Tạp chí Cơ học T.X, 1988 số 1 (trang 8 – 16)

ỔN ĐỊNH CỦA VỎ MỎNG CHỊU TẢI PHỨC TẠP

ĐÀO VĂN DŨNG

Bài toán ổn định của vỏ mỏng đàn hồi và đàn – dẻo đã được nhiều tác giả nghiên cứu chẳng hạn [1, 2, 3, 4]. Trong bài này sử dụng hệ phương trình tổng quát mô tả trong [5] giải bài toán vỏ trụ mỏng chịu tác dụng tổ hợp các lực (áp lực ngoài, nén dọc trục, chịu xoắn ở hai đầu). Đưa ra được phương pháp giải trong trường hợp chung, các trường hợp riêng tìm được giá trị của lực tới hạn dưới dạng tường minh.

§1. HỆ PHƯƠNG TRÌNH RẼ NHÁNH ĐỒNG CHỦ ĐỘNG ĐỐI VỚI VỎ TRỤ

Xét vỏ trụ mỏng bán kính R, chiều dày h và độ dài L, đặt trong hệ tọa độ $(x, y = R\theta, z)$ với trục x trùng với đường sinh của trụ ; trục z vuông góc với mặt giữa. Bài toán ổn định rẽ nhánh đồng chủ động của vỏ mỏng dẫn đến xác định hai hàm φ và ΔW, thỏa mãn các điều kiện biên đã cho cùng với hệ phương trình sau đây [5]

$$\nabla^4\varphi + \frac{3}{4}\left(\frac{G_S^0}{\Phi_0'} - 1\right)\left[\frac{2\sigma_{xx}^0 - \sigma_{yy}^0}{\sigma_u^{0\,2}}\frac{\partial^2\pi(S^0, \Delta S)}{\partial y^2} + \frac{2\sigma_{yy}^0 - \sigma_{xx}^0}{\sigma_u^{0\,2}}\frac{\partial^2\pi(S^0, \Delta S)}{\partial x^2}\right] -$$

$$- \frac{9}{4}\left(\frac{G_S^0}{\Phi_0'} - 1\right)\frac{\sigma_{xy}^0}{\sigma_u^{0\,2}}\frac{\partial^2\pi(S^0, \Delta S)}{\partial x\partial y} = -\frac{G_S^0}{R}\frac{\partial^2\Delta W}{\partial x^2}, \qquad (1.1)$$

$$\left[\delta_{ik}\delta_{jm} - \frac{3}{4}\left(1 - \frac{\Phi_0'}{G_S^0}\right)\frac{\sigma_{km}^0\sigma_{ij}^0}{\sigma_u^{0\,2}}\right]\Delta W_{,ijkm} - \frac{9}{h^2G_S^0}\left(\sigma_{ij}^0\Delta W_{,ij} + \frac{1}{R}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right) = 0\ ;$$

$$i, j, k, m = 1, 2\ ; \qquad (1.2)$$

trong đó $G_S^0 = \sigma_u^0 k_0$; $\pi(S^0, \Delta S) = S_{mn}^0\Delta S_{mn}$; m, n = 1, 2, 3. Còn các đại lượng S_{mn}^0, σ_u^0, S^0 là các thành phần tenxơ lệch ứng suất, cường độ ứng suất, độ dài cung ; Φ_0', k_0 là các hàm đặc trưng cho tính chất vật liệu. Các đại lượng này (được kí hiệu bởi chỉ số ( )) đặc trưng cho trạng thái xuất phát.

§2. PHƯƠNG PHÁP XÁC ĐỊNH LỰC TỚI HẠN

Phương pháp chung để giải bài toán là chọn nghiệm, sao cho ΔW và φ thỏa mãn điều kiện biên động học, sau đó thay vào các phương trình trên và từ điều kiện không tầm thường của nghiệm suy ra phương trình xác định lực. Giá trị nhỏ nhất của nó chính là lực tới hạn cần tìm. Thông thường vỏ chịu các ràng buộc sau : tựa tự do, tựa bản lề hoặc ngàm ; do vậy dạng nghiệm được chọn ứng với mỗi loại ràng buộc này. Giả thiết xét trụ mỏng tựa bản lề tại x = 0 và x = L, chịu tác dụng của tổ hợp các lực ngoài, khi đó

$$\sigma_{xx}^0 = -P_{xx}\ ;\ \sigma_{yy}^0 = -P_{yy}\ ;\ \sigma_{xy}^0 = -P_{xy}$$

