Tạp chí Cơ học tập XI, 1989 số 4 (trang 53 – 56)

ĐƯA HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VỀ DẠNG TỌA ĐỘ PHÁP

NGUYỄN VĂN ĐẠO

Trong khi nghiên cứu dao động phi tuyến của hệ có hai bậc tự do ta thường gặp bài toán đưa hệ phương trình vi phân cấp hai về dạng tọa độ pháp, ở đó khi tham số bé triệt tiêu ($\varepsilon = 0$) các tọa độ pháp tách rời nhau và mỗi phương trình chỉ chứa một tọa độ pháp.

Nhằm giúp bạn đọc vận dụng dễ dàng trong thực tiễn, dưới đây trình bày các công thức đã biết biến đổi hệ phương trình vi phân cấp hai về dạng tọa độ pháp.

Cho hệ phương trình :

$$a\ddot{x} + bx + cy = f_1,$$

$$d\ddot{y} + ey + hx = f_2, \tag{1}$$

trong đó a, b, c, d, e, h là các hằng số ; f_1, f_2 là các hàm số.

Đưa vào các tọa độ pháp ξ_1, ξ_2, liên hệ với các tọa độ x, y bởi công thức

$$x = \xi_1 + \xi_2, \ y = \sigma_1\xi_1 + \sigma_2\xi_2, \tag{2}$$

trong đó ξ_1, ξ_2 là các tọa độ pháp ;

$$\sigma_1 = \frac{h}{d\omega_1^2 - e} = \frac{a\omega_1^2 - b}{c}, \qquad \sigma_2 = \frac{h}{d\omega_2^2 - e} = \frac{a\omega_2^2 - b}{c}, \tag{3}$$

còn ω_1, ω_2 là các nghiệm của phương trình đặc trưng

$$(b - a\omega^2)(e - d\omega^2) - hc = 0, \tag{4}$$

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2ad}\left[ae + bd - \sqrt{(ae - bd)^2 + 4adhc}\right],$$

$$\omega_2^2 = \frac{1}{2ad}\left[ae + bd + \sqrt{(ae - bd)^2 + 4adhc}\right]. \tag{5}$$

Dễ dàng thử lại rằng

$$\sigma_1 \cdot \sigma_2 = - ah/dc. \tag{6}$$

Ta có các phương trình vi phân đối với các tọa độ pháp ξ_1, ξ_2 như sau :

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_1 + \omega_1^2\xi_1 &= \frac{\sigma_2}{a(\sigma_2 - \sigma_1)} f_1 - \frac{f_2}{d(\sigma_2 - \sigma_1)}, \\ \ddot{\xi}_2 + \omega_2^2\xi_2 &= \frac{\sigma_1}{a(\sigma_1 - \sigma_2)} f_1 - \frac{f_2}{d(\sigma_1 - \sigma_2)}. \end{aligned} \tag{7}$$

Chú ý đến (6), ta còn có thể viết phương trình (7) dưới dạng

$$\ddot{\xi}_1 + \omega_1^2\xi_1 = k_1\left(f_1 + \frac{c}{h}\sigma_1 f_2\right),$$
$$\ddot{\xi}_2 + \omega_2^2\xi_2 = k_2\left(f_1 + \frac{c}{h}\sigma_2 f_2\right), \tag{8}$$

trong đó

$$k_1 = \frac{\sigma_2}{a(\sigma_2 - \sigma_1)} = \frac{1}{a + \frac{dc}{h}\sigma_1^2}, \quad k_2 = \frac{1}{a(\sigma_1 - \sigma_2)} = \frac{1}{a + \frac{dc}{h}\sigma_2^2}. \tag{9}$$

Lưu ý rằng, trong nhiều hệ Cơ học $c = h$ và các công thức trên đây có dạng khá đơn giản.

