Tạp chí Cơ học T.X, 1988 Số 1 (trang 28 — 33)

VA CHẠM CỦA VẬT RẮN VÀO THANH BÁN VÔ HẠN

NGUYỄN ĐĂNG TỘ

§. ĐẶT VẤN ĐỀ

Đối với bài toán va chạm có đệm giảm chấn giữa vật rắn và thanh đàn hồi cũng như giữa thanh đàn hồi với nhau đã được một số tác giả nghiên cứu [1], [2], [7],... Song mới chỉ dừng lại ở việc sử dụng lý thuyết cổ điển về dao động dọc của thanh.

Trong bài báo này, tác giả nghiên cứu bài toán va chạm có đệm giảm chấn giữa vật rắn và thanh đàn hồi bán vô hạn trên cơ sở dựa vào lý thuyết về dao động dọc của thanh chính xác hơn tức là có kể đến quán tính của dịch chuyển ngang.

§1. PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG

Thiết lập phương trình chuyển động của thanh, khi có kể đến năng lượng tương ứng với dịch chuyển theo phương bán kính, A. Love [5] đã đưa đến phương trình sau

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu^2 R^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \; ; \; a = \sqrt{E/\rho} \tag{1.1}$$

trong đó : $u(x, t)$ — dịch chuyển dọc theo trục của thanh.

R — bán kính quán tính của thiết diện ngang đối với khối tâm của nó.

μ — hệ số Poatxông.

Theo [3], lúc này mối liên hệ giữa ứng suất và biến dạng là :

$$\sigma_x = \rho(\mu R)^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} + E \frac{\partial u}{\partial x} \tag{1.2}$$

và dịch chuyển theo phương bán kính là :

$$u_r = -\mu r \frac{\partial u}{\partial x} \tag{1.3}$$

§2. TRUYỀN SÓNG TRONG THANH ĐÀN HỒI BÁN VÔ HẠN

Xét bài toán : tìm $u(x, t)$ thỏa mãn phương trình :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu^2 R^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \; ; \; t > 0, \; 0 < x < +\infty. \tag{2.1}$$

Điều kiện đầu : $u = 0, \; \dot{u} = 0$ khi $t = 0$ (2.2)

Điều kiện biên :

$$\sigma_x = \rho(\mu R)^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} + E \frac{\partial u}{\partial x} = -f(t), \text{ khi } x = 0 \; ; \; t > 0 \tag{2.3}$$

Dùng phép biến đổi Laplat :

$$u_o(p, x) = \int_0^\infty u(x, t)e^{-pt}dt \tag{2.4}$$

đưa đến bài toán : tìm $u_o(p, x)$ thỏa mãn phương trình :

$$\frac{d^2u_o}{dx^2} - \frac{p^2}{a^2 + \mu^2R^2p^2} \cdot u_o = 0 ; \quad \text{khi } x > 0 \tag{2.5}$$

với điều kiện :
$$\frac{du_o}{dx} = -\frac{a^2}{E} \frac{f_o(p)}{a^2 + \mu^2R^2p^2} \quad \text{khi } x = 0 \tag{2.6}$$

và $u_o(p, x)$ giới nội khi $x \to +\infty$

Giải ra, ta thu được :

$$u_o(p, x) = \frac{a}{E} f_o(p) \frac{1}{p\sqrt{1 + c^2p^2}} e^{-\frac{p}{\sqrt{1+c^2p^2}} \cdot \frac{x}{a}} \tag{2.7}$$

trong đó : $c = \mu R/a = \text{const}$

Để tìm hàm ban đầu $U(x, t)$, ta viết $U_o(p, x)$ dưới dạng :

$$U_o(p, x) = \frac{a}{E} \frac{f_o(p)}{p} \cdot \frac{1}{p} \frac{1}{\sqrt{(1/p)^2 + c^2}} \exp\left(\frac{-1}{\sqrt{(1/p)^2 + c^2}} \cdot \frac{x}{a}\right) =$$

$$= \frac{a}{E} \frac{f_o(p)}{p} \cdot \frac{1}{p} G\left(\frac{1}{p}, x\right) \tag{2.8}$$

trong đó

$$G(p, x) = \frac{1}{\sqrt{p^2 + c^2}} \exp\left(\frac{-1}{\sqrt{p^2 + c^2}} \cdot \frac{x}{a}\right) = H(r, x) \tag{2.9}$$

với $r = \sqrt{p^2 + c^2}$

và :
$$H(p, x) = \frac{1}{p} \exp\left(-\frac{1}{p} \cdot \frac{x}{a}\right) \tag{2.10}$$