Phương trình (1.1), (1.2) có dạng

$$\alpha_1\frac{\partial^4\Delta W}{\partial x^4}+\alpha_2\frac{\partial^4\Delta W}{\partial x^3\partial y}+\alpha_3\frac{\partial^4\Delta W}{\partial x^2\partial y^2}+\alpha_4\frac{\partial^4\Delta W}{\partial x\partial y^3}+\alpha_5\frac{\partial^4\Delta W}{\partial y^4}+$$

$$+\frac{9}{h^2G_S^o}\left(P_{xx}\frac{\partial^2\Delta W}{\partial x^2}+2P_{xy}\frac{\partial^2\Delta W}{\partial x\partial y}+P_{yy}\frac{\partial^2\Delta W}{\partial y^2}-\frac{1}{R}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)=0. \qquad (2.1)$$

$$\beta_1\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}+\beta_2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^3\partial y}+\beta_3\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}+\beta_4\frac{\partial^4\varphi}{\partial x\partial y^3}+\beta_5\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}+\frac{G_S^o}{R}\frac{\partial^2\Delta W}{\partial x^2}=0 \qquad (2.2)$$

trong đó

$$\alpha_1=1-\frac{3}{4}\left(1-\frac{\Phi_o'}{G_S^o}\right)\frac{\sigma_{xy}^{o2}}{\sigma_u^{o2}}\ ;\ \alpha_2=-3\left(1-\frac{\Phi_o'}{G_S^o}\right)\frac{\sigma_{xy}^o\sigma_{xx}^o}{\sigma_u^{o2}}\ ;$$

$$\alpha_3=2-3\left(1-\frac{\Phi_o'}{G_S^o}\right)\frac{\sigma_{xy}^{o2}}{\sigma_u^{o2}}-\frac{3}{2}\left(1-\frac{\Phi_o'}{G_S^o}\right)\frac{\sigma_{xx}^o\sigma_{yy}^o}{\sigma_u^{o2}}\ ;$$

$$\alpha_4=-3\left(1-\frac{\Phi_o'}{G_S^o}\right)\frac{\sigma_{xy}^o\sigma_{yy}^o}{\sigma_u^{o2}}\ ;\ \alpha_5=1-\frac{3}{4}\left(1-\frac{\Phi_o'}{G_S^o}\right)\frac{\sigma_{yy}^{o2}}{\sigma_u^{o2}}\ ;$$

$$\beta_1=1+\frac{1}{4}\left(\frac{G_S^o}{\Phi_o'}-1\right)\left(\frac{2\sigma_{yy}^o-\sigma_{xx}^o}{\sigma_u^o}\right)^2\ ;\ \beta_2=-3\left(\frac{G_S^o}{\Phi_o'}-1\right)\frac{\sigma_{xy}^o(2\sigma_{yy}^o-\sigma_{xx}^o)}{\sigma_u^{o2}}\ ;$$

$$\beta_3=2+\frac{1}{2}\left(\frac{G_S^o}{\Phi_o'}-1\right)\frac{(2\sigma_{xx}^o-\sigma_{yy}^o)(2\sigma_{yy}^o-\sigma_{xx}^o)}{\sigma_u^{o2}}+9\left(\frac{G_S^o}{\Phi_o'}-1\right)\left(\frac{\sigma_{xy}^o}{\sigma_u^o}\right)^2\ ;$$

$$\beta_4=-3\left(\frac{G_S^o}{\Phi_o'}-1\right)\frac{\sigma_{xy}^o(2\sigma_{xx}^o-\sigma_{yy}^o)}{\sigma_u^{o2}}\ ;\ \beta_5=1+\frac{1}{4}\left(\frac{G_S^o}{\Phi_o'}-1\right)\left(\frac{2\sigma_{xx}^o-\sigma_{yy}^o}{\sigma_u^o}\right)^2. \qquad (2.3)$$

Tìm nghiệm ΔW dưới dạng $\Delta W=A\sin\left(\frac{m\pi x}{L}-\frac{ny}{R}\right)$ trong đó m và n là số nửa sóng theo hướng trục và hướng vòng của trụ. Dễ thấy rằng cách tìm nghiệm như vậy sẽ thỏa mãn điều kiện tựa bản lề theo nghĩa tích phân, tức là :

$$\int_0^{2\pi R}\Delta W\big|_{x=0,L}dy=0\ ;\ \int_0^{2\pi R}\Delta M_{xx}\big|_{x=0,L}dy=0.$$

Thay ΔW vào (2.2) ta thu được phương trình xác định φ.
Nghiệm riêng của phương trình này

$$\varphi=B\sin\left(\frac{m\pi x}{L}-\frac{ny}{R}\right) \qquad (2.4)$$

trong đó

$$B=\frac{G_S^oA}{R}\left[\beta_1\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2+\beta_2\frac{m\pi}{L}\frac{n}{R}+\beta_3\left(\frac{n}{R}\right)^2+\beta_4\frac{L}{m\pi}\left(\frac{n}{R}\right)^3+\beta_5\left(\frac{Ln^2}{m\pi R^2}\right)^2\right]^{-1}.$$

