Tạp chí Cơ học T. X, 1988, Số 2 (trang 9 – 14)

GIẢI BÀI TOÁN ĐỘNG LỰC HỆ ĐÀN DẺO BIẾN DẠNG CHUYỂN VỊ LỚN BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN
II. MÔ TẢ LAGRANGE KHÔNG DỪNG

TRẦN DƯƠNG HIỀN

Phần I [5] đã giới thiệu mô hình phần tử hữu hạn (PTHH) trong mô tả Lagrange dừng, đề nghị một dạng cải biến của phương pháp Wilson θ tích phân số hệ phương trình chuyển động dạng gia số chuyển vị, xây dựng thuật toán giải và thảo luận về việc chia lưới PTHH, chọn bước tích phân Δt thích hợp. Trong phần II – nội dung bài báo này giới thiệu mô hình PTHH của bài toán động lực hệ dàn dẻo biến dạng chuyển vị lớn trong mô tả Lagrange không dừng đồng thời một dạng cải biến của phương pháp tích phân số Newmark được đề nghị. Sau khi mô tả thuật toán, trong phần kết luận của bài báo chúng ta sẽ so sánh đặc điểm của hai mô tả Lagrange dừng và không dừng và chỉ ra phạm vi áp dụng của chúng.

§1. MÔ HÌNH PTHH TRONG MÔ TẢ LAGRANGE KHÔNG DỪNG

Xét chuyển động của vật thể trong hệ tọa độ Cartesian $\{{}^tX\}$. Giả thiết đã biết cấu hình trong khoảng thời gian $[0, t]$, cần xác định các biến tĩnh và động học của cấu hình tại $t + \Delta t$. Theo nguyên lý công ảo, phương trình cân bằng của vật thể tại thời điểm $t + \Delta t$ trong mô tả Lagrange không dừng có dạng [1, 2]:

$$\int_{{}^tV} {}^{t+\Delta t}_{\ \ t}S_{ij}\,\delta\,{}^{t+\Delta t}_{\ \ t}E_{ij}\,{}^t dv = {}^{t+\Delta t}\mathcal{R} \tag{1.1}$$

với

$$ {}^{t+\Delta t}\mathcal{R} = \int_{{}^tA} {}^{t+\Delta t}_{\ \ t}\mathcal{P}_i\,\delta\,{}^{t+\Delta t}U_i\,{}^t da + \int_{{}^tV} {}^t\rho\,{}^{t+\Delta t}_{\ \ t}F_i\,\delta\,{}^{t+\Delta t}U_i\,{}^t dv, \tag{1.2}$$

trong đó $\delta\,{}^{t+\Delta t}U_i$ là biến phân của các thành phần chuyển vị suy rộng ${}^{t+\Delta t}U_i$, $\delta\,{}^{t+\Delta t}_{\ \ t}E_{ij}$ và ${}^{t+\Delta t}_{\ \ t}S_{ij}$ tương ứng là biến phân của các thành phần Cartesian của tensor biến dạng Green và các thành phần của tensor ứng suất Piola Kirchhoff loại 2 của cấu hình tại $t + \Delta t$ đo theo cấu hình tại t

$$ {}^{t+\Delta t}_{\ \ t}E_{ij} = \frac{1}{2}\left({}_tU_{j,i} + {}_tU_{i,j} + {}_tU_{k,i}\,{}_tU_{k,j}\right), \tag{1.3}$$

$$ {}^{t+\Delta t}_{\ \ t}S_{ij} = \frac{{}^t\rho}{{}^{t+\Delta t}\rho}\,{}^{t+\Delta t}_{\ \ t}X_{i,k}\,{}^{t+\Delta t}T_{km}\,{}^{t+\Delta t}_{\ \ t}X_{j,m} \tag{1.4}$$

với

$$ {}_tU_{i,j} = \partial U_i/\partial\,{}^tX_j,\quad {}^{t+\Delta t}_{\ \ t}X_{i,j} = \partial\,{}^tX_i/\partial\,{}^{t+\Delta t}X_j. \tag{1.5}$$