Theo [1] hoặc dùng định lý khai triển thông thường

Ta có :
$$H(p, x) \div J_o\left(2\sqrt{\frac{x}{a} t}\right) \tag{2.11}$$

từ đó :

$$G(p, x) = H(r, x) \div J_o\left(2\sqrt{\frac{x}{a} t}\right) - C\int_0^t J_o\left[2\sqrt[4]{\frac{x^2}{a^2}(t^2 - u^2)}\right] J_1(cu)du \tag{2.12}$$

do vậy

$$\frac{1}{p} G\left(\frac{1}{p}, x\right) \div q(x, t) = \int_0^\infty J_o(2\sqrt{ut}) \Big\{ J_o\left(2\sqrt{\frac{x}{a} u}\right) -$$

$$- C\int_0^u J_o\left[2\sqrt[4]{\frac{x^2}{a^2}(u^2 - \xi^2)}\right] J_1(C\xi)d\xi \Big\} du \tag{2.13}$$

Từ (2.8), ta sẽ thu được hàm ban đầu là nghiệm của bài toán.

$$u_o(p, x) \div u(x, t) = \frac{a}{E} \int_0^t \left[\int_0^{t-\tau} f(\omega)d\omega \right] q(x, \tau)d\tau \tag{2.14}$$

TRƯỜNG HỢP RIÊNG : khi $C = 0$, từ (2.13) ta có :

$$q(x, t) = \int_0^\infty J_0(2\sqrt{ut}) \cdot J_0\left(2\sqrt{\frac{x}{a}u}\right)du = \delta\left(t - \frac{x}{a}\right)$$

và

$$u(x, t) = \int_0^{t - \frac{x}{a}} f(\omega)d\omega \tag{2.15}$$

Kết quả này trùng hợp với kết quả trước đây khi sử dụng phương trình của lý thuyết cổ điển.

BIỂU DIỄN NGHIỆM DƯỚI DẠNG CHUỖI :

Bằng cách khai triển hàm Betxen và thực hiện một số phép biến đổi, ta thu được:

$$\psi(x, u) = \int_0^u J_0\left[2\sqrt[4]{\frac{x^2}{a^2}(u^2 - \xi^2)}\right]J_1(C\xi)d\xi = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{x}{a}\right)^k(z_k u). \tag{2.16}$$

trong đó :

$$z_k(u) = \int_0^u (u^2 - \xi^2)^{k/2}J_1(C\xi) = \frac{1}{C}u^k - \frac{1}{C}\left(\frac{2u}{C}\right)^{k/2}\Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right)J_{k/2}(Cu) \tag{2.17}$$

Thay (2.16), (2.17) vào (2.13) và tiếp tục biến đổi, ta thu được:

$$q(x, \tau) = \frac{1}{C}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{2}{ac}\right)^k \frac{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\Pi}} x^k \cdot q_k(\tau) \tag{2.18}$$

trong đó :

$$q_k(\tau) = {}_1F_2\left[\frac{k+1}{2}; \frac{1}{2}; 1; -\left(\frac{\tau}{2C}\right)^2\right] =$$

$$= 1 + \sum_{j=1}^\infty \frac{(-1)^j}{j!} \frac{(k+1)(k+3)\dots(k+2j-1)}{2j!2^j}\left(\frac{\tau}{C}\right)^{2j} \tag{2.19}$$

Đặt :
$$A_k = \frac{a}{CE}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{2}{ac}\right)^k \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k+1}{1}\right)}{\sqrt{\Pi}}$$

Ta có :

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^\infty A_k x^k \int_0^t \left[\int_0^{t-\tau} f(\omega)d\omega\right]q_k(\tau)d\tau \tag{2.20}$$

Có thể thử lại nghiệm (2.20) thỏa mãn (2.1), (2.2), (2.3),

Sau đây ta chứng minh tính duy nhất nghiệm của bài toán (2.1), (2.2), (2.3)

Giả sử : tồn tại 2 nghiệm $(u_1(x, t), u_2(x, t))$, khi đó :
$v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ thỏa mãn phương trình :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \mu^2 R^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{2.21}$$

Điều kiện đầu : $v(x, o) = 0, \dot{v}(x, o) = 0$ (2.22)

