Tạp chí Cơ học T. X, 1988, Số 2 (trang 21 – 24)

VỀ MỘT BÀI TOÁN PHÂN TÍCH ĐỘNG LỰC

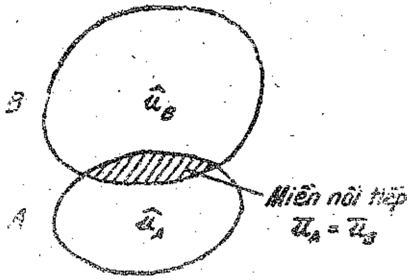
NGUYỄN THẠC SĨ

§1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Việc xác lập các tính chất cơ học của một hệ cơ học từ các đặc trưng của các phần tử nguyên tố cấu thành mà số các phần tử càng lớn thì kết quả càng chính xác là tư tưởng chính của nhiều phương pháp nghiên cứu cơ học, trong đó phải kể tới phương pháp phần tử hữu hạn [1]. Trong thực tế kỹ thuật tuy nhiên nhiều khi người ta phải chia hệ khảo sát thành một vài hệ con và đòi hỏi tổng hợp tính chất của hệ từ các tính chất của các hệ con đó. Theo hướng này nhiều kỹ thuật tổng hợp đã được đưa ra và ứng dụng [2], [3], [4].

Một vấn đề mang đặc tính ngược lại cũng xuất hiện trong kỹ thuật. Chẳng hạn, trong các bài toán đồng nhất hóa hay tổng hợp các phần tử lớn người ta thường đòi hỏi các tính chất động lực của hệ ở trạng thái tự do trong không gian. Trong phòng thí nghiệm người ta chỉ xác định được tính chất của hệ khảo sát cùng hệ treo. Do đó tính chất của hệ khảo sát phải được tính toán lại dựa trên tính chất của hệ cùng hệ treo và tính chất của hệ treo đã biết, [5]. Xuất phát trên cơ sở đó chúng ta đặt bài toán sau.

§2. BÀI TOÁN



Hình 1

Cho hệ cơ học, tuyến tính, không cản, n bậc tự do. Bằng phương pháp nào đó ta đã xác định được các tần số riêng ω_j và các dạng riêng $\{\varphi_j\}$ của nó ($j = 1, 2, \ldots, n$). Để đơn giản cho việc trình bày ta giả sử hệ được coi như sự ghép nối của hai hệ con A và B (hình 1). Hệ con A giả sử có n_A bậc tự do và ta đã biết các ma trận khối lượng $[M_A]$ và ma trận độ cứng $[K_A]$ của nó. Cho số bậc tự do của miền tiếp nối giữa hai hệ A và B là n_c. Hệ con B có số bậc tự do là n_B.

Bài toán đặt ra là xác định các tần số riêng và dạng riêng của hệ con B.

§3. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Cho hệ dao động tự do với tần số ω_j nào đó. Khi đó hệ sẽ dao động trong dạng thứ j:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} \hat{U}_A \\ \bar{U}_A \\ \hat{U}_B \end{Bmatrix} \sin\omega_j t = \gamma_j \begin{Bmatrix} \hat{\varphi}_A \\ \bar{\varphi}_A \\ \hat{\varphi}_B \end{Bmatrix} \sin\omega_j t \tag{3.1}$$

Trong đó $\widehat{U_A}(\widehat{U_B})$: biên độ dao động các tọa độ của hệ A(B) nằm ngoài miền tiếp nối.

$\overline{U_A} = \overline{U_B}$: biên độ dao động các tọa độ của hệ A (hoặc B) nằm trong miền tiếp nối.

γ_j là hằng số nào đó, để thuận tiện ta chọn $\gamma_j = 1$.

Trong trạng thái dao động tự do đó, nếu ta xét riêng hệ A như một hệ độc lập, nó sẽ có dao động cưỡng bức với tần số ω_j dưới tác dụng của lực ngoài ở miền tiếp nối. Dao động cưỡng bức đó của hệ A được điều khiển bởi phương trình:

$$[M_A]\{\ddot{u}_A\} + [K_A]\{u_A\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \overline{F}_A \end{Bmatrix} \sin\omega_j t \tag{3.2}$$

Theo (3.1) nghiệm của (3.2) có dạng:

$$\{u_A\} = \begin{Bmatrix} \widehat{U}_A \\ \overline{U}_A \end{Bmatrix} \sin\omega_j t \tag{3.3}$$

Thay (3.3) vào (3.2) rồi kết hợp với (3.1) ta được

$$[K_A - \omega_j^2 M_A] \begin{Bmatrix} \widehat{\varphi}_A \\ \overline{\varphi}_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \overline{F}_A \end{Bmatrix} \tag{3.4}$$

