Tạp chí Cơ Học T. X, 1988 số 2 (trang 15 – 20)

VỀ SỰ PHÂN NHÁNH CỦA ỔN ĐỊNH ĐỐI LƯU NHIỆT CỦA CHẤT LỎNG VI CỰC

NGUYỄN XUÂN HUY

Trong bài này chúng tôi xét điểm phân nhánh của bài toán phi tuyến dừng của ổn định đối lưu nhiệt của chất lỏng vi cực trên cơ sở lý thuyết của M. A. Krasnoseskii [3].

§1. ĐẶT BÀI TOÁN

Ta gọi Ω là miền chứa chất lỏng và S là biên đủ trơn. Hệ phương trình phi tuyến dừng trong dạng toán tử mô tả trạng thái tới hạn của ổn định đối lưu nhiệt của chất lỏng vi cực được viết như sau [1, 2]:

$$-A_1\overline{v} - Pr^{-1}(\overline{v}\cdot\nabla)\overline{v} + HB_{12}\overline{w} + R\Pi(\overline{\gamma T}) = 0 \quad (1.1)$$

$$-A_2\overline{w} - Pr^{-1}(\overline{v}\cdot\nabla)\overline{w} + HB_{21}\overline{v} - 2H\overline{w} = 0 \quad (1.2)$$

$$-A_3T - \overline{v}\cdot\nabla T + \overline{v}\,\overline{\gamma} = 0 \quad (1.3)$$

Cùng với hệ phương trình (1.1) – (1.3) ta xét hệ phương trình tuyến tính hóa.

$$-A_1\overline{v} + HB_{12}\overline{w} + R\Pi(\overline{\gamma T}) = 0 \quad (1.4)$$

$$-A_2\overline{w} + HB_{21}\overline{v} - 2H\overline{w} = 0 \quad (1.5)$$

$$-A_3T + \overline{v}\,\overline{\gamma} = 0 \quad (1.6)$$

Ta sẽ tìm nghiệm của hệ phương trình (1.1) – (1.3) và (1.4) – (1.6) trong không gian $H_1 \times H_2 \times H_3$.

Ở đây các ký hiệu là hoàn toàn như trong [ ].

Trong [2] đã chứng minh rằng nghiệm $\overline{v}$ của hệ phương trình (1.4) – (1.6) thỏa mãn phương trình toán tử:

$$\overline{v} = R(E - A)^{-1}B\,\overline{v} \quad (1.7)$$

với:

$$A = A_1^{-1}HB_{12}(A_2 + 2H)^{-1}HB_{21} \quad (1.8)$$

$$B = A_1^{-1}\Pi[\overline{\gamma}\,A_3^{-1}(\overline{v}\,\overline{\gamma})] \quad (1.9)$$

(1.7) là bài toán giá trị riêng đối với R. Các giá trị riêng R là rời rạc và lập thành dãy:

$$0 < R_1 < R_2 < \dots \quad (1.10)$$

Ta có $H_3 \subset W_2^1$ – không gian Sobolev các hàm triệt tiêu trên biên S có đạo hàm suy rộng bậc nhất bình phương khả tích. Theo định lí nhúng Sobolev [4], W_2^1 nhúng trong các không gian hàm L_q với $q \leqslant 6$ và ta có:

$$\|\varphi\|_{L_q} \leqslant C_3\|\varphi\|_{H_3}, \quad \forall q \leqslant 6 \quad (1.11)$$

Tương tự $H_2 \subset W_2^{1*}$ — không gian Sobolev các hàm véc tơ triệt tiêu trên biên S có đạo hàm suy rộng bậc nhất bình phương khả tích. W_2^1 nhúng trong các không gian véc tơ L_q^* với $q \leqslant 6$ và ta có:

$$\|\Phi\|_{L_q^*} \leqslant C_2 \|\Phi\|_{H_2}, \quad \forall q \leqslant 6 \tag{1.12}$$

$H_1 \subset \widetilde{W}_2^1$ — không gian Sobolev các hàm véc tơ sôlenôit triệt tiêu trên biên S, có đạo hàm suy rộng bậc nhất bình phương khả tích. $\widetilde{W}_2^1$ nhúng trong các không gian $\widetilde{L}_q$ với $q \leqslant 6$ và nhúng hoàn toàn liên tục trong các không gian $\widetilde{L}_q$ với $q < 6$ và ta có:

$$\|\psi\|_{\widetilde{L}_q} \leqslant C_1 \|\psi\|_{H_1}, \quad \forall q \leqslant 6 \tag{1.13}$$

