Tạp chí Cơ học tập XI, 1989 số 4 (trang 33 — 40)

SỰ ỔN ĐỊNH CỦA CÁC THANH ĐÀN NHỚT GIÀ KHÔNG ĐỒNG NHẤT

TÔ VĂN TẤN

Trong [1] đã sử dụng định nghĩa ổn định động theo Liapunôv để nghiên cứu ổn định các thanh đàn nhớt già không đồng nhất trong khoảng thời gian vô hạn. ong [2] đã sử dụng lý thuyết về các điểm phân nhánh giả để nghiên cứu sự ổn định : thanh đàn nhớt già đồng nhất và đã đưa ra tiêu chuẩn ổn định cho lớp bài in này.

Trong bài báo này sử dụng phương pháp và kết quả ở [2] để nghiên cứu sự ổn nh của các thanh đàn nhớt già không đồng nhất trong khoảng thời gian hữu hạn niết lập liên hệ tải trọng thời gian tới hạn) và vô hạn (thiết lập các điều kiện ổn nh cho các thanh chịu lực và có liên kết khác nhau).

§1. TỪ BIẾN CỦA CÁC VẬT THỂ GIÀ KHÔNG ĐỒNG NHẤT VÀ CÁC TƯƠNG TỰ ĐÀN HỒI

Trong [1] đã đề cập đến lý thuyết từ biến các vật thể đàn nhớt già không ng nhất. Các bộ phận của các vật thể đó được chế tạo và chịu tải không đồng thời do đó quá trình già xảy ra không đồng nhất, tức là không như nhau tại các bộ ận của vật thể.

Các vật liệu già mà điển hình là bê-tông, các chất pôlime chất dẻo gỗ, đá... các tính chất cơ lý thay đổi theo thời gian, tức là phụ thuộc vào tuổi của vật u. Quá trình già của các vật liệu này có thể xảy ra do các biến đổi hóa lý của úng (sự già tự nhiên) hoặc do tác dụng của các loại trường như nhiệt độ, bức xạ... r già nhân tạo).

Tính không đồng nhất về tuổi của vật thể là một trong những yếu tố cơ bản) phép thu nhận các thông tin đầy đủ hơn về trạng thái ứng suất — biến dạng, bền, tuổi thọ của các vật thể đó.

Dưới đây là các phương trình trạng thái của vật thể đàn nhớt già không ng nhất [1]:

Đối với trạng thái ứng suất đơn:

$$e_x(t) = \frac{\sigma_x(t)}{E(t+\rho(x))} - \int_{\tau_0(x)}^{t} \sigma_x(\tau)K(t+\rho(x), \tau+\rho(x))d\tau \quad (1.1)$$

Trong đó: e_x, σ_x là biến dạng và ứng suất tại bộ phận có tọa độ x; $\tau_0(x)$ — ời điểm đặt tải; $\rho(x)$ là tuổi của bộ phận vật thể có tọa độ x, còn gọi là hàm già ông đồng nhất. Trong một số bài toán hàm $\rho(x)$ đã biết, trong một số trường hợp ác hàm $\rho(x)$ phải chọn theo những điều kiện nhất định.

Đối với trạng thái ứng suất khối :

$$e_{ij}(t) = \frac{S_{ij}(t)}{2G[t + \rho(x)]} - \int_{\tau_o}^{t} S_{ij}(\tau)K_1[t + \rho(x), \tau + \rho(x)]d\tau,$$

$$e(t) = \frac{\sigma(t)}{E^*[t + \rho(x)]} - \int_{\tau_o}^{t} \sigma(\tau)K_2[t + \rho(x), \tau + \rho(x)]d\tau \qquad (1.2)$$

Trong đó : S_{ij}, e_{ij} là tenxơ lệch ứng suất và biến dạng còn $3e(t)$ là biến dạng ích, $\sigma(t)$ là ứng suất trung bình ; K_1, K_2 là nhân biến dạng từ biến trượt và ích ; τ_o — thời điểm đặt tải như nhau với mọi bộ phận.