còn ${}^{t+\Delta t}T$ là các thành phần của tensor ứng suất Cauchy tại $t + \Delta t$. Công của lực tác dụng ${}^{t+\Delta t}\mathcal{R}$ gồm các thành phần tại thời điểm $t + \Delta t$ của lực mặt ${}^{t+\Delta t}\mathcal{S}$ và lực khối ${}^{t+\Delta t}\mathcal{F}$ tính theo mặt ${}^{t}A$, thể tích ${}^{t}V$ tại thời điểm t và ${}^{t}\rho$, ${}^{t+\Delta t}\rho$ — mật độ khối lượng tương ứng tại t và $t + \Delta t$. Trong trường hợp lực tác dụng độc lập với trạng thái chuyển vị và biến dạng có thể viết [2].

$$ {}^{t+\Delta t}_{t}S_{ij} = {}^{t}T_{ij} + {}_{t}\Delta S_{ij}, \tag{1.6} $$

$$ {}^{t+\Delta t}_{t}E_{ij} = {}_{t}\Delta E_{ij}, \tag{1.7} $$

trong đó ${}_{t}\Delta S_{ij}$ và ${}_{t}\Delta E_{ij}$ tương ứng là các thành phần gia số của tensor ứng suất Pi la Kirchhoff loại hai và tensor biến dạng Green trong khoảng $[t, t + \Delta t]$ đo theo cấu hình tại t

$$ {}_{t}\Delta E_{ij} = {}_{t}\Delta E^{*}_{ij} + {}_{t}\Delta E^{**}_{ij} \tag{1.8} $$

Ở đây các thành phần tuyến tính và phi tuyến của (1.8) có dạng

$$ {}_{t}\Delta E^{*}_{ij} = \frac{1}{2}\left({}_{t}\Delta U_{i,j} + {}_{t}\Delta U_{j,i}\right), \tag{1.9} $$

$$ {}_{t}\Delta E^{**}_{ij} = \frac{1}{2}\,{}_{t}\Delta U_{k,i}\,{}_{t}\Delta U_{k,j}. \tag{1.10} $$

So sánh (1.9) với (1.8) trong [5] thấy rằng so với trường hợp mô tả Lagrange đứng, biểu thức biểu diễn thành phần tuyến tính của gia số biến dạng trong mô tả Lagrange không dừng không có các số hạng do ảnh hưởng của chuyển vị ban đầu. Giả thiết quan hệ gần đúng giữa các gia số ứng suất và biến dạng.

$$ {}_{t}\Delta S_{ij} = {}_{t}C_{ijkm}\,{}_{t}\Delta E_{km} \tag{1.11} $$

nhận được phương trình chuyển động phi tuyến đối với gia số chuyển vị ΔU_i trong khoảng $[t, t + \Delta t]$.

$$ \int_{{}^{t}V} {}_{t}C_{ijkm}\,{}_{t}\Delta E_{km}\delta\,{}_{t}\Delta E_{ij}\,{}^{t}dv + \int_{{}^{t}V} {}^{t}T_{ij}\delta_{t}\Delta E^{**}_{ij}\,{}^{t}dv = {}^{t+\Delta t}\mathcal{R} - \int_{{}^{t}V} {}^{t}T_{ij}\delta_{t}\Delta E^{*}_{ij}\,{}^{t}dv. \tag{1.12} $$

Để giải trực tiếp ${}_{t}\Delta U_i$ thường dùng dạng tuyến tính hóa của (1.12)

$$ \int_{{}^{t}V} {}_{t}C_{ijkm}\,{}_{t}\Delta E^{*}_{km}\delta_{t}\Delta E^{*}_{ij}\,{}^{t}dv + \int_{{}^{t}V} {}^{t}T_{ij}\delta_{t}\Delta E^{**}_{ij}\,{}^{t}dv = {}^{t+\Delta t}\mathcal{R} - \int_{{}^{t}V} {}^{t}T_{ij}\delta_{t}\Delta E^{*}_{ij}\,{}^{t}dv. \tag{1.13} $$

