} = T_2^{\circ} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi^{\circ}}{\partial x_1 \partial x_2} = S^{\circ} = 0 \qquad (1.10)$$

Như vậy các phương trình ổn định của vỏ trụ trực hướng trong phạm vi bé là các phương trình (1.8) và (1.9). Từ (1.8), (1.9) loại hàm Φ ta thu được một phương trình chứa ΔW, còn hàm Φ° đã biết từ (1.10) sẽ được biểu diễn qua σh.

Để giải phương trình này ta chọn hàm ΔW dưới dạng:

$$\Delta W = f\sin\alpha x_1 \sin\beta x_2, \quad \alpha = \frac{m\pi}{l}, \quad \beta = \frac{n}{R}. \qquad (1.11)$$

Thỏa mãn điều kiện biên là:

$$\Delta W = \frac{\partial^2 \Delta W}{\partial x_1^2} = 0 \quad \text{khi } x = 0, l$$

Thay (1.11) vào phương trình chỉ chứa ΔW vừa thu được, ta có:

$$\sigma h = \frac{h^3}{12}\left(\frac{\pi}{lx_1}\right)^2[b_{11}\lambda^4 + 2(b_{12} + 4b)\lambda^2 + b_{22}] +$$

$$+ \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{R^2}\left(\frac{lx_1}{\pi}\right)^2 \frac{\lambda^4}{b_{11}\lambda^4 + \dfrac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2 - 4bb_{12}}{2b}\lambda^2 + b_{22}} \qquad (1.12)$$

Trong đó:

$$lx_1 = l/m, \quad \lambda = \alpha/\beta.$$

Bây giờ cho $d\sigma/d\left[\left(\frac{\pi}{lx_1}\right)^2\right] = 0$, ta sẽ thu được:

$$\frac{h^2}{12}\frac{A}{\lambda^4} - \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{R^2\left(\dfrac{\pi}{lx_1}\right)^4} \cdot \frac{\lambda^4}{B} = 0 \qquad (1.13)$$

Trong đó :

$$A = b_{11}\lambda^4 + 2(b_{12} + 4b)\lambda^2 + b_{22},$$

$$B = b_{11}\lambda^4 + \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2 - 4bb_{12}}{2b}\lambda^2 + b_{22}.$$

Từ (1.13) ta có :

$$\left(\frac{\pi}{l\kappa_1}\right)^2 = \frac{\sqrt{12}\,\lambda^4}{\sqrt{AB}} \cdot \frac{\sqrt{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}}{Rh} \tag{1.14}$$

Thay (1.14) vào (1.12) ta thu được :

$$\sigma_{th} = \frac{h}{\sqrt{3}\,R}\sqrt{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}\;\sqrt{A/B} \tag{1.15}$$

io $\lambda \to \infty$ thì $A/B \to 1$ ta tìm được ứng suất tới hạn khi vòng đối xứng trục là

$$\sigma_{th}^{*} = \frac{h}{\sqrt{3}\,R}\sqrt{b_{11}b_{22} - b_{12}^2} \tag{1.16}$$

Để tìm ứng suất tới hạn σ_{th}^{**} khi vòng không đối xứng trục ta tìm cực tiểu của theo λ.

Từ điều kiện $\frac{\partial\sigma_{th}}{\partial\lambda} = 0$ ta thu được $\lambda = \sqrt{b_{11}/b_{22}}$. (1.17)

Thay (1.17) vào (1.15) ta có :

$$\sigma_{th}^{**} = \frac{h}{\sqrt{3}\,R}\sqrt{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}\cdot C$$

Trong đó :

$$C = \sqrt{\frac{b_{11}^2 + 2(b_{12} + 4b)\sqrt{b_{11}b_{22}} + b_{22}^2}{b_{11}^2 + \frac{(b_{11}b_{22} - b_{12}^2 - 4bb_{12})\sqrt{b_{11}b_{22}} + b_{22}^2}{2b}}}$$

Từ các số liệu thường gặp của các vỏ từ chất dẻo thủy tinh ta nhận thấy $C \approx 1$ vậy :

$$\sigma_{th}^{**} = \frac{h}{\sqrt{3}\,R}\sqrt{b_{11}b_{22} - b_{12}^2} \tag{1.18}$$

trùng với (1.16).