Để làm cơ sở cho việc nghiên cứu về ổn định ta sử dụng phương pháp trong ıy dựng các tương tự đàn hồi. Trước tiên để đơn giản ta giả thiết $\tau_o = 0$; E, hằng số và xem e_x^o, σ_x^o ứng với trạng thái cơ bản, còn e_x, σ_x ứng với trạng thái rợc kích động. Khi đó :

$$\Delta e_x = e_x - e_x^o \ll e_x^o, \ \Delta\sigma_x = \sigma_x - \sigma_x^o \ll \sigma_x^o$$

ới phân nhánh giả bậc N ($\overset{(N)}{\Delta e_x} \neq 0$, $\overset{(N)}{\Delta \sigma_x} \neq 0$, $\Delta e_x = \Delta\sigma_x = \ldots = 0$)

.1) có thể xây dựng được các tương tự đàn hồi tương tự trong [2]

$$\overset{(N)}{\Delta \sigma_x} = \tilde{E}_N \overset{(N)}{\Delta e_x} \qquad (1.3)$$

ıg đó :

$$\tilde{E}_N = E\left[1 - \frac{E}{N!}\int_0^t (\tau - t)^N K(t + \rho, \tau + \rho)d\tau\right]^{-1}$$

trạng thái ứng suất khối ta có các tương tự đàn hồi :

$$\overset{(N)}{\Delta S_{ij}} = 2\tilde{G}_N \overset{(N)}{\Delta e_{ij}} \qquad (1.4)$$

ıg đó :

$$\tilde{G}_N = G\left[1 - \frac{2G}{N!}\int_0^t (\tau - t)^N \overset{(N)}{K_1}(t + \rho, \tau + \rho)d\tau\right]^{-1}$$

ıy xem biến dạng thể tích là biến dạng đàn hồi.

Các phương trình hình học và cân bằng ta vẫn sử dụng như trong bài toán ổn h đàn hồi, còn các phương trình trạng thái được đưa về các tương tự đàn hồi. đó việc giải bài toán ổn định các vật thể đàn nhớt giả không đồng nhất (bài ı phân nhánh giả) được dựa về giải bài toán ổn định đàn hội (bài toán phân nh tạng thái) (*).

§2. ỔN ĐỊNH CÁC THANH TRONG KHOẢNG THỜI GIAN HỮU HẠN

Sử dụng tiêu chuẩn ổn định trong [2] ta đi xét phân nhánh giả bậc 2 trong trường hợp thanh có liên kết và chịu lực khác nhau.

Lấy nhân từ biến dạng [1] :

$$K(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau}\left[\varphi(\tau)\left(1 - e^{-\gamma(t-\tau)}\right)\right] \tag{2.1}$$

Trong đó hàm giả $\varphi(\tau) = C_o + A_o e^{-\beta\tau}$

Nếu kể đến tính giả không đồng nhất, ta có :

$$K(t+\rho, \tau+\rho) = \frac{\partial}{\partial \tau}\left(C_o + A_o e^{-\beta(\tau+\rho)}\right)\left(1 - e^{-\gamma(t-\tau)}\right)] \tag{2.2}$$

Với phân nhánh giả bậc 2 từ (1.3) ta viết được :

$$\Delta\ddot{\sigma} = \tilde{E}_2 \Delta\ddot{e}$$

ng đó

$$\tilde{\ } = E\left[1 - \frac{E}{2}\int_0^t (\tau - t)^2 \ddot{K}(t+\rho, \tau+\rho)d\tau\right]^{-1} \tag{2.3}$$

t (2.2) vào (2.3) sẽ thu được :

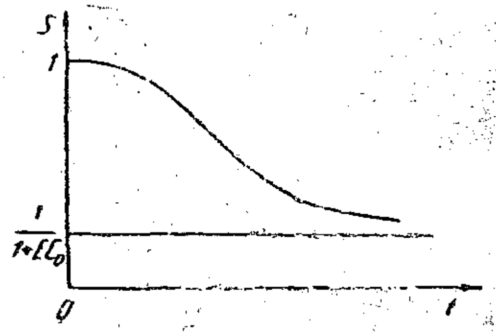
$$\tilde{E}_2 = E\left\{1 + EC_o\left[1 - e^{-\gamma t}\left(1 + \gamma t + \frac{\gamma^2 t^2}{2}\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{EA_o\gamma^2 e^{-\beta\rho}}{(\gamma-\beta)^2}\left[e^{-\beta t} - e^{-\gamma t}\left(1 + t(\gamma-\beta) + \frac{t^2}{2}(\gamma-\beta)^2\right)\right]\right\}^{-1} \tag{2.4}$$