§2. PHÂN NHÁNH CỦA BÀI TOÁN PHI TUYẾN

Từ phương trình (1.3) ta có:

$$A_3T = -\overline{v} \cdot \nabla T + \overline{v}\,\overline{\gamma}$$

Khi đó:

$$T = -A_3^{-1}(\overline{v} \cdot \nabla T) + A_3^{-1}(\overline{v}\,\overline{\gamma}) \tag{2.1}$$

Với mỗi $\overline{v}$ cố định, $A_3^{-1}(\overline{v} \cdot \nabla T)$ là một toán tử tuyến tính đối với T. Ta kí hiệu:

$$A_{3v}T = A_3^{-1}(\overline{v} \cdot \nabla T)$$

Khi đó từ (2.1) ta có

$$T = -A_{3v}T + A_3^{-1}(\overline{v}\,\overline{\gamma})$$

hay là:

$$(E + A_{3v})T = A_3^{-1}(\overline{v}\,\overline{\gamma}) \tag{2.2}$$

Ta xét phương trình $(E + A_{3v})T = 0$. Phương trình này tương đương với phương trình.

$$A_3T + \overline{v} \cdot \nabla T = 0 \tag{2.3}$$

Nhân (2.3) với T rồi lấy tích phân trên Ω ta có:

$$\int A_3T \cdot T d\Omega + \int \overline{v} \cdot \nabla T \cdot T d\Omega = 0$$

Từ đây suy ra:

$\|T\|_{H_3} = 0$. Vậy $T = 0$ và ta có toán tử ngược $(E + A_{3v})^{-1}$. Từ (2.2) ta có:

$$T = (E + A_{3v})^{-1} A_3^{-1}(\overline{v}\,\overline{\gamma}) \tag{2.4}$$

Bổ đề 1: Toán tử $(E + A_{3v})^{-1}A_3^{-1}$ là hoàn toàn liên tục. Đạo hàm Fréchet của nó tại $\overline{v} = 0$ là toán tử A_3^{-1}.

Chứng minh. Sử dụng các kết quả trong [4] ta chỉ cần chứng minh rằng $(E + A_{3v})^{-1}A_3^{-1}$ chuyển mỗi dãy hội tụ yếu trong $H_1\{\overline{v}_n\}$ sang một dãy $\{T_n\}$ hội tụ mạnh trong H_3.

Do H_1 nhúng hoàn toàn liên tục trong $\widetilde{L}_q$ với $q < 6$ nên dãy $\{\overline{v}_n\}$ sẽ hội tụ mạnh trong $\widetilde{L}_4$ và $\widetilde{L}_2$ tức là:

$$\|\overline{v}_m - \overline{v}_n\|_{\widetilde{L}_4} \to 0 \tag{2.5}$$

và

$$\|\overline{v}_m - \overline{v}_n\|_{\widetilde{L}_2} \to 0 \text{ khi } m, n \to 0 \tag{2.6}$$

Ta có:

$$T_m = (E + A_{3v})^{-1}A_3^{-1}(\overline{v}_m\overline{\gamma})$$

$$T_n = (E + A_{3v})^{-1}A_3^{-1}(\overline{v}_n\overline{\gamma})$$

Sử dụng (1.8) ta có:

$$(T_m - T_n, \varphi)_{H_3} = \int (\overline{v}_m - \overline{v}_n) . \nabla T_m \varphi d\Omega + \int \overline{v}_n . \nabla (T_m - T_n) \varphi d\Omega -$$

$$- \int (\overline{v}_m - \overline{v}_n) \overline{\gamma} \varphi d\Omega. \quad \forall \varphi \in H_3 \tag{2.7}$$

Thay $\varphi = T_m - T_n$, sử dụng bất đẳng thức Holder và các bất đẳng thức (1.11), (1.15) ta có:

$$\| T_m - T_n \|_{H_3} \leqslant M_1 \| \overline{v}_m - \overline{v}_n \|_{\tilde{L}_4} + M_2 \| v_m - v_n \|_{\tilde{L}_2} \tag{2.8}$$

với M_1, M_2 là các hằng số.

Chú ý tới (2.5), (2.6) ta suy ra rằng dãy $\{T_n\}$ hội tụ mạnh trong H_3.

Giả sử $\qquad T_1 = (E + A_{3v})^{-1} A_3^{-1} (\overline{v} \overline{\gamma})$

và $\qquad T_2 = A_3^{-1} (\overline{v} \overline{\gamma})$

tức là T_1 là nghiệm của phương trình $A_3 T_1 = \overline{v} \overline{\gamma} - \overline{v} . \nabla T_1$ và T_2 là nghiệm của phương trình $A_3 T_2 = \overline{v} \overline{\gamma}$.