Thay ΔW và φ vào (2.1) và từ điều kiện không tầm thường của nghiệm $\Delta W \neq 0$ (tức $A \neq 0$) ta có

$$P_{xx}\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + 2P_{xy}\frac{m\pi}{L}\frac{n}{R} + P_{yy}\left(\frac{n}{R}\right)^2 = G_s^o\left\{\frac{h^2}{9}\left[\alpha_1\left(\frac{m\pi}{L}\right)^4 + \right.\right.$$

$$+\alpha_2\left(\frac{m\pi}{L}\right)^3\frac{n}{R} + \alpha_3\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2\left(\frac{n}{R}\right)^2 + \alpha_4\frac{m\pi}{L}\left(\frac{n}{R}\right)^3 + \alpha_5\left(\frac{n}{R}\right)^4\right] +$$

$$\left. + \frac{\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2}{\beta_1\left(\frac{m\pi R}{L}\right)^2 + \beta_2\frac{m\pi R}{L}n + \beta_3 n^2 + \beta_4\frac{Ln^3}{m\pi R} + \beta_5\left(\frac{Ln^2}{m\pi R}\right)^2}\right\}. \quad (2.5)$$

Đây chính là phương trình xác định tổ hợp các lực phải tìm.

Lưu ý rằng α_t, β_t ; $t = \overline{1,5}$ là hàm của các σ_{ij}^o ; i, j = 1,2 (do vậy là hàm của P_{ij}), cho nên phương trình nhận được phi tuyến đối với tổ hợp các lực, việc tìm lực tới hạn trong trường hợp tổng quát gặp khó khăn. Sau đây xét một số trường hợp đơn giản: vỏ trụ chỉ chịu nén dọc đường sinh, vỏ trụ chỉ chịu áp lực ngoài hoặc chịu xoắn hai đầu và vỏ trụ chịu đồng thời lực nén và áp lực ngoài.

I. VỎ TRỤ NÉN DỌC ĐƯỜNG SINH [5]

Trường hợp này các thành phần lực là $P_{xx} = P$; $P_{xy} = P_{yy} = 0$, do vậy $\sigma_{xy}^o = \sigma_{yy}^o = 0$; $\sigma_{xx}^o = -P$; $\sigma_u^o = |\sigma_{xx}^o|$. Thay các giá trị này vào (2.3) nhận được

$$\alpha_1 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\frac{\Phi_o'}{G_s^o} ; \alpha_2 = \alpha_4 = 0 ; \alpha_3 = 2 ; \alpha_5 = 1 ;$$

$$\beta_1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\frac{G_s^o}{\Phi_o'} ; \beta_2 = \beta_4 = 0 ; \beta_3 = 3 - \frac{G_s^o}{\Phi_s'} ; \beta_5 = \frac{G_s^o}{\Phi_o'} .$$

Phương trình xác định áp lực (2.5) có dạng

$$P = G_s^o\left\{\frac{h^2}{9}\left[\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\frac{\Phi_o'}{G_s^o}\right)\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{n}{R}\right)^2 + \left(\frac{Ln^2}{m\pi R^2}\right)^2\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\frac{G_s^o}{\Phi_o'}\right)\left(\frac{m\pi R}{L}\right)^2 + \left(3 - \frac{G_s^o}{\Phi_o'}\right)n^2 + \frac{G_s^o}{\Phi_o'}\left(\frac{Ln^2}{m\pi R}\right)^2\right]^{-1}\right\} \quad (2.6)$$

Phương trình này đã được nghiên cứu trong [5], ta có áp lực tới hạn bằng

$$P_{min} = \frac{2}{3}\frac{G_s^o h}{R}\sqrt{\lambda}\left[\frac{\sqrt{1+3\lambda}+2}{\sqrt{1+3\lambda}+3\lambda-1}\right]^{1/2} ; \lambda = \frac{\Phi_o'}{G_s^o} . \quad (2.7$$

Trường hợp vỏ có độ dài trung bình, theo [1] $m = 1$, $\theta^2 \ll 1$, khi đó đặt $\widehat{P} = PR/Eh$; $\psi = n^2h/R$; $\theta = m\pi R/nL$.
Biểu thức (2.6) có dạng sau đây

$$\widehat{P} = \frac{G_s^o}{E}\left(\frac{\psi}{9}\frac{1}{\theta^2} + \frac{\Phi_o'}{G_s^o}\frac{\theta^2}{\psi}\right) = \frac{G_s^o}{E}\left(\frac{hL^2}{9\pi^2R^3}n^4 + \frac{\Phi_o'}{G_s^o}\frac{\pi^2R^3}{hL^2}\frac{1}{n^4}\right)$$