Bằng cách phân chia thích hợp ma trận độ cứng động lực

$$[\beta(\omega)] = [K_A - \omega^2 M_A]$$

a có thể viết lại phương trình (3.4) dưới dạng sau:

$$\left[\begin{array}{c:c} \widehat{\beta}_A(\omega_j) & \widehat{\overline{\beta}}_A(\omega_j) \\ \widehat{\overline{\beta}}_A(\omega_j)^T & \overline{\beta}_A(\omega_j) \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \widehat{\varphi}_A \\ \overline{\varphi}_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \overline{F}_A \end{Bmatrix} \tag{3.5}$$

Từ đó ta có thể xác định được lực tác dụng ở phần tiếp nối lên hệ A.

$$\{\overline{F}_A\} = \left[\widehat{\overline{\beta}}_A(\omega_j)^T\right]\{\widehat{\varphi}_A\} + \left[\overline{\beta}_A(\omega_j)\right]\{\overline{\varphi}_A\} \tag{3.6}$$

Bằng phép biến đổi

$$\{u_B\} = [\psi_B]\{p_B\} \tag{3.7}$$

trong đó $[\psi_B] = [\psi_B^r : \psi^d]$

$[\psi_B^r]$ là ma trận dạng chuyển động vật rắn của hệ B.

$[\psi_B^d]$ là ma trận dạng dao động đàn hồi của hệ B, phương trình dao động hệ B được đưa về dạng

$$[\mu_B]\{\ddot{p}_B\} + [k_B]\{p_B\} = [\psi_B]^T\{f_B\} \tag{3.8}$$

Hệ B cũng dao động cưỡng bức với tần số ω_j theo (3.1):

$$\{u_B\} = \begin{Bmatrix} \overline{U}_A \\ \widehat{U}_B \end{Bmatrix} \sin\omega_j t = \begin{Bmatrix} \overline{\varphi}_A \\ \widehat{\varphi}_B \end{Bmatrix} \sin\omega_j t \tag{3.9}$$

dưới tác dụng của ngoại lực ở miền tiếp nối từ A

$$\{f_B\} = -\begin{Bmatrix} \overline{F}_A \\ 0 \end{Bmatrix} \sin\omega_j t \tag{3.10}$$

Từ (3.8) và (3.10) ta xác định được biên độ dao động cưỡng bức $\{P_B\}$:

$$\{P_B\} = -[k_B - \omega_j^2 \mu_B]^{-1} [\psi_B]^T \begin{Bmatrix} \overline{F}_A \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.11}$$

Theo (3.7) biên độ dịch chuyển hệ B.

$$\{U_B\} = \left\{\begin{matrix}\overline{U}_A \\ \widehat{U}_B\end{matrix}\right\} = [\psi_B]\{P_B\}. \tag{3.12}$$

Mặt khác từ (3.9)

$$\left\{\begin{matrix}\overline{U}_A \\ \widehat{U}_B\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\overline{\varphi}_A \\ \widehat{\varphi}_B\end{matrix}\right\} \tag{3.13}$$

Từ (3.11), (3.12), (3.13) ta có

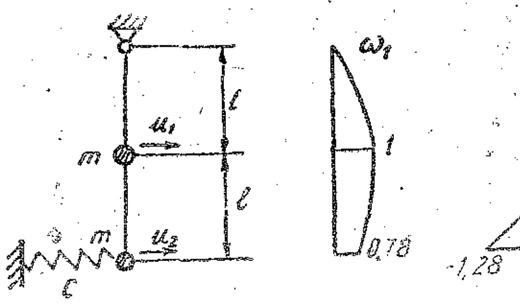
$$\left\{\begin{matrix}\overline{\varphi}_A \\ \widehat{\varphi}_B\end{matrix}\right\} = -[\psi_B]\,[k_B - \omega_j^2 \mu_B]^{-1}\,[\psi_B]^T \left\{\begin{matrix}\overline{F}_A \\ 0\end{matrix}\right\} \tag{3.14}$$

Đối với một hệ cụ thể dễ dàng xác định được ma trận các dạng vật rắn $[\psi_B^r]$, giả sử tồn tại n_r dạng như vậy. Khi đó trong ma trận $[\psi_B]$ chỉ còn $(n_B - n_r)(n_B - 1)$ ẩn số chưa biết trong các phần tử của $[\psi_B^d]$. Ngoài ra để xác định các tần số riêng của hệ B ta còn phải tìm n_B ẩn của $[\psi_B]$ và $n_B - n_r$ ẩn của $[k_B]$. Số ẩn tổng cộng là $n_B(n_B - n_r + 1)$.