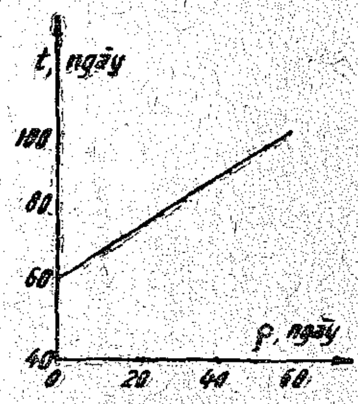
ỉ sử xét thanh một đầu ngàm một đầu chịu lực P, sử dụng kết luận (*) và kí hiệu = P/Pσ, (Pσ — lực tới hạn ơle), ta có :

$$S = \frac{P}{P_\sigma} = \left\{1 + EC_o\left[1 - e^{-\gamma t}\left(1 + \gamma t + \frac{\gamma^2 t^2}{2}\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{EA_o\gamma^2 e^{-\beta\rho}}{(\gamma-\beta)^2}\left[e^{-\beta t} - e^{-\gamma t}\left(1 + (\gamma-\beta)t + \frac{t^2}{2}(\gamma-\beta)^2\right)\right]\right\}^{-1} \tag{2.5}$$



Hình 1



Hình 2

nếu cho trước lực P và hàm $\rho(x)$ ta sẽ tính được thời gian tới hạn, chẳng ; cách sử dụng đường cong $s \sim t$(h. 1).
ta nhận thấy khi P giảm thì t tăng, và đường cong $s \sim t$ tiệm cận với một gang.

ây giờ nếu sử dụng các hằng số vật liệu ở [2] và lấy $s = 0,7$, từ (2.5) ta vẽ ờng $t \sim \rho$ (h. 2) ta nhận thấy thời gian tới hạn gia tăng khi tuổi vật liệu tăng.

hú ý :

– Ở trên ta xét với thanh ngàm một đầu, một đầu chịu lực p, với các thanh kết khác và chịu lực khác ta cũng có công thức (2.5). Sự khác nhau giữa chúng ʏ.

– Trong các bài toán ta giả thiết E = const.

'uy nhiên, nếu E thay đổi theo t, chẳng hạn lấy $E(t) = E(1 - \xi e^{-\beta_1 t})$ thì đường $\sim t$ sẽ không đi qua điểm (1, 0) mà thấp hơn một ít.

§3. ỔN ĐỊNH TRONG KHOẢNG THỜI GIAN VÔ HẠN

ı) Trường hợp lực tập trung.

'rong (2.5) cho $t \to \infty$ ta thu được :

$P_{th} = P_\sigma(1 + EC_o)^{-1}$ và gọi là lực tới hạn khi thanh chịu tải lâu dài.

Từ hình 1 ta thấy : Nếu $P < P_{th}$ thì thanh luôn ổn định, nếu $P_{th} < P < P_\sigma$ ıh sẽ mất ổn định sau một khoảng thời gian nào đó, nếu $P = P_\sigma$ thì thanh mất ı tức thời.

.ện ổn định là :

$$P < P_\sigma(1 + EC_o)^{-1} \tag{3.1}$$

Ta nhận thấy P_{th} không phụ thuộc tuổi vật liệu $\rho(x)$

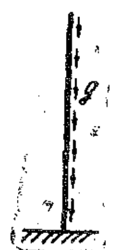
b) Trường hợp lực phân bố g (h. 3).

Với thanh đàn hồi ta có :

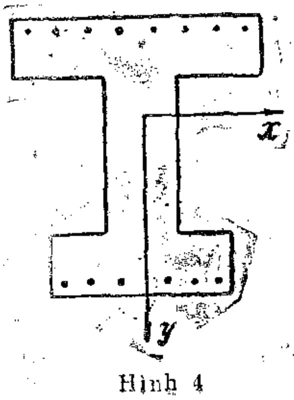
$$g_o = 7,84EJl^{-3}$$

tự như a) điều kiện ổn định của thanh đàn nhớt là :

$$g < g_{th} = g_\sigma(1 + EC_o)^{-1} \tag{3.2}$$



Hình 3



Hình 4

ng thức (3.2) sẽ thỏa mãn nếu chiều dài l của thanh đàn nhớt thỏa mãn điều kiện :

$$l < l_{th} = 1{,}986 \sqrt[3]{\frac{EJ}{g(1 + EC_o)}} \qquad (3.3)$$

ậy (3.3) là điều kiện ổn định của thanh chịu tác dụng lâu dài của trọng lượng ản thân.

c) Ổn định của t nh đàn nhớt có cốt

ét một thanh đàn nhớt có chiều dài l chịu nén, với giả thiết vật liệu cốt tuân theo ịnh luật Húc, còn vật liệu cơ b n tuân theo quy luật đàn nhớt già không đồng hất. (h. 4).

Ta sử dụng liên hệ độ cong và mômen uốn [1] :

$$\omega(t) + \beta \int_0^t \omega(\tau)R(t, \tau)d\tau = -\frac{M(t)}{EJ} \qquad (3.4)$$

rong đó :

$$J = \frac{1}{E}(E_aJ_a + EJ_o), \quad \beta = J_o/J, \qquad (3.5)$$

ω(t) – độ cong của thanh, J_a – mômen quán tính của cốt đối với trục x, J_o – mômen uán tính của mặt cắt ngang của vật liệu cơ bản đối với trục x.