Sau khi tính cực trị, ta nhận được

$$\widehat{P}_{min} = \frac{2}{3E}\sqrt{G_s^o\Phi_o'} \tag{2.8}$$

và do vậy

$$P_{min} = \frac{2}{3}\sqrt{G_s^o\Phi_o'}\;\frac{h}{R} \tag{2.9}$$

2. VỎ TRỤ CHỊU ÁP LỰC NGOÀI

Giả thiết rằng trong quá trình vỏ trụ bị biến dạng, các điểm của hai mặt mút của nó chỉ chuyển dịch theo hướng kính và khung của trụ vẫn tròn. Do vậy các thành phần của lực là $P_{xx} = P_{xy} = 0$; $P_{yy} = \frac{qR}{h}$ và khi đó $\sigma_{xx}^o = \sigma_{xy}^o = 0$; $\sigma_{xy}^o = -\frac{qR}{h}$; $\sigma_u^o = |\sigma_{yy}^o|$. Từ (2.3) ta nhận được

$$\alpha_1 = 1\ ;\ \alpha_2 = \alpha_4 = 0\ ;\ \alpha_3 = 2\ ;\ \alpha_5 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\frac{\Phi_o'}{G_s^o};$$

$$\beta_1 = \frac{G_s^o}{\Phi_o'}\ ;\ \beta_2 = \beta_4 = 0\ ;\ \beta_3 = 3 - \frac{G_s^o}{\Phi_o'}\ ;\ \beta_5 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\frac{G_s^o}{\Phi_o'}.$$

Thay các giá trị này vào (2.5), ta được biểu thức xác định áp lực

$$q = G_s^o\left\{\frac{h^3}{9R}\left(\frac{R}{n}\right)^2\left[\left(\frac{m\pi}{L}\right)^4 + 2\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2\left(\frac{n}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\frac{\Phi_o'}{G_s^o}\right)\left(\frac{n}{R}\right)^4\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{h}{R}\left(\frac{m\pi R}{nL}\right)^2\left[\frac{G_s^o}{\Phi_o'}\left(\frac{m\pi R}{L}\right)^3 + \left(3 - \frac{G_s^o}{\Phi_o'}\right)n^2 + \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\frac{G_s^o}{\Phi_o'}\right)\left(\frac{Ln^2}{m\pi R}\right)^2\right]^{-1}\right\}. \tag{2.10}$$

Ký hiệu

$$\widehat{q} = \frac{q}{E}\left(\frac{R}{h}\right)^2;\quad \psi = \frac{n^2h}{R};\quad \theta = \frac{m\pi R}{nL}, \tag{2.11}$$

khi đó (2.10) có dạng

$$\widehat{q} = \frac{G_s^o}{E}\left\{\frac{\psi}{9}\left[\theta^4 + 2\theta^2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\frac{\Phi_o'}{G_s^o}\right)\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{\theta^4}{\psi\left[\frac{G_s^o}{\Phi_o'}\theta^4 + \left(3 - \frac{G_s^o}{\Phi_o'}\right)\theta^2 + \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\frac{G_s^o}{\Phi_o'}\right)\right]}\right\}. \tag{2.12}$$

Tìm cực trị biểu thức bên phải, ta nhận được lực tới hạn $\widehat{q}_{th}$. Trường hợp vỏ có độ dài trung bình, theo [1] $m = 1$ và $\theta^2 \ll 1$.

Khi đó

$$\widehat{q} = \frac{G_s^o}{E}\left[\frac{\psi}{9}\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\frac{\Phi_o'}{G_s^o}\right) + \frac{\theta^4}{\psi\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\frac{G_s^o}{\Phi_o'}\right)}\right] =$$

$$= \frac{G_s^o}{E}\left[\frac{h}{9R}\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\frac{\Phi_o'}{G_s^o}\right)n^2 + \frac{\pi^4R^5}{hL^4\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\frac{G_s^o}{\Phi_o'}\right)}\frac{1}{n^6}\right].$$

Sau khi tính cực trị, ta nhận được

$$\widehat{q}_{min} = \frac{G_s^o}{E}\frac{4}{3^{9/4}}\left(\frac{3\Phi_o^* + G_s^o}{4G_s^o}\right)^{1/2}\left(\frac{\Phi_o^*}{G_s^o}\right)^{1/4}\frac{\pi R}{L}\left(\frac{h}{R}\right)^{3/2} \quad (2.13)$$