Khi đó: $\qquad A_3(T_1 - T_2) = - \overline{v} . \nabla T_1$

Nhân hai vế với $T_1 - T_2$ rồi lấy tích phân trên Ω ta có:

$$\| T_1 - T_2 \|^2_{H_3} = \left| \int \overline{v} . \nabla T_1 . (T_1 - T_2) d\Omega \right|$$

Sử dụng bất đẳng thức Holder và (1.11), (1.13) ta có

$$\| T_1 - T_2 \|^2_{H_3} \leqslant \| \overline{v} \|_{\tilde{L}_4} . \| \nabla T_1 \|_{\tilde{L}_2} . \| T_1 - T_2 \|_{L_4} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \| \overline{v} \|_{H_1} . \| T_1 \|_{H_3} . C_3 \| T_1 - T_2 \|_{H_3}$$

Từ đây:

$$\frac{\| T_1 - T_2 \|_{H_3}}{\| \overline{v} \|_{H_1}} \leqslant C_4 \| T_1 \|_{H_3}$$

Khi $\qquad \| \overline{v} \|_{H_1} \to 0$ ta có $\| T_1 \|_{H_3} \to 0$ nên:

$$\lim_{\| \overline{v} \|_{H_1} \to 0} \frac{\| T_1 - T_2 \|_{H_3}}{\| \overline{v} \|_{H_1}} = 0$$

Vậy A_3^{-1} là đạo hàm Fréchet của $(E + A_{3v})^{-1} A_3^{-1}$ tại $\overline{v} = 0$. Bổ đề được chứng minh. Cách chứng minh này dựa trên cách chứng minh của M. R. Ukhovskii và V. I. Iudovich trong [6]. Ta có biểu diễn sau:

$$(E + A_{3v})^{-1} A_3^{-1} = A_3^{-1} + G_3 \tag{2.9}$$

với:

$$\lim_{\| \overline{v} \|_{H_1} \to 0} \frac{\| G_3(\overline{v} \overline{\gamma}) \|_{H_3}}{\| \overline{v} \|_{H_1}} = 0 \tag{2.10}$$

Bổ đề 2 Với bất kì $\overline{a} \in H_1$, $\overline{b}$ và $\overline{c} \in H_2$ ta có:

$$\int (\overline{a} . \nabla) \overline{b} . \overline{c} d\Omega = \int (\overline{a} . \nabla) \overline{c} . \overline{b} d\Omega \tag{2.11}$$

và

$$\left| \int (\overline{a} . \nabla) \overline{b} . \overline{c} d\Omega \right| \leqslant M_3 \| \overline{a} \|_{\tilde{L}_4} . \| \overline{b} \|_{H_2} . \| \overline{c} \|_{\tilde{L}_4} \tag{2.12}$$

với M_3 là hằng số.

Chứng minh. Sử dụng $\operatorname{div} \bar{a} = 0$ và lấy tích phân từng phần ta dễ dàng thu được (2.11).

Ta có:

$$(\bar{a} \cdot \nabla)\bar{b} \cdot \bar{c} = \sum_{i,k=1}^{3} a_{x_i} \frac{\partial b_{x_k}}{\partial x_i} c_{x_k} \tag{2.13}$$

Ta xét từng số hạng trong vế phải của (2.13). Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có:

$$\left| \iint a_{x_1} \frac{b_{x_1}}{x_1} c_{x_1} d\Omega \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left[\iint (a_{x_1})^4 d\Omega \right]^{1/4} \cdot \left[\iint \left(\frac{\partial b_{x_1}}{\partial x_1} \right)^2 d\Omega \right]^{1/2} \cdot \left[\iint (c_{x_1})^4 d\Omega \right]^{1/4} \leqslant$$

$$\leqslant \|\bar{a}\|_{\tilde{L}_4} \cdot \|\bar{c}\|_{L_4^*} \cdot \left[\iint \left(\frac{\partial b_{x_1}}{\partial x_1} \right)^2 d\Omega \right]^{1/2}$$

Làm tương tự cho các số hạng còn lại và áp dụng bất đẳng thức:

$$a + b + c \leqslant \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}$$

ta có:

$$\left| \iint (\bar{a} \cdot \nabla)\bar{b} \cdot \bar{c} d\Omega \right| \leqslant \|\bar{a}\|_{\tilde{L}_4} \cdot \|\bar{c}\|_{L_4^*} \cdot \sum_{i,k=1}^{3} \left[\iint \left(\frac{\partial b_{x_i}}{\partial x_k} \right)^2 d\Omega \right]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant 3 \cdot \|\bar{a}\|_{\tilde{L}_4} \cdot \|\bar{c}\|_{L_4^*} \cdot \left\{ \iint [(\operatorname{div} \bar{b})^2 + (\operatorname{rot} \bar{b})^2] d\Omega \right\}^{1/2} \tag{2.14}$$