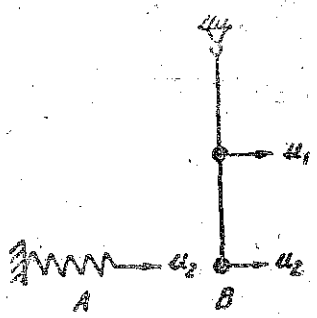
Với phương trình (3.14) cho ta n_B phương trình để giải các ẩn cần tìm. Bằng cách lặp lại hoàn toàn thuật toán trên với sự thay đổi các trị của ω_j $(j = 1, 2, \ldots, n_B - n_r + 1)$ ta sẽ có đủ các phương trình để giải các ẩn cần tìm.

4. VÍ DỤ MINH HỌA

Cho thanh dài 2l mang 2 khối lượng m có độ cứng chống uốn là EJ, một đầu gắn bản lề và một đầu gắn vào lò xo có độ cứng $c = 6EJ/l^3$ (hình 2).



Hình 2



Hình 3

Hệ được xác định vị trí bởi 2 tọa độ u_1, u_2. Các tần số riêng của hệ $\omega_1 = 0{,}781\sqrt{c/m}$, $\omega_2 = 1.281\sqrt{c/m}$ với các dạng riêng tương xứng được biểu diễn trên hình 2. Hãy xác định tần số riêng và dạng riêng của thanh khi nó được tự do ở đầu dưới.

Để giải ta phân hệ cho thành 2 hệ con theo hình 3.

Cho hệ dao động tự do với tần số ω_1

$$\left\{\begin{matrix}u_1 \\ u_2\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1 \\ 0{,}78\end{matrix}\right\} \sin 0.781\sqrt{c/m}\,t$$

Lực lò xo đặt vào hệ B

$$f = -c\,u_2 = -c.\,0{,}78 \sin 0{,}781\sqrt{c/m}\,t$$

Hệ B có một dạng vật rắn $\{1, 2\}^T$ và dạng dao động đàn hồi $\{1, \psi\}^T$. Với phép đổi biến

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \psi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}$$

dao động cưỡng bức của hệ B được xác định bởi phương trình :

$$\begin{bmatrix} \mu_1 & \\ & \mu_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{p}_1 \\ \ddot{p}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \\ & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & \psi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -0{,}78c \sin 0{,}781 \sqrt{c/m}\, t \end{Bmatrix}$$

Theo (3.14) ta được

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 0{,}78 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}781^2 \dfrac{c}{m} \mu_1 & 0 \\ 0 & k_2 - 0{,}781^2 \dfrac{c}{m} \mu_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \psi \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ -0{,}78c \end{Bmatrix} \qquad (4.1)$$

Lặp lại cách làm như trên với $\omega_2 = 1{,}281 \sqrt{c/m}$ ta được

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ -1{,}28 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1{,}281^2 \dfrac{c}{m} \mu_1 & 0 \\ 0 & k_2 - 1{,}281^2 \dfrac{c}{m} \mu_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \psi \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ 1{,}28c \end{Bmatrix} \qquad (4.2)$$

Từ (4.1) và (4.2) giải ra

$$\mu_1 = 5m,\ \mu_2 = 1{,}5m,\ k_2 = 1{,}56c,\ \psi = -0{,}5$$

§ 5. KẾT LUẬN

Phương pháp đưa ra trong bài này giải quyết vấn đề xác định các đặc trưng động lực của hệ con, cụ thể là tần số riêng và dạng riêng, khi ta biết được đặc trưng cơ học của toàn hệ và phần còn lại.

Phương pháp dựa trên sự cân bằng của lực và dịch chuyển ở chỗ tiếp nối khi cho cả hệ dao động ở các dạng riêng đã biết.

Địa chỉ
Trường đại học Mỏ

ngày 14/2/1987

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. BITTNAR Z., RERICHA P. Metoda konecnych prvku v dynamice konstrukci, SNTL Praha, 1981.
2. HURTY W.C. Dynamic Analysis of Structural Using Component Modes, AIAA Journal Vol 3. № 4., 1965.
3. GLADWEL G.M.L. Branch Mode Analysis of Vibrating System. J. Sound Vib. I, 1961.
4. NICHOLS J.J. Skylab Modal Survey Testing. the Shock and Vibration Bull. No 43 part 3.
5. PUST L. Vliv ulozeni soustavy na matici dynamickych poddajnosti. Strojnicky casopis, c.6, 1982.

SUMMARY

ON MODAL ANALYSIS OF MECHANICAL SYSTEMS

A method has been developped for determining the modal information of a subsystem from the modal information of the total system and the dynamic characteristics of the rest subsystems. The method is based on both compatibility and equilibrium conditions at interfaces of the subsystems during the free vibration of the system. A numeric al example is given.