Thay biểu thức của q ta nhận được áp lực ngoài tới hạn

$$q_{min} = \frac{4}{3^{9/4}} G_s^o \frac{\pi R}{L}\left(\frac{h}{R}\right)^{5/2}\left(\frac{3\Phi_o^* + G_s^o}{4G_s^o}\right)^{1/2}\left(\frac{\Phi_o^*}{G_s^o}\right)^{1/4} \quad (2.14)$$

Nhận xét:

a) Nếu vật thể đàn hồi, ta có $G_s^o = \Phi_o^* = E$ và $q_{min} = \frac{4\pi E}{3^{9/4}}\frac{R}{L}\left(\frac{h}{R}\right)^{5/2}$ trùng với lực tới hạn đàn hồi [1].

b) Nếu đặt tải đơn giản tức là $G_s^o = \sigma_u^o/\varepsilon_u^o = E_s$, $\Phi_o^* = \Phi_o(\varepsilon_u^o)$ thì

$$q_{min} = \frac{4}{3^{9/4}} E_s \frac{\pi R}{L}\left(\frac{h}{R}\right)^{5/2}\left(\frac{3\Phi_o + E_s}{4E_s}\right)^{1/2}\left(\frac{\Phi_o^*}{E_s}\right)^{1/4},$$

trùng với kết quả đã nêu trong [1, 6].

3. VỎ TRỤ CHỊU XOẮN Ở HAI ĐẦU MÚT

Vỏ trụ chịu xoắn tại hai đầu mút bằng cặp momen $M_k = 2\pi R^2 hS$, khi đó các thành phần lực có giá trị $P_{xx} = P_{yy} = 0$; $P_{xy} = S$; do vậy $\sigma_{xx}^o = \sigma_{yy}^o = 0$; $\sigma_{xy}^o = -S$. Các đại lượng α_i, β_i, $i = 1, 5$ được xác định từ (2.3)

$$\alpha_1 = 1;\ \alpha_2 = \alpha_4 = 0;\ \alpha_3 = 1 + \Phi_o^*/G_s^o;\ \alpha_5 = 1$$

$$\beta_1 = 1;\ \beta_2 = \beta_4 = 0;\ \beta_3 = 3\frac{G_s^o}{\Phi_o^*} - 1;\ \beta_5 = 1.$$

Phương trình (2.5) có dạng

$$S = \frac{G_s^o}{2}\frac{LR}{mn\pi}\left\{\frac{h^2}{9}\left[\left(\frac{m\pi}{L}\right)^4 + \left(1 + \frac{\Phi_o^*}{G_s^o}\right)\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2\left(\frac{n}{R}\right)^2 + \left(\frac{n}{R}\right)^4\right] + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2\left[\left(\frac{m\pi R}{L}\right)^2 + \left(3\frac{G_s^o}{\Phi_o^*} - 1\right)n^2 + \left(\frac{Ln^2}{m\pi R}\right)^2\right]^{-1}\right\}. \quad (2.15)$$

Đưa vào các biến không thứ nguyên

$$\widehat{S} = \frac{S}{E}\left(\frac{R}{h}\right),\quad \psi = \frac{\sqrt{h}\,n^2}{R},\quad \theta = \frac{m\pi R}{nL}$$

hệ thức (2.15) trở thành

$$\widehat{S} = \frac{G_s^o}{2E}\left\{\frac{\psi}{9}\left[\theta^3 + \left(1 + \frac{\Phi_o^*}{G_s^o}\right)\theta + \frac{1}{\theta}\right] + \frac{\theta^3}{\psi\left[\theta^4 + \left(3\frac{G_s^o}{\Phi_o^*} - 1\right)\theta^2 + 1\right]}\right\}$$

Tìm cực trị của vế phải, ta nhận được giá trị của lực tới hạn. Trong trường hợp vỏ trụ có độ dài trung bình, tức là $m = 1$ và $\theta^2 \ll 1$, khi đó:

$$\widehat{S} = \frac{G_s^o}{2E}\left(\frac{\psi}{9}\frac{1}{\theta} + \frac{\theta^3}{\psi}\right) = \frac{G_s^o}{2E}\left(\frac{hL}{9\pi R^2}n^3 + \frac{\pi^3 R^4}{hL^3}\frac{1}{n^5}\right). \quad (2.16)$$

Tìm cực trị của $\widehat{S}$ theo n, ta có

$$S_{min} = \frac{4\sqrt{\pi}}{\sqrt[8]{5^5 \cdot 3^{13}}} \frac{G_s^o}{E} \sqrt[4]{\frac{Rh}{L^2}}$$

Thay vào biểu thức của S, ta nhận được

$$S_{min} = \frac{4\sqrt{\pi}\, G_s^o}{\sqrt[8]{5^5 \cdot 3^{13}}} \cdot \frac{h}{R} \sqrt[4]{\frac{Rh}{L^2}} \tag{2.17}$$