Trường hợp $\beta = 1$ ứng với vật liệu đàn nhớt không đặt cốt, còn $\beta = 0$ ứng với ật liệu đàn hồi thuần túy.

$R(t, \tau)$ là rêgiônven của nhân $EK(t, \tau)$ và được tính bằng công thức [1] :

$$R(t, \tau) = -\gamma\varphi(\tau)E + [\gamma^2\varphi(\tau)E + \gamma^2\varphi^2(\tau)E^2 + \gamma\dot{\varphi}(\tau)E]e^{\eta(t)} \int_\tau^t e^{-\eta(s)}ds \qquad (3.6)$$

rong đó : $\eta(t) = \gamma \int_0^t [1 + \varphi(s)E]ds$, $\varphi(\tau)$ – hàm già

ừ (3.4) với $t = 0$ ta có liên hệ độ cong – mômen uốn của thanh đàn hồi là :

$$\omega = -M/EJ \qquad (3.7)$$

Bây giờ đặt $\Delta\omega = \omega(t) - \omega^o(t)$, $\Delta M = M(t) - M^o(t)$ và viết (3.4) thành dạng :

$$-\frac{\Delta M(t)}{EJ} = \Delta\omega(t) + \beta \int_0^t \Delta\omega(\tau)R(t, \tau)d\tau \qquad (3.8)$$

Đạo hàm (3.8) 2 lần theo t, phân tích $\Delta\omega(\tau)$ thành chuỗi tại lân cận điểm τ = t và sử dụng định nghĩa PG2 ($\Delta\ddot{\omega} \neq 0$, $\Delta\ddot{M} \neq 0$, $\Delta\omega = \Delta M = \ldots = 0$) ta thu được ương tự đàn hồi :

$$\Delta\ddot{\omega} = -\Delta\ddot{M}/\tilde{E}_2J$$

g đó :

$$\tilde{E}_2 = E\left[1 + \frac{\beta}{2}\int_0^t (\tau - t)^2\ddot{R}d\tau\right] \tag{3.9}$$

$(t) = C_o$. C_o là giá trị giới hạn của hàm già khi $t \to \infty$ và sử dụng (3.6) ta ược :

$$R(t, \tau) = -\gamma C_o E e^{\gamma(1 + C_o E)(\tau - t)} \tag{3.10}$$

.9) à (3 10) ta có :

$$\frac{\tilde{E}_2}{E} = \frac{1 + EC_o(1 - \beta)}{1 + EC_o} \tag{3.11}$$

ét thanh chịu lực nén P thì từ (3.11) có thể viết :

$$\frac{P}{P_\sigma} = \frac{1 + EC_o(1 - \beta)}{1 + EC_o} \tag{3.12}$$

liều kiện ổn định sẽ là :

$$P < P_{th} = \frac{P_\sigma}{1 + EC_o}\left[1 + (1 - \beta)EC_o\right] \tag{3.13}$$

ét thanh chịu lực phân bố đều g thì điều kiện ổn định sẽ là

$$g < g_{th} = \frac{g_\sigma}{1 + EC_o}\left[1 + (1 - \beta)EC_o\right]. \tag{3.14}$$

ıg hợp thanh không đặt cốt ($\beta = 1$) ta có điều kiện ổn định (3.2). Nếu $\beta = 0$ ta ều kiện ổn định của thanh đàn hồi $g < g_\sigma$.

Từ (3.14) ta thu được độ dài tới hạn của thanh đàn nhớt có cốt :

$$l_{th} = 1{,}986\left[\frac{EJ}{g}\left(\frac{1 - EC_o\beta}{1 + EC_o}\right)\right]^{1/3} \tag{3.15}$$

ếu $l < l_{th}$ thì thanh ổn định.

ỔN ĐỊNH DẠNG UỐN PHẲNG CỦA THANH THÀNH MỎNG

Trong trường hợp này phương trình trạng thái có dạng [3] :

$$e(t) = \frac{\sigma(t)}{E} - \int_0^t \sigma(\tau)K(t + \rho, \tau + \rho)d\tau,$$

$$\gamma(t) = \frac{\tau(t)}{G} - 2(1 + \nu)\int_0^t \tau(\tau)K(t + \rho, \tau + \rho)d\tau. \tag{4.1}$$

Trong đó :

$$K(t + \rho, \tau + \rho) = \frac{\partial}{\partial\tau}C(t + \rho, \tau + \rho) \tag{4.2}$$

(t) — biến dạng dọc và biến dạng trượt.