Thiết lập mô hình PTHH của (1.13) tiến hành theo trình tự trình bày trong [5]. Vì việc chuyển các đại lượng từ tọa độ phần tử sang tọa độ toàn hệ và xây dựng ma trận cứng của hệ được thực hiện tương tự trường hợp bài toán tuyến tính, ở đây chỉ xét cho một phần tử. Giả thiết các thành phần chuyển vị của điểm bất kỳ được nội suy qua các đại lượng tương ứng ở nút

$$ {}^{t}U_i({}^{t}X, t) = H_n({}^{t}X)\,{}^{t}U^{n}_{i}(t), \tag{1.14} $$

$$ \Delta U_i({}^{t}X, t) = H_n({}^{t}X)\Delta^{t}U^{n}_{i}(t),\ n = 1, 2, \ldots, N \tag{1.15} $$

với ${}^{t}U^{n}_{i}$, ΔU^{n}_{i} và H_n tương ứng là chuyển vị nút, gia số chuyển vị nút và hàm nội suy của bậc tự do thứ i trong nút n cho phần tử hữu hạn có N nút. Như vậy

$$ {}^{t}\dot{U}_i({}^{t}X, t) = H_n({}^{t}X)\,{}^{t}\dot{U}^{n}_{i}(t), \tag{1.16} $$

$$ {}^{t}\ddot{U}_i({}^{t}X, t) = H_n({}^{t}X)\ddot{U}^{n}_{i}(t). \tag{1.17} $$

Với giả thiết khối lượng bảo toàn và năng lượng hao tán có dạng Rayleigh, nghĩa là có thể biểu diễn gần đúng đặc trưng của môi trường dưới dạng tổ hợp tuyến tính trong đó α và β là các thông số được chọn sao cho đảm bảo độ chính xác và sự ổn định nghiệm. Với $\beta = 0.5$, $\alpha = 1/6$ (2.1) và (2.3) trở về dạng Wilson θ, khi $\theta = 1$. Với $\beta = 0.5$, $\alpha = 0.25$ ta có luật tích phân Simson. Biểu thức (2.2) viết cho gia số chuyển vị, khác với phương pháp Newmark biểu diễn dưới dạng chuyển vị toàn phần tại $t + \Delta t$. Sự khác biệt này chỉ để tiện biểu diễn hệ (1.18), làm gọn và giảm bớt số lượng các phép tính khi tích phân trực tiếp từng bước hệ phương trình gia số chuyển vị. Vì vậy (2.1) và (2.2) tuân theo các tiêu chuẩn ổn định nghiệm mà Newmark đã chỉ ra, nghĩa là với $\beta \geqslant 0.5$ và $\alpha \geqslant 0.25(0.5 + \beta)^2$. Từ (2.1), (2.2) viết được gia tốc và vận tốc tại $t + \Delta t$ theo gia số chuyển vị

$$ {}^{t+\Delta t}\ddot{U} = {}^{t+\Delta t}\ddot{U}({}^{\Delta t}\Delta U), \quad {}^{t+\Delta t}\dot{U} = {}^{t+\Delta t}\dot{U}({}^{\Delta t}\Delta U), \tag{2.3), (2.4} $$

và đưa (1.18) về dạng hệ phương trình đại số

$$ {}_t\widehat{K}\,{}^{\Delta t}\Delta U = {}^{t+\Delta t}\widehat{R}, \tag{2.5} $$

trong đó ${}_t\widehat{K}$ và ${}^{t+\Delta t}\widehat{R}$ tương ứng là ma trận cứng qui đổi và vector tải trọng nút qui đổi.

Từ các kết quả nhận được có thể viết thuật toán giải bài toán động lực của hệ đàn dẻo biến dạng chuyển vị lớn trong mô tả Lagrange không dừng. Vì sự liên quan chặt chẽ giữa hai phương pháp Wilson θ và Newmark và do đó, hai dạng cải biến của chúng, có thể kết hợp cả hai phương pháp tích phân phương trình chuyển động trong cùng một thuật toán có dạng phân nhánh.