Nhận xét :

a) Nếu vật thể đàn hồi, ta có $G_s^o = \Phi_o' = E$ và $S_{min} = \frac{4\sqrt{\pi}\, E}{\sqrt[8]{5^5 \cdot 3^{13}}} \cdot \frac{h}{R} \cdot \sqrt[4]{\frac{Rh}{L^2}}$, kết quả tương tự trong lý thuyết vỏ mỏng đàn hồi [1].

b) Nếu quá trình đặt tải đơn giản, tức là $G_s^o = E_s = \sigma_u^o \, \varepsilon_u^o$, $\Phi_o' = \Phi_o'(\varepsilon_u^o)$ ta có

$$S_{min} = \frac{4\sqrt{\pi}\, E_s}{\sqrt{5^5 \cdot 3^{13}}} \cdot \frac{h}{R} \sqrt[4]{\frac{Rh}{L^2}}$$

Kết quả tương tự đã cho trong [1].

4. VỎ TRỤ ĐỒNG THỜI CHỊU NÉN DỌC ĐƯỜNG SINH VÀ ÁP LỰC NGOÀI

Giả thiết rằng các lực này biến đổi, nhưng giữ tỉ số không đổi, tức là $P_{xx} = f_1 \cdot T$; $P_{yy} = f_2 \cdot T$; $P_{xy} = 0$ trong đó f_1, f_2 là các hằng số dương. Khi đó $\sigma_{xx}^o = -f_1 \cdot T$; $\sigma_{xy}^o = 0$; $\sigma_{yy}^o = -f_2 \cdot T$. Các hệ số xác định từ (2.3) nhận dạng

$$\alpha_1 = 1 - \frac{3}{4}\left(1 - \frac{\Phi_o'}{G_s^o}\right)\frac{f_1^2}{g^2}; \quad \alpha_2 = \alpha_4 = 0; \quad g = \sqrt{f_1^2 - f_1 f_2 + f_2^2};$$

$$\alpha_3 = 2 - \frac{3}{2}\left(1 - \frac{\Phi_o'}{G_s^o}\right)\frac{f_1 \cdot f_2}{g^2}; \quad \alpha_5 = 1 - \frac{3}{4}\left(1 - \frac{\Phi_o'}{G_s^o}\right)\frac{f_2^2}{g^2};$$

$$\beta_1 = 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{G_s^o}{\Phi_o'} - 1\right)\left(\frac{2f_2 - f_1}{g}\right)^2; \quad \beta_2 = \beta_4 = 0;$$

$$\beta_3 = 2 + \frac{1}{2}\left(\frac{G_s^o}{\Phi_o'} - 1\right)\frac{(2f_1 - f_2)(2f_2 - f_1)}{g^2}; \quad \beta_5 = 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{G_s^o}{\Phi_o'} - 1\right)\left(\frac{2f_1 - f_2}{g}\right)^2. \tag{2.18}$$

Thay các giá trị này vào (2.5) ta nhận được biểu thức xác định áp lực

$$T = G_s^o\left\{f_1\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + f_2\left(\frac{n}{R}\right)^2\right\}^{-1} \cdot \left\{\frac{h^2}{9}\left[\alpha_1\left(\frac{m\pi}{L}\right)^4 + \alpha_3\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2\left(\frac{n}{R}\right)^2 + \alpha_5\left(\frac{n}{R}\right)^4\right] + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2\left[\beta_1\left(\frac{m\pi R}{L}\right)^2 + \beta_3 n^2 + \beta_5\left(\frac{L n^2}{m\pi R}\right)^2\right]^{-1}\right\}. \tag{2.19}$$

Hệ thức này trong trường hợp $f_1 = 0$ hoặc $f_2 = 0$ trở về các hệ thức tương ứng (2.6), (2.10)

Kí hiệu $\widehat{T} = TR/Eh$, $\psi = n^2h/R$, $\theta = m\pi R/nL$ khi đó (2.19) trở thành

$$\widehat{T} = \frac{G_s^\circ}{E}\{f_1\theta^2 + f_2\}^{-1}\cdot\left\{\frac{\psi}{9}(\alpha_1\theta^4 + \alpha_3\theta^2 + \alpha_5) + \frac{\theta^4}{\psi(\beta_1\theta^4 + \beta_3\theta^2 + \beta_5)}\right\}.$$

Tìm cực trị vế phải biểu thức này, ta nhận được lực tới hạn.