$\tau)$ — độ đo từ biến ; E, G, ν — các môđun của vật liệu. Sử dụng phương pháp àm ở trên, từ (4.1) ta thu được các tương tự đàn hồi đối với PGN :

$$\overset{(N)}{\Delta \sigma} = \tilde{E} \overset{(N)}{\Delta e}, \; \overset{(N)}{\Delta \tau} = \tilde{G}_N \overset{(N)}{\Delta \gamma} \tag{4.3}$$

ng đó :

$$\tilde{E}_N = E\left[1 - \frac{E}{N!}\int_0^t (\tau - t)^N \overset{(N)}{K}(t+\rho, \tau+\rho)d\tau\right]^{-1},$$

$$\tilde{G}_N = G\left[1 - \frac{G}{N!}\int_0^t (\tau - t)^N \overset{(N)}{K}(t+\rho, \tau+\rho)d\tau\right]^{-1}. \tag{4.4}$$

Để xác định ta xét dầm chịu uốn thuần túy bởi mômen M ở hai đầu. Trong hạn đàn hồi mômen uốn tới hạn [4] :

$$M_\sigma = \frac{\pi}{l}\sqrt{EJ_u GJ_k} \tag{4.5}$$

ɔ (4.5) có thể viết mômen uốn trong điều kiện từ biến như sau :

$$M = \frac{\pi}{l}\sqrt{\tilde{E}_N J_u \tilde{G}_N J_k} \tag{4.6}$$

y (4.4) vào (4.6) ta thu được :

$$M = M_\sigma\left[1 - \frac{E}{N!}\int_0^t (\tau - t)^N \overset{(N)}{K}(t+\rho, \tau+\rho)d\tau\right]^{-1} \tag{4.7}$$

cơ sở [3] lấy N = 2 và tương tự như (2.2) chọn

$$C(t, \tau) = (C_0 + A_0 e^{-\beta(\tau+\rho)})\,(1 - e^{-\gamma(t-\tau)}) \tag{4.8}$$

(4.8), (4.2) và (4.7) ta thu được :

$$\frac{M}{M_\sigma} = \left\{1 + EC_0\left[1 - e^{-\gamma t}\left(1 + \gamma t + \frac{\gamma^2 t^2}{2}\right)\right] + \frac{EA_0\gamma^2 e^{-\beta\rho}}{(\gamma-\beta)^2}\left[e^{-\beta t} - e^{-\gamma t} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times\left(1 + (\gamma - \beta)t + \frac{t^2}{2}(\gamma - \beta)^2\right)\right]\right\}^{-1} \tag{4.9}$$

sẽ cho phép xác định thời gian tới hạn khi cho trước M. Để nghiên cứu ổn ı trong khoảng thời gian vô hạn, cho $t \to \infty$, ta thu được điều kiện ổn định :

$$M < M_{th} = M_\sigma\,(1 + EC_0)^{-1} \tag{4.10}$$

KẾT LUẬN

Qua việc sử dụng lý thuyết về các điểm phân nhánh giả để nghiên cứu sự ổn của các thanh đàn nhớt già không đồng nhất trong khoảng thời gian hữu hạn) hạn đã đưa ra những công thức cho phép xác định thời gian tới hạn (2.5), (4.9), ác điều kiện ổn định của các thanh có liên kết hai đầu và chịu lực khác nhau, t và không có cốt (3.1), (3.2), (3.13), (3.14), (4.10). Trong đó có một số kết quả ; với [1] như (3.1), (3.2), (3.13), (3.14).

hi :

ıg Đại học Xây dựng HN

Nhận ngày 6-4-1987

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. АРУТЮНЯН Н. Х., КОЛМАНОВСКИЙ В. Б. Теория ползучести неоднород- тел. М., 1983.

2. TÔ VĂN TẤN. Ổn định của thanh từ vật liệu có tính già và di truyền chí Cơ học số 1, 1987.

3. ТО ВАН ТАН. Устойчивость плоской формы изгиба тонкостенных стержней длительном действии нагрузки. ДЕП В ВИНИТИ АН СССР №4703 - 85, 1985.

4. ВОЛЬМИР А. С. Устойчивость деформируемых систем. М., 1967.

РЕЗЮМЕ

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕОДНОРОДНО СТАРЕЮШИХ ВЯЗКОУПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ

В данной работе на основании теории псевдобифуркационных точек исследована ічивость неоднородно стареющих вязкоупругих стержней на конечном и бескоэм интервале времени. Установлены условия устойчивости и формулы, позволяе определить критические времена.