Ví dụ 1

Với hệ phương trình

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1x_1 - c_1x_2 = P\cos\omega t,$$
$$m_2\ddot{x}_2 + c_1(x_2 - x_1) + c_2x_2 = -\alpha f(x_2),$$

ta có:

$$a = m_1,\ d = m_2,\ b = c_1,\ e = c_1 + c_2,\ c = -c_1,\ h = -c_1.$$

Do vậy

$$\sigma_1 = \frac{c_1}{c_1 + c_2 - m_2\omega_1^2}, \qquad \sigma_2 = \frac{c_1}{c_1 + c_2 - m_2\omega_2^2},$$

$$k_1 = \frac{\sigma_2}{m_1(\sigma_2 - \sigma_1)}; \qquad k_2 = \frac{\sigma_1}{m_1(\sigma_2 - \sigma_1)}$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{c_1}{m_1} + \frac{c_1 + c_2}{m_2} \mp \sqrt{\left(\frac{c_1}{m_1}\right)^2 + \left(\frac{c_1 + c_2}{m_2}\right)^2 + \frac{2c_1(c_1 - c_2)}{m_1m_2}}\right]$$

và các phương trình trong tọa độ pháp sẽ là:

$$x_1 = \xi_1 + \xi_2,\ x_2 = \sigma_1\xi_1 + \sigma_2\xi_2,$$

$$\ddot{\xi}_1 + \omega_1^2\xi_1 = \frac{P}{m_1}\frac{\sigma_2}{\sigma_2 - \sigma_1}\cos\omega t + \frac{\alpha}{m_2}\frac{1}{\sigma_2 - \sigma_1}f(\sigma_1\xi_1 + \sigma_2\xi_2),$$

$$\ddot{\xi}_2 + \omega_2^2\xi_2 = \frac{P}{m_1}\frac{\sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_2}\cos\omega t + \frac{\alpha}{m_2}\frac{1}{\sigma_1 - \sigma_2}f(\sigma_1\xi_1 + \sigma_2\xi_2)$$

Ví dụ 2: Với hệ

$$\ddot{x} + (1 + p)x - py = \varepsilon f_1,\ n\ddot{y} + p(y - x) = \varepsilon f_2$$

ta có:

$$a = 1,\ b = 1 + p,\ c = -p,\ d = n,\ e = p,\ h = -p$$

$$\sigma_1 = \frac{-p}{n\omega_1^2 - p},\ \sigma_2 = \frac{-p}{n\omega_2^2 - p},\ k_1 = \frac{1}{1 + n\sigma_1^2},\ k_2 = \frac{1}{1 + n\sigma_2^2}$$

và các phương trình dưới tọa độ pháp có dạng

$$x = \xi_1 + \xi_2,\ y = \sigma_1\xi_1 + \sigma_2\xi_2,$$

$$\ddot{\xi}_1 + \omega_1^2\xi_1 = \frac{\varepsilon}{1 + n\sigma_1^2}(f_1 + \sigma_1 f_2),$$

$$\ddot{\xi}_2 + \omega_2^2\xi_2 = \frac{\varepsilon}{1 + n\sigma_2^2}(f_1 + \sigma_2 f_2).$$

Tổng quát, xét hệ n phương trình vi phân cấp hai dạng :

$$\begin{aligned} &m_1\ddot{x}_1 + c_1x_1 + \dots + c_nx_n = f_1, \\ &m_2\ddot{x}_2 + d_1x_1 + \dots + d_nx_n = f_2, \\ &\dots\dots\dots \\ &m_n\ddot{x}_n + l_1x_1 + \dots + l_nx_n = f_n \end{aligned} \tag{10}$$

Giả thiết rằng định thức đặc trưng :

$$\Delta(\omega^2) = \begin{vmatrix} c_1 - m_1\omega^2, c_2, \dots, c_n \\ d_1,\ d_2 - m_2\omega^2, \dots, d_n \\ \dots\dots\dots \\ l_1, l_2, \dots, l_n - m_n\omega^2 \end{vmatrix} \tag{11}$$

có n nghiệm khác nhau $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$. Gọi $\sigma_{jk} = \Delta_j(\omega_k^2)$ là phần phụ đại số của phần tử nằm ở cột thứ j và hàng cuối của định thức đặc trưng $\Delta(\omega_k^2)$. Khi đó ta có các công thức chuyển hệ (10) về tọa độ pháp η_k như sau :

$$x_j = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{jk}\,\eta_k,\ j = 1, 2, \dots, n$$

$$\ddot{\eta}_k + \omega_k^2\eta_k = \frac{1}{M_k}\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ik}\,f_i,\ M_k = \sum_{i=1}^{n} m_i\sigma_{ik}^2 \tag{12}$$