Điều kiện biên :

$$\left[\rho(\mu R)^2 \frac{\partial^3 v}{\partial t^2 \partial x} + E \frac{\partial v}{\partial x}\right]\Big|_{x=0} = 0 \tag{2.23}$$

Ta sẽ chứng minh : $v(x, t) \equiv 0$

Xét hàm : $$E_L(t) = \frac{1}{2} F \int_0^L \left[\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \rho\mu^2 R^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t}\right)^2 + E\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right] dx. \tag{2.24}$$

với L lớn tùy ý

Lấy đạo hàm theo thời gian (2.24), lấy tích phân từng phần, sử dụng (2.21), (2.22), (2.23) ta thu được

$$\frac{dE_L(t)}{dt} = F\left[\frac{\partial v}{\partial t}\left(\rho\mu^2 R^2 \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} + E\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]\Big|_{x=L}$$

Cho $L \to \infty$, nếu bổ sung thêm điều kiện : nghiệm $u(x, t)$ của bài toán (2.1), (2.2), (2.3) thỏa mãn

$$\lim_{x \to \infty} u(x, t) = 0$$

ta có :

$$\frac{dE(t)}{dt} = \lim_{L \to \infty} \frac{dE_L(t)}{dt} = 0$$

từ đó $E(t) = \text{const} = E(o) = 0$.

$E(t) \equiv 0 \Leftrightarrow v(x, t) \equiv 0$. điều phải chứng minh

§ 3. VA CHẠM CỦA VẬT RẮN VÀO THANH BÁN VÔ HẠN

Xét sự va chạm của vật rắn vào thanh đàn hồi bán vô hạn khi có đặt đệm giảm chấn ở đầu thanh

Theo [2], [7], ứng suất ở đầu thanh $f(t)$ thỏa mãn phương trình và các điều kiện đầu :

$$\ddot{f}(t) + \frac{k}{M} f(t) + \frac{k}{F} \ddot{u}(0, t) = 0 \tag{3.1}$$

$$f(o) = 0 \tag{3.2}$$

$$\dot{f}(o) = \frac{k}{F} V_o \tag{3.3}$$

M — khối lượng vật rắn
k — độ cứng đệm
V_o — vận tốc của vật rắn lúc bắt đầu chạm vào đệm.

Từ (2.20) ta xác định được $\ddot{u}(o, t)$, đạo hàm 2 lần theo thời gian và biến đổi, ta thu được $\ddot{u}(o, t)$, sau đó thay vào (3.1) ta được phương trình xác định $f(t)$ như sau :

$$\ddot{f}(t) + k\left(\frac{1}{M} + \frac{a}{EFC}\right) f(t) - \frac{ka}{EFC^2} \int_0^t J_1\left(\frac{t-\tau}{c}\right) f(\tau) d\tau = 0 \tag{3.4}$$

Phương trình (3.4) và các điều kiện (3.2), (3.3) tương đương với phương trình Vonter sau:

$$f(t) + \int_0^t \Phi(t-\tau) f(\tau) d\tau = \frac{k}{F} V_o t \tag{3.5}$$

trong đó:

$$\Phi(t-\tau) = \frac{k}{M}(t-\tau) + \frac{ka}{EF} \int_0^{\frac{t-\tau}{c}} J_o(\omega) d\omega \tag{3.6}$$

Thật vậy: đạo hàm theo t (3.5) và biến đổi, ta thu được (3.4). Để giải (3.5), ta dùng phép biến đổi Laplat:

Đặt:

$$f_o(p) \div f(t)$$

$$\Phi_o(p) \div \Phi(t) = \frac{k}{M} t + \frac{ka}{EF} \int_0^{t/c} J_o(\omega) d\omega \tag{3.7}$$

Khi đó (3.5) sẽ đưa đến phương trình:

$$f_o(p) + \Phi_o(p) \cdot f_o(p) = \frac{kV_o}{F} \frac{1}{p^2}$$

Từ đó:

$$f_o(p) = \frac{kV_o}{F} \Big/ \{ p^2 [1 + \Phi_o(p)] \}. \tag{3.8}$$

ừ (3.7) ta có:

$$\Phi_o(p) = \frac{k}{M} \frac{1}{p^2} + \frac{ka}{EF} \frac{1}{p\sqrt{c^2p^2+1}}. \tag{3.9}$$