Ta gọi $M_0 = \min(M, N)$. Từ (1.5) ở [2] ta có

$$M_0 \iint [(\operatorname{div} \bar{b})^2 + (\operatorname{rot} \bar{b})^2] d\Omega \leqslant \|\bar{b}\|_{H_2}$$

Thay vào (2.14) ta có:

$$\left[\iint (\bar{a} \cdot \nabla)\bar{b} \cdot \bar{c} d\Omega \right] \leqslant \frac{3}{M_0} \|\bar{a}\|_{\tilde{L}_4} \cdot \|\bar{c}\|_{L_4^*} \cdot \|\bar{b}\|_{H_2}$$

Bổ đề được chứng minh.

Ta xét phương trình (1.2). Ta có:

$$(A_2 + 2H)\bar{w} = - Pr^{-1}(\bar{v} \cdot \nabla)\bar{w} + HB_{21}\bar{v}$$

hay là:

$$\bar{w} = - Pr^{-1}(A_2 + 2H)^{-1}(\bar{v} \cdot \nabla)\bar{w} + (A_2 + 2H)^{-1}HB_{21}\bar{v} \tag{2.15}$$

Với mỗi $\bar{v}$ xác định, $(A_2 + 2H)^{-1}(\bar{v} \cdot \nabla)\bar{w}$ là một toán tử tuyến tính đối với $\bar{w}$. Ta kí hiệu:

$$A_{2v}\bar{w} = Pr^{-1}(A_2 + 2H)^{-1}(\bar{v} \cdot \nabla)\bar{w}$$

Khi đó từ (2.15) ta có:

$$(E + A_{2v})\bar{w} = (A_2 + 2H)^{-1}HB_{21}\bar{v}$$

Tương tự như trên dễ dàng chứng minh được rằng Ker $(E + A_{2v}) = 0$ nên ta có toán tử ngược $(E + A_{2v})^{-1}$. Khi đó :

$$\overline{w} = (E + A_{2v})^{-1}(A_2 + 2H)^{-1}HB_{21}\overline{v} \qquad (2.16)$$

Bổ đề 3 : Toán tử $(E + A_{2v})^{-1}(A_2 + 2H)^{-1}HB_{21}$ là hoàn toàn liên tục. Đạo hàm Fréchet của nó tại $\overline{v} = 0$ là toán tử $(A_2 + 2H)^{-1}HB_{21}$

Chứng minh. Sử dụng bổ đề 2 và (1.12), (1.1) việc chứng minh bổ đề 3 là hoàn toàn tương tự việc chứng minh bổ đề 1.

Do HB_{21} là toán tử tuyến tính nên ta có biểu diễn sau:

$$(E + A_{2v})^{-1}(A_2 + 2H)^{-1} = (A_2 + 2H)^{-1} + G_2 \qquad (2.17)$$

với

$$\lim_{\|\overline{v}\|_{H_1} \to 0} \frac{\| G_2 HB_{21}\overline{v} \|_{H_1}}{\| \overline{v} \|_{H_1}} = 0 \qquad (2.18)$$

Thay (2.17) vào (2.1) và (2.9) vào (2.14) rồi thay vào (1.1) ta có :

$$A_1\overline{v} = -Pr^{-1}(\overline{v}\,.\,\nabla)\overline{v} + HB_{12}[(A_2 + 2H)^{-1} + G_2]HB_{21}\overline{v} + R\Pi[\overline{\gamma}(A_3^{-1} + G_3)(\overline{v}\,\overline{\gamma})]$$

hay là :

$$\begin{aligned}\overline{v} = & -Pr^{-1}A_1^{-1}(\overline{v}\,.\,\nabla)\overline{v} + A_1^{-1}HB_{12}[(A_2 + 2H)^{-1} + G_2]HB_{21}\overline{v} + \\ & + RA_1^{-1}\Pi[\overline{\gamma}(A_3^{-1} + G_3)(\overline{v}\,\overline{\gamma})] \\ = & A\overline{v} + RB\overline{v} - Pr^{-1}A_1^{-1}(\overline{v}\,.\,\nabla)\overline{v} + A_1^{-1}HB_{12}G_2HB_{21}\overline{v} + RA_1^{-1}\Pi[\overline{\gamma}G_3(\overline{v}\,\overline{\gamma})],\end{aligned} \qquad (2.19)$$

với A và B có dạng như (1.8), (1.9).