§2. ỔN ĐỊNH CỦA VỎ TRỤ TRỰC HƯỚNG ĐÀN NHỚT

Từ các phương trình (1.2) ta đi lập các tương tự đàn hồi cho trường hợp phân ih giả bậc N (PGN : $\overset{(N)}{\Delta}\sigma_{ij} \neq 0$, $\overset{(N)}{\Delta}e_{ij} \neq 0$, $\Delta\sigma_{ij} = \Delta e_{ij} = \dot{\Delta}\sigma_{ij} = \dot{\Delta}e_{ij} = \dots = 0$).

Để làm việc đó ta sẽ sử dụng (1.2) và để thuận tiện ta ký hiệu : $b_{ij} \equiv b_{ijmn}$, $R_{ij} = R_{ijmn}$, rồi viết (1.2) thành dạng :

$$\Delta\sigma_{ij}(t) = b_{ijmn}\Delta e_{mn}(t) - b_{ijmn}\int_0^t R_{ijmn}(t, \tau)\Delta e_{mn}(\tau)d\tau. \quad (2.1)$$

phân tích $\Delta e_{mn}(\tau)$ thành chuỗi tại lân cận điểm $\tau = t$ và sử dụng định nghĩa PGO ($\Delta\sigma_{ij} \neq 0$, $\Delta e_{ij} \neq 0$, $\Delta\dot{\sigma}_{ij} = \Delta\dot{e}_{ij} = \dots = 0$) ta sẽ thu được tương tự đàn hồi trong trường hợp PGO. Đạo hàm (2.1) một lần theo t rồi phân tích $\Delta e_{mn}(\tau)$ thành chuỗi và sử dụng định nghĩa PG1 ta thu được tương tự đàn hồi trong trường hợp PG1. Tương tự như vậy đạo hàm (2.1) N lần theo t, thực hiện phân tích thành chuỗi và sử dụng định nghĩa PGN ta sẽ thu được các tương tự đàn hồi :

$$\Delta\overset{(N)}{\sigma}_{ij} = \tilde{b}_{ijmn}\Delta\overset{(N)}{e}_{mn}$$

Trong đó :

$$\tilde{b}_{ijmn} = b_{ijmn}\left[1 - \frac{1}{N!}\int_0^t \overset{N}{R}_{ijmn}(t-\tau)(\tau - t)^N d\tau\right]$$

hay :

$$\tilde{b}_{ij} = b_{ij}\left[1 - \frac{1}{N!}\int_0^t (\tau - t)^N \overset{(N)}{R}_{ij}(t-\tau)d\tau\right] \quad (2.2)$$

Như vậy việc giải bài toán ổn định của vỏ từ vật liệu đàn nhớt trực hướng được thay bằng giải bài toán vỏ đàn hồi trực hướng với môđun đàn hồi giả tạo (2.2). Nói cách khác, việc giải bài toán về phân nhánh giả các bậc khác nhau được đưa về giải bài toán phân nhánh trạng thái (phân nhánh bậc không).

Trên cơ sở [1] ta giả thiết rằng trong quá trình biến dạng tính trực hướng chỉ thể hiện qua các hệ số b_{ij} còn xem các nhân R_{ij} là đẳng hướng. Như vậy từ (2.2) ta có:

$$\tilde{b}_{ij} = b_{ij}\left[1 - \frac{1}{N!}\int_0^t (\tau - t)^N \overset{(N)}{R}(t-\tau)d\tau\right] \quad (2.3)$$

Thay b_{ij} từ (2.3) vào (1.16) ta có :

$$\sigma = \frac{h}{\sqrt{3}R}\sqrt{\tilde{b}_{11}\tilde{b}_{22} - \tilde{b}_{12}^2} = \frac{1}{\sqrt{3}R}\times$$

$$\times\sqrt{b_{11}b_{22}\left[1 - \frac{1}{N!}\int_0^t(\tau - t)^N \overset{(N)}{R}d\tau\right]^2 - b_{12}^2\left[1 - \frac{1}{N!}\int_0^t (\tau - t)^N \overset{(N)}{R}d\tau\right]^2}$$

hay

$$\sigma = \frac{h}{\sqrt{3}R}\sqrt{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}\left[1 - \frac{1}{N!}\int_0^t (\tau - t)^N \overset{(N)}{R}d\tau\right] = \sigma_{th}\left[1 - \frac{1}{N!}\int_0^t (\tau - t)^N \overset{(N)}{R}d\tau\right].$$