Thay (3.9) vào (3.8) ta thu được:

$$f_o(p) = \frac{A\sqrt{p^2+\alpha^2}}{(p^2+B^2)\sqrt{p^2+\alpha^2} + Cp} \tag{3.10}$$

trong đó

$$A = \frac{kV_o}{F}; \quad B^2 = \frac{k}{M}; \quad C = \frac{ka}{EFC}, \quad \alpha = \frac{1}{c}$$

Để tìm hàm ban đầu $f(t)$, ta viết:

$$f_o(p) = F_1(p) + F_2(p)$$

Trong đó:

$$F_1(p) = \frac{A(p^2+B^2)(p^2+\alpha^2)}{(p^2+B^2)^2(p^2+\alpha^2) - C_r^2 2} = \frac{M(p)}{Q(p)} \tag{3.11}$$

Gọi $p_1, p_2 \ldots p_l$ là không điểm khác nhau của $Q(p)$ m là số bội của không điểm p_k: $(m_1 + m_2 + \ldots + m_l = 6)$ ta có: theo [6].

$$F_1(p) \div f_1(t) = \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{(m_k-1)!} \frac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}} \left\{ \frac{M(p)}{Q(p)} e^{pt} (p-p_k)^{m_k} \right\} \Bigg|_{p=p_k}. \tag{3.12}$$

$$F_2(p) = -\frac{ACp(p^2+\alpha^2)}{(p^2+B^2)^2(p^2+\alpha^2) - Cp^2} \frac{1}{\sqrt{p^2+\alpha^2}} = \frac{N(p)}{Q(p)} \frac{1}{\sqrt{p^2+\alpha^2}} \tag{3.13}$$

Tương tự như trên ta có:

$$\frac{N(p)}{Q(p)} \div g(t) = \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{(m_k-1)!} \frac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}} \left\{ \frac{N(p)}{Q(p)} e^{pt}(p-p_k)^{m_k} \right\}\Big|_{p=p_k} . \quad (3.14)$$

$$\frac{1}{\sqrt{p^2+\alpha^2}} \div J_o(\alpha, t)$$

Từ đó: $$F_2(p) \div f_2(t) = \int_0^t g(t-\tau) J_o(\alpha\tau) d\tau \quad (3.15)$$

Tóm lại: ta thu được nghiệm của (3.5) là:

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

với $f_1(t)$, $f_2(t)$ xác định từ (3.12) và (3.15)

Thay $f(t)$ vừa tìm được vào (2.14) ta xác định dịch chuyển dọc trục, từ (1.2) và (1.3) ta xác định được ứng suất biến dạng và dịch chuyển theo phương bán kính của mọi thiết diện trong thanh.

KẾT LUẬN

Bài toán va chạm của vật rắn vào thanh đàn hồi bán vô hạn có đặt đệm giảm chấn, trên cơ sở dựa vào lý thuyết của LOVE đã được giải quyết trọn vẹn.

Cuối cùng, tác giả xin chân thành cám ơn Giáo sư 1 Phạm Huyễn, Giáo sư 1 Nguyễn Thúc An đã thiết lập bài toán và hướng dẫn để hoàn thành bài báo này.

Địa chỉ:
Trường đại học Thủy lợi

Nhận ngày 5 5-1987

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. БЕЙТМЕН Г. и ЭРДЕЙМ А. Таблицы интегральных преобразований Том I Наука, М, 1969.
2. БИДЕРМАН В. Л. Теория удара. М., 1952.
3. ГРИГОЛЮК Э И. СЕЛЕЗОВ И. Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. Механика твердых деформируемых тел. Т. 5, М, 1973.
4. КИЛЬЧЕВСКИЙ Н А Теория соударений твердых тел Киев. 1969.
5. ЛЯВ А. Математическая теория упругости. Изд НКТП СССР. М. 1935.
6. СИДОРОВ Ю.В., ФЕДОРЮК М. В., ШАБУНИН М И Лекции по теории функций комплексного переменного Наука, М., 1982.
7. NGUYỄN THÚC AN, VŨ VĂN NGUYÊN. Va chạm dọc của thanh đàn hồi. Tạp chí Cơ học, № 1, 1983.

SUMMARY

IMPACT OF A RIGID BODY AGAINST A HALF-INFINITE ELASTIC BAR

The solution of the impact — problems of a rigid body against an elastic bar are before based on the classical longitudinal vibration theory of elastic bar.

In this paper, we are using a more precise theory to deal with the impact problem of a rigid body against a half — infinite elastic bar with an elastic gasket. This problem is solved completely.