Từ đây ta có :

$$\begin{aligned}\overline{v} = & R(E - A)^{-1}B\overline{v} - Pr^{-1}(E - A)^{-1}A_1^{-1}(\overline{v}\,.\,\nabla)\overline{v} + \\ & + (E - A)^{-1}A_1^{-1}HB_{12}G_2HB_{21}\overline{v} + R(E - A)^{-1}A_1^{-1}\Pi[\overline{\gamma}G_3(\overline{v}\,\overline{\gamma})]\end{aligned} \qquad (2.20)$$

với $(E - A)^{-1}$ giới nội [ ].

Ta kí hiệu toán tử ở vế phải của (2.20) là K.

Bổ đề 4. Toán tử K là hoàn toàn liên tục. Đạo hàm Fréchet của K tại $\overline{v} = 0$ là toán tử $R(E - A)^{-1}B$.

Chứng minh. Các toán tử B_{21} và B_{12} là tuyến tính và tự liên hợp nên chúng là giới nội [5]. Kết hợp với các bổ đề 1, 3, tính chất hoàn toàn liên tục của toán tử A_1^{-1} và tính chất hoàn toàn liên tục của $R(E - A)^{-1}B$ (xem [ ]) ta có tính chất hoàn toàn liên tục của toán tử K.

Sử dụng (2.10), (2.18) ta dễ dàng chứng minh rằng :

$$\lim_{\|\overline{v}\|_{H_1} \to 0} \frac{\| K\overline{v} - R(E - A)^{-1}B\overline{v} \|_{H_1}}{\| \overline{v} \|_{H_1}} = 0$$

Do vậy $R(E - A)^{-1}B$ là đạo hàm Fréchet của K tại $\overline{v} = 0$. Bổ đề được chứng minh.

Phần tuyến tính $R(E - A)^{-1}B$ của toán tử K đã được xét trong [2]. Các toán tử K và đạo hàm Fréchet của nó thỏa mãn các điều kiện của định lí về điểm phân nhánh của M. A. Krasnoselskii trong [3]. Áp dụng định lí đó ta có định lí sau :

Định lí.

1. Điểm phân nhánh của bài toán phi tuyến (1.1)—(1.3) chỉ có thể là các giá trị riêng R_i của bài toán tuyến tính (1.4)—(1.6).

2. Giá trị riêng R_i có bội lẻ sẽ là điểm phân nhánh của bài toán phi tuyến (1.1)—(1.3).

Trong trường hợp bỏ qua hiệu ứng vi cực ta trở lại các kết quả của M. R. Ukhovskii và V. I. Iudovich trong [6].

KẾT LUẬN

Trong bài này áp dụng lí thuyết của M. A. Krasnoselskii tác giả đã chỉ ra điều kiện xuất hiện điểm phân nhánh của bài toán phi tuyến dừng của ổn định đối lưu nhiệt của chất lỏng vi cực.

Tác giả xin cảm ơn Tiến sĩ Ngô Huy Cẩn đã góp ý và thảo luận các kết quả của bài báo.

Địa chỉ
Trường Đại học Tổng hợp Hà nội

Nhận ngày 27/12/1986

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. NGO HUY CAN, NGUYEN XUAN HUY. « Sur la convection thermique des fluides micropolaires » Acta mathematica Vietnamica. Vol. II, №2, p. 193 – 203, 1986.
2. NGUYÊN XUÂN HUY. Về trạng thái tới hạn của ổn định đối lưu nhiệt của chất lỏng vi cực. Tạp chí Cơ học. №2, 1987.
3. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. ГИТТЛ. 1950.
4. СОБОЛЕВ С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд. ЛГУ. 1950.
5. ЛЮСТЕРНИК Л. А., СОБОЛЕВ В. И. Элементы функционального анализа. « Наука ». М. 1965.
6. УХОВСКИЙ М. Р., ЮДОВИЧ В. И. Об уравнениях стационарной конвекции. ПММ Т. 27. №2, 1963.

RESUME

SUR LA BIFURCATION DE LA STABILITE DE LA CONVECTION THERMIQUE DES FLUIDES MICROPOLAIRES

Dans cette étude le problème de définir le point de bifurcation dans le cas non-linéaire stationaire de la stabilité de la convection thermique des fluides micropolaires est considéré avec l'aide de la théorie de M. A. Krasnoselskii.