Vậy:
$$\omega = 1 - \frac{1}{N!}\int_0^t (\tau - t)^N R^{(N)} d\tau \qquad (2.4)$$

Trong đó ký hiệu: $\omega = \sigma/\sigma_{th}$

Ở trên ta sử dụng quan hệ ứng suất – biến dạng (2.1) và thu được quan hệ ứng suất – thời gian tới hạn (2.4). Nhưng thông thường người ta thường cho trước đường cong thực nghiệm từ biến mà ít cho đường cong chùng nên để tiện hơn có thể sử dụng biểu thức biến dạng – ứng suất:

$$\Delta e_{ij}(t) = a_{ijmn}\Delta\sigma_{mn}(t) + a_{ijmn}\int_0^t K_{ijmn}(t,\tau)\,\Delta\sigma_{mn}(\tau)d\tau \qquad (2.5)$$

Biểu thức (2.1) và (2.5) là ngược nhau nên thay cho (2.4) có thể sử dụng:

$$\omega = \frac{\sigma}{\sigma_{th}} = \left[1 + \frac{1}{N!}\int_0^t (\tau - t)^N K^{(N)}(t,\tau)d\tau\right]^{-1} \qquad (2.6)$$

Bây giờ chọn nhân từ biến là nhân Aben, là nhân mô tả khá chính xác đường cong thực nghiệm:

$$K(t-\tau) = A/(t-\tau)^{\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1. \qquad (2.7)$$

Từ (2.6) và (2.7) ta thu được thời gian tới hạn.

$$t^* = \left[\frac{N!(1-\alpha)\left(\frac{1}{\omega} - 1\right)}{A\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+N-1)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \qquad (2.8)$$

§3. SO SÁNH VỚI THỰC NGHIỆM

Trong [2] đã nghiên cứu thực nghiệm nén dài hạn vỏ trụ từ chất dẻo thủy tinh.

Trước khi tiến hành thí nghiệm từ biến đã tiến hành thí nghiệm các vỏ chịu tải tức thời để xác định tải trọng tới hạn. Ứng suất tới hạn được xác định bằng $7,0 \cdot 9,8 \cdot 10^6 N/m^2$. Các hằng số đàn hồi là:

$$E_1 = 1,76 \cdot 9,8 \cdot 10^9 N/m^2, \quad E_2 = 2,72 \cdot 9,8 \cdot 10^9 N/m^2.$$

$$\nu_1 = 0,138, \quad \nu_2 = 0,08, \quad G = 0,35 \cdot 9,8 \cdot 10^9 N/m^2.$$

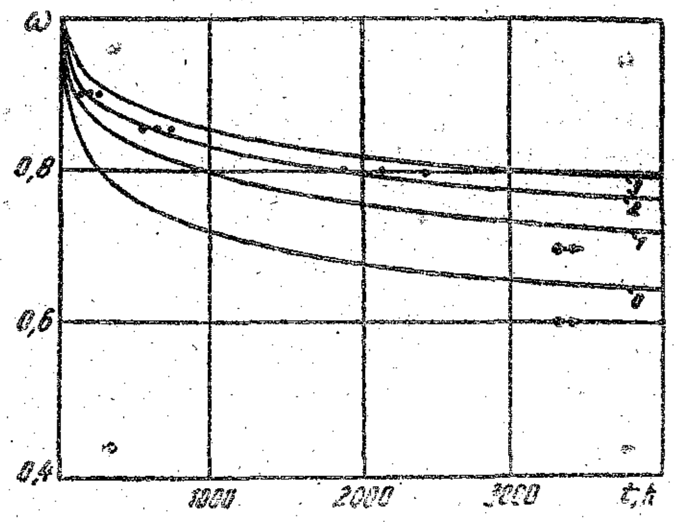
Sử dụng đường cong từ biến trong [2] ta xác định được:

$$A = 0,012\frac{1}{0,33}, \quad \alpha = \frac{2}{3} \qquad (3.1)$$

Các số liệu thực nghiệm tương quan $\omega \sim t$ đã cho trong [2]. Sử dụng các số liệu (3.1) và công thức (2.8) ta vẽ các đường cong ứng với các N khác nhau (Hình 1). Ta nhận thấy các điểm thực nghiệm nằm cạnh đường cong PG2. Những mũi tên chỉ các vỏ vẫn chịu lực mà không mất ổn định.