Trường hợp vỏ có độ dài trung bình, tức là $m = 1$, $\theta^2 \ll 1$, khi đó

$$\widehat{T} = \frac{G_s^\circ}{E}\left[\frac{\psi}{9}\frac{\alpha_5}{f_1\theta^2 + f_2} + \frac{\theta^4}{\psi\beta_5(f_1\theta^2 + f_2)}\right].$$

Thay θ và ψ qua n vào đây, kí hiệu $x = n^2$; $A_o = G_s^\circ/E$; $a_1 = \alpha_5 hL^2/9R$; $a_2 = f_1\pi^2R^2$; $a_3 = f_2L^2$; $b_1 = \pi^4R^5/\beta_5hL^2$.

Ta nhận được

$$\widehat{T}(x) = A_o\left[\frac{a_1x^2}{a_2 + a_3x} + \frac{b_1}{x^2(a_2 + a_3x)}\right] \qquad (2.20)$$

Thấy rằng $\widehat{T} = \widehat{T}(x)$, do vậy để tìm cực trị (2.20), ta tính $\partial\widehat{T}/\partial x$, nhận được

$$\widehat{q}(x) = a_1a_3x^5 + 2a_1a_2x^4 - 3b_1a_3x - 2b_1a_2 = 0$$

Hiển nhiên rằng phương trình này có ít nhất một nghiệm dương vì $\widehat{q}(o) = -2b_1a_2 < 0$; $\widehat{q}(+\infty) = +\infty$ cho nên đồ thị hàm $\widehat{q}(x)$ cắt trục hoành OX tại ít nhất một điểm. Vậy từ phương trình này tìm được nghiệm $x = x_o$, thay vào (2.20) ta xác định được lực tới hạn.

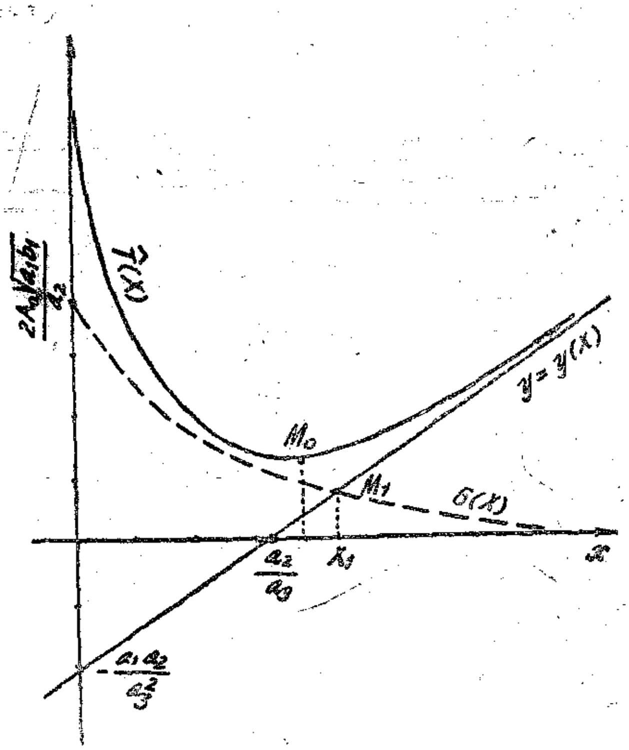
Tuy nhiên, việc giải phương trình trên khó khăn, do vậy ta sẽ tìm cách đánh giá lực tới hạn một cách gần đúng. Trước hết, vì A_o, a_1, a_2, a_3, b_1 dương và $x \geqslant 0$ do vậy từ (2.20) ta có

$$\widehat{T}(x) \geqslant \frac{2A_o\sqrt{a_1b_1}}{a_2 + a_3x} = G(x) \qquad (2.21)$$

Hàm $G(x)$ luôn luôn nghịch biến với mọi $x \in [0, +\infty)$ và đạt giá trị lớn nhất tại $x = 0$. Mặt khác hàm $\widehat{T}(x)$ có tiệm cận đứng $x = 0$ và tiệm cận xiên

$$y = A_o\left(\frac{a_1}{a_3}x - \frac{a_1a_2}{a_3^2}\right) \text{ và } \widehat{T}(x) > 0;\ \forall x \geqslant 0.$$

Do đó đồ thị của hàm $\widehat{T}(x)$ được biểu diễn như hình vẽ 1. Vậy nếu gọi M_1 là giao điểm của $G(x)$ và $y(x)$, ta luôn luôn có: $\widehat{T}(x) > G(M_1)$; $\forall x \in [0, +\infty)$



Hình 1

Do vậy

$$\widehat{T}_{min} = \widehat{T}(M_0) > G(M_1) \tag{2.22}$$

Để tìm điểm M_1, ta giải phương trình $G(x) = y(x)$, nhận được

$$X_1 = \left[2\sqrt{\frac{b_1}{a_1}} + \frac{a_2^2}{a_3^2}\right]^{1/2}$$

Sau khi tính $G(x)$ từ (2.22) suy rằng

$$\widehat{T}_{min} > \frac{2A_0\sqrt{a_1b_1}}{a_2 + \sqrt{2a_3^2\sqrt{\frac{b_1}{a_1}} + a_2^2}} \tag{2.23}$$