Nếu đặt

$$\sigma_{1k}\eta_k = \xi_k \tag{13}$$

ta sẽ có các phương trình trong tọa độ pháp : ξ_k

$$x_j = \sum_{k=1}^{n}\frac{\sigma_{jk}}{\sigma_{1k}}\,\xi_k, \tag{14}$$

$$\ddot{\xi}_k + \omega_k^2\xi_k = \frac{\sigma_{1k}}{M_k}\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ik}f_i,\ M_k = \sum_{i=1}^{n} m_i\sigma_{ik}^2\ ;\ k = 1, 2, \dots, n.$$

Ghi chú : Nếu đặt $d_{jk} = \sigma_{jk}/\sigma_{1k}$ thì các công thức trên sẽ có dạng :

$$x_j = \sum_{k=1}^{n} d_{jk}\xi_k,\ \ddot{\xi}_k + \omega_k^2\xi_k = \frac{1}{M_k}\sum_{i=1}^{n} d_{ik}f_i,\ M_k = \sum_{i=1}^{n} m_i d_{ik}^2.$$

Áp dụng các công thức trên đây cho trường hợp hệ phương trình (1) ta có $x_1 = x$, $x_2 = y$, $n = 2$, $m_1 = a$, $m_2 = d$ và

$$\Delta(\omega_k^2) = \begin{vmatrix} b - a\omega_k^2 & c \\ h & e - d\omega_k^2 \end{vmatrix},$$

$\sigma_{1k} = -c$, $\sigma_{2k} = b - a\omega_k^2$. Do vậy

$$M_k = ac^2 + d(b - a\omega_k^2)^2$$

và các công thức (14) có dạng đã biết (8), (9) :

$$x = \xi_1 + \xi_2$$

$$y = \frac{\sigma_{21}}{\sigma_{11}}\xi_1 + \frac{\sigma_{22}}{\sigma_{12}}\xi_2 = \frac{b - a\omega_1^2}{-c}\xi_1 + \frac{b - a\omega_2^2}{-c}\xi_2,$$

$$\ddot{\xi}_1 + \omega_1^2\xi_1 = \frac{-c}{ac^2 + (b - a\omega_1^2)^2 d}\left[-cf_1 + (b - a\omega_1^2)f_2\right],$$

$$\ddot{\xi}_2 + \omega_2^2\xi_2 = \frac{-c}{ac^2 + (b - a\omega_2^2)^2 d}\left[-cf_1 + (b - a\omega_2^2)f_2\right].$$

Địa chỉ
Viện Cơ học Viện KHVN

Nhận ngày 15-12-1988

TÍNH TOÁN TẢI TRỌNG ĐỘNG...

(Tiếp theo trang 52)

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. AOKI MASANAO. Introduction to optimization techniques. New York : The Macmillan Company. 335p., 1971.

2. Справочная книга по аварийно — спасательному, судопочёмному и водолазному делу, Част I, Под общей редакцией инженервице — адмирал А. А. Фролова. — М. Л. : Воениздат, 1945.

3. Аварийно — спасательные и судоподчёмные средства, А. И. Фигиев, Ю. В. Васильев, Г. К. Крылов, А. В. Сытин, В. С. Ястребов. — Л. : Судостроение, 1979.

SUMMARY

DYNAMIC LOAD ANALYSIS IN THE CABLE LIFTING A SUNKEN SHIP

In this paper the dynamic load analysis in the cable lifting a sunken ship is considered. The mentioned dynamic load issued from vertical tossing of the rescue ships carrying cable winches.

The tossing motion of the rescue ships is given. Assuming that the oscillation movement of lifting cables is small, the motion of the sunken ship in water is considered as a plane one with two degrees of freedom.

The lifted load is not known exactly and is approximatively given within a known interval. This uncertainty is taken into account in estimating the maximum value of load in the cables by means of a theorem of linear programming.

The analysis results will give the algorithm permitting us to compute the maximum absolute value of the load springing up in the lifting cables.