A – TÍNH TOÁN BAN ĐẦU

a) Tính các ma trận tuyến tính ${}_0^0K^*$, khối lượng M, cản D. Định các giá trị đầu ${}^0U$, ${}^0\dot{U}$, ${}^0\ddot{U}$.

b) Tính các hằng số

Trường hợp bài toán tĩnh, $\theta = 1$, nhảy tới B.

Nếu dùng Wilson θ cải biến

$$ \theta = 1.4\ ;\ a_0 = 6/\theta^2\Delta t^2\ ;\ a_1 = 3/\theta\Delta t\ ;\ a_2 = 2a_1\ ;\ a_3 = 2\ ;\ a_4 = a_3\ ; $$

$$ a_5 = \theta\Delta t/2\ ;\ a_6 = a_0/\theta\ ;\ a_7 = -a_2/\theta\ ;\ a_8 = 1 - 3/\theta\ ;\ a_9 = \Delta t/2\ ;\ a_{10} = \Delta t^2/6. $$

Nếu dùng Newmark cải biến

$$ \theta = 1\ ;\ \beta \geqslant 0.5\ ;\ \alpha \geqslant 0.25(0.5 + \beta)^2;\ a_0 = 1/\alpha\Delta t^2\ ; $$

$$ a_1 = \beta/\alpha\Delta t\ ;\ a_2 = 1/\alpha\Delta t\ ;\ a_3 = 1/2\alpha - 1\ ;\ a_4 = \beta/\alpha - 1\ ; $$

$$ a_5 = \Delta t(\beta/\alpha - 2)/2\ ;\ a_6 = \Delta t(1 - \beta)\ ;\ a_7 = \beta\Delta t. $$

c) Tính ma trận hệ số ban đầu qui đổi ${}_0^0\widehat{K} = {}_0^0K^* + a_0M + a_1D$

B. TÍNH TOÁN CHO MỖI BƯỚC ΔT LIÊN TIẾP

a) Nếu cần, lập ma trận hệ số mới, kể đến hiệu ứng phi tuyến hình học và/hoặc vật lý. Tam giác hóa

$$ \widehat{K} = {}_t^tK^* + {}_t^tK^{**}\ ;\quad \widehat{K} = LDL^T. $$

b) Tính vector lực tác dụng qui đổi

$$ {}^{t+\theta\Delta t}\widehat{R} = {}^tR + \theta({}^{t+\Delta t}R - {}^tR) - {}_t^tF + M(a_2{}^t\dot{U} + a_3{}^t\ddot{U}) + D(a_4{}^t\dot{U} + a_5{}^t\ddot{U}), $$

c) Giải hệ phương trình tìm gia số chuyển vị ${}^{\theta\Delta t}\Delta U$

$$ LDL^T\,{}^{\theta\Delta t}\Delta U = {}^{t+\Delta t}\widehat{R} $$

Để so sánh đối xử của bản, xét với 2 điểm dẻo ban đầu $\sigma_0^1 = 5 \times 10^4 KG/cm^2$ và $\sigma_0^2 = 6 \times 10^4 KG/cm^2$. Dao động thẳng đứng $U_3(t)$ tại điểm đặt tải thuộc mặt trên của bản được giải bằng phương pháp Newmark cải biên với $\beta = 0,5$ và $\alpha = 0,25$ cho các trường hợp tải trọng tác dụng tĩnh, động lực tuyến tính, phi tuyến hình học, phi tuyến vật lý và kết hợp phi tuyến hình học và vật lý (lý thuyết chảy dẻo Prandtl-Reuss, mặt dẻo Huber-Mises) trong các mô tả Lagrange dừng và không dừng (11 trường hợp). Từ các kết quả trình bày trên Hình 4 thấy rằng ảnh hưởng phi tuyến hình học trong trường hợp mô hình vật liệu đàn hồi không lớn so với phi tuyến vật lý. Với biên độ chuyển vị nhỏ, kết quả nhận được cho 2 trường hợp mô tả Lagrange dừng và không dừng gần như trùng nhau. Khi xét bài toán trong mô hình vật liệu đàn dẻo với giả thiết các điểm dẻo ban đầu khác nhau, ảnh hưởng của phi tuyến hình học trở nên đáng kể. Sự tăng của biên độ chuyển vị và biến dạng kéo theo sự khác biệt rõ rệt của các mô tả Lagrange dừng và không dừng, trong đó mô tả không dừng cho các trị số nhỏ hơn khoảng 5 – 9%.