Thay các giá trị của A_o, a_1, a_2, a_3, b_1, α_5, β_5 vào đây sau một vài phép tính toán ta thu được

$$\widehat{T}_{min} > \frac{2}{3}\,\frac{G_s^o\pi R}{E}\left\{\frac{4g^2G_s^o - 3(G_s^o - \Phi_o')f_2^2}{4g^2\Phi_o' + (G_s^o - \Phi_o')(2f_1 - f_2)^2}\,\frac{\Phi_o'}{G_s^o}\right\}^{1/2}\left\{f_1\pi R + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{6L^2Rf_2}{h}\left[\frac{16G_s^o\Phi_o'g^4}{[4g^2G_s^o - 3(G_s^o - \Phi_o')f_2^2]\,[4g^2\Phi_o' + (G_s^o - \Phi_o')(2f_1 - f_2)^2]}\right]^{1/2} + f_1^2\pi^2R^2}\right\}^{-1} \tag{2.24}$$

Công thức này cho phép ta đánh giá được giá trị của lực tới hạn.

Nhận xét:

a) Nếu vỏ trụ chỉ chịu nén dọc đường sinh bởi lực $T = P$, khi đó $f_1 = 1$; $f_2 = 0$, từ (2.24) nhận được

$$\widehat{T}_{min} > \frac{1}{3E}\sqrt{\Phi_o'G_s^o}\ ;\ T_{min} > \frac{1}{3}\sqrt{\Phi_o'G_s^o}\,\frac{h}{R}$$

so sánh với giá trị chính xác đã cho bởi (2.9), ta thấy giá trị này nhỏ hơn (2.9) hai lần và do đó có thể chấp nhận được.

b) Nếu vỏ trụ chỉ chịu áp lực ngoài $T = \frac{qR}{h}$, khi đó $f_1 = 0$, $f_2 = 1$,

$$\widehat{T}_{min} > \frac{2}{3\sqrt{6}} \frac{G_s^\circ}{E} \frac{\pi R}{L} \left(\frac{h}{R}\right)^{1/2} \left(\frac{3\Phi_o^\circ + G_s^\circ}{4G_s^\circ}\right)^{1/2} \left(\frac{\Phi_o^\circ}{G_s^\circ}\right)^{1/4}; \quad T_{min} = \frac{hE}{R} \widehat{T}_{min}.$$

Ta thấy giá trị ở bên phải biểu thức này nhỏ hơn (2.14) là 1,3 lần, do vậy có thể chấp nhận được.

KẾT LUẬN

Phương pháp giải các bài toán trên đây cho ta khảo sát định tính và định lượng quá trình ổn định của vỏ trụ, so sánh được với các lý thuyết khác. Mặc dù chỉ xét bài toán với điều kiện biên tựa bản lề, song một cách hoàn toàn tương tự có thể nghiên cứu bài toán với các điều kiện biên khác.

Tác giả chân thành cảm ơn Giáo sư Đào Huy Bích đã hướng dẫn công trình này.

Địa chỉ
Trường Đại học Tổng hợp Hà Nội

Nhận ngày 28-11-1986

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. ВОЛМИР А. С. Устойчивость упругих систем. М., 1963.
2. КЛЮШНИКОВ В. Д. Устойчивость упруго-пластических систем. М., 1980.
3. ГРИГОЛЮК Э. И. Касательномодульная нагрузка круговых цилиндрических оболочек при комбинированной нагрузке. Вестн, МГУ, №1, 1958.
4. ДАРЕВСКИЙ В. М. Устойчивость цилиндрической оболочки при одновременном действии крутящего момента и нормального давления. Изв. АН СССР, ОТН, №11, 1957.
5. ĐÀO HUY BÍCH, ĐÀO VĂN DŨNG. Về sự ổn định của vỏ mỏng trong lý thuyết quá trình biến dạng đàn – dẻo. Tạp chí Cơ học số 3, 1986.
6. GERARD G. Plastic stability theory of thin shells. J. Aero. Sci, 24, №10, 1957; J. Aerospace, Sci, 29, №10, 1962.

RESUME

STABILITÉ DE MINCES COQUES SOUMISES A UNE CHARGE COMPLEXE

On considère le problème de la stabilité de minces coques cylindriques soumises à une charge complexe en se basant sur le système d'équations décrites dans [4]. Après avoir construit la méthode de résolution dans le cas général on a calculé quelques problèmes particuliers et a trouvé la valeur de la pression critique. Ces résultats nous permettent de comparer avec ceux des théories différentes.