Với $N = 2$ từ (2.8) ta thu được:

$$t_{th} = \left[\frac{2(1-\alpha)\left(\frac{1}{\omega} - 1\right)}{A\varkappa(\alpha+1)} \right]^{1/1-\alpha} \qquad (3.2)$$



Hình 1

§ 4. KẾT LUẬN

— Trên cơ sở so sánh kết quả lý thuyết và thực nghiệm có thể xem bậc phân nhánh giả tới hạn đối với vỏ trụ đàn nhớt trực hướng là $N_{th} = 2$. Tức là PG2 là biên giới của miền ổn định.

— Có thể dùng công thức (3.2) để tính thời gian tới hạn của vỏ trụ từ vật liệu trực hướng và đàn nhớt. Công thức đó cũng có thể dùng cho vỏ trụ đẳng hướng đàn nhớt nhưng với ω chứa σ_{th} thu từ vỏ trụ đẳng hướng.

— Để thu được kết quả cuối cùng cần có các số liệu thực nghiệm về đặt tải tức thời để xác định σ_{th} và các đường cong từ biến hay chùng ứng suất để xác định các hằng số trong nhân.

— Ứng suất tới hạn của vỏ trụ trực hướng đàn hồi khi võng đối xứng trục và khi võng không đối xứng trục là gần như nhau và có thể tính theo công thức (1.16).

Địa chỉ:
— *Trường Đại học Xây dựng*
Hà Nội

Nhận ngày 3/10/1986

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. КОЛТУНОВ М. А. Устойчивость гибких упруго вязких ортотропных оболочек. Прочность и пластичность. М., 1971.
2. ВАН ФО ФЫ Г. А., ЕМЕЛЪЯНОВ Р. Ф. Поведение тонких цилиндрических оболочек из стеклопластика при длительном сжатии. ПМ, №, 1972.
3. TÔ VĂN TẤN. Ổn định của thanh trong điều kiện từ biến. Tạp chí Cơ học số 4, 1986.

РЕЗЮМЕ

УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГО ВЯЗКИХ И УПРУГИХ ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

В данной Работе получено выражение критического напряжения для упругих ортотропных цилиндрических оболочек. На основе выделения псевдобифуркационных точек и метода упруго эквивалента найдена формула критических времен для упруго вязких ортотропных цилиндрических оболочек. Из сопоставления кривых разных порядков псевдобифуркации с экспериментальными данимя получено, что для рассмотренных оболочек границей области устойчивости можно считать $N_{kp} = 2$.

GIẢI BÀI TOÁN ĐỘNG LỰC HỆ ĐÀN DẺO ...

(*Tiếp trang 14*)

Univ. California, Berkeley, 1968.

3. BATHE K. J. Finite element formulation, modeling, and solution of nonlinear dynamic problems, ADINA Sem., 9-11 Jun 1980, J. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. in press.
4. NEWMARK N. M. A method of computation for structural dynamics, ASCE J. Eng. Mech. Div., Vol 85, 1959.
5. T. D. HIEN. Giải bài toán động lực hệ đàn dẻo biến dạng chuyển vị lớn bằng phương pháp phần tử hữu hạn. I. Mô tả Lagrange đứng. Tạp chí cơ học, số 4, 1987.
6. T.D. HIÊN. Naliniowa dynamika ciał i powłok osiowosymetrycznych poddanych dowolnym obciazeniom. Praca IPPT PAN, N11, 1981.

SUMMARY

LARGE DEFORMATION DYNAMIC ANALYSIS OF ELASTOPLASTIC SOLIDS BY THE FINITE ELEMENT METHOD. II. UPDATED LAGRANGIAN FORMULATION

As a continued part of [5] an updated Lagrangian formulation is presented for large strain and displacement dynamic analysis of elastoplastic bodies. Comparison and evaluation of both total and updated Lagrangian formulations which have been implemented in computational mechanics are summarized and discussed. A modified form of the Newmark method is proposed to integrate the incremental equations of motion.