§ 4. KẾT LUẬN

So sánh hai mô tả Lagrange dừng và không dừng, nhận thấy sự khác nhau cơ bản giữa chúng là cấu hình cơ sở được chọn. Để xác định cấu hình tại $t + \Delta t$, mô tả Lagrange dừng hướng tới cấu hình ban đầu tại $t = 0$, trong lúc mô tả không dừng chọn cấu hình cơ sở vừa xác định trong bước thời gian ngay trước đó, nghĩa là tại thời điểm t. Từ góc độ tính toán số, mô tả Lagrange dừng phức tạp hơn vì kể đến ảnh hưởng của chuyển vị ban đầu trong thành phần tuyến tính của gia số tensor biến dạng Green, nên ma trận cứng đòi hỏi nhiều thời gian tính hơn. Tuy vậy trong mô tả Lagrange dừng, hàm nội suy cùng các đạo hàm và tích phân của chúng chỉ phải tính một lần và dùng cho tất cả các cấu hình tiếp sau. Vì tính bất biến của tensor ứng suất Piola Kirchhoff loại hai và tensor biến dạng Green khi vật thể chuyển động như vật cứng tuyệt đối, trong trường hợp bài toán có chuyển vị lớn và biến dạng nhỏ, các thành phần Cartesian của tensor ứng suất Piola Kirchhoff loại hai xấp xỉ bằng các thành phần vật lý của tensor ứng suất Cauchy, do đó kết quả nhận được với hai mô tả có thể xem là trùng nhau. Tuy vậy nếu xét đến lịch sử quá trình đặt tải và quá trình biến dạng lớn, cần lưu ý đến quan hệ giữa các gia số ứng suất và biến dạng, biểu diễn C_{ijkm} của mô tả Lagrange dừng trong phần lớn trường hợp khó hơn C_{ijkm} của mô tả Lagrange không dừng. Mô tả dừng chỉ thích hợp với các bài toán phi tuyến biến dạng nhỏ trong lúc mô tả không dừng cho kết quả chính xác hơn trong trường hợp biến dạng lớn, nhất là khi dùng phương trình vận tốc ứng suất Jaumann [1] để tính các thành phần của tensor ứng suất Cauchy. Như vậy việc chọn mô tả dừng hay không dừng trong mô hình PTHH phụ thuộc chủ yếu vào hai nhân tố: quan hệ ứng suất biến dạng và hiệu quả số. Để tăng hiệu quả số, trong phần I [1] và phần II đề nghị dùng hai dạng cải biên của các phương pháp tích phân số Wilson θ và Newmark. Không có sự phát triển về mặt toán học, việc chuyển cách biểu diễn dưới dạng gia số nhằm làm gọn nhẹ các tính toán số. Do phải tính toán hàng trăm bước thời gian và có thể phải dùng phép lặp cân bằng trong một số bước, hai dạng cải biên nêu trên có thể tiết kiệm được 12 – 15% thời gian tính.

Địa chỉ
Viện Cơ học Viện KHVN

Nhận ngày 8/10/1986

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. BATHE K. J. Finite element procedures in engineering analysis, Prentice Hall Inc., New Yersey, 1982
2. YAGHMAI S. Incremental analysis of large deformations in mechanics of solids with applications to axisymmetric shells of revolution, SESM Rep., №69-17, Dep Civ. Eng.,

(Xem tiếp trang 92)