Tạp Chí Cơ học tập XI, 1989 số 4 (trang 27—32)

Ê TÍNH TOÁN CÁC DẠNG RIÊNG TRONG HỆ NHIỀU BẬC TỰ DO CÓ CÁC THAM SỐ BIẾN ĐỔI

NGUYỄN VĂN KHANG, VŨ VĂN KHIÊM

§1. MỞ ĐẦU

ỉhiều bài toán dao động của cơ cấu và máy dẫn tới các phương trình vi phân iến đổi [1 — 5]. Trong [2] đã áp dụng phương pháp dao động có điều kiện đề n dao động của hệ một bậc tự do. Việc áp dụng phương pháp này tính toán g của hệ nhiều bậc tự do mô tả bởi hệ phương trình vi phân tuyến tính hệ số i còn ít được nghiên cứu.

'rong bài báo này trình bày việc áp dụng phương pháp dao động có điều kiện ỉ xác định các tần số riêng suy rộng, ma trận dạng riêng suy rộng của các ı tính hệ số biến đổi. Sau đó áp dụng ma trận dạng riêng suy rộng để tính) động của hệ có vế phải. Phương pháp trình bày ở đây thuận tiện khi sử ìy tính điện tử.

ÁC TẦN SỐ RIÊNG VÀ MA TRẬN DẠNG RIÊNG SUY RỘNG

:ét hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất

$$\underline{M}(t)\ddot{\vec{q}} + \underline{C}(t)\vec{q} = 0 \tag{2.1}$$

ó $\underline{M}(t)$, $\underline{C}(t)$ là các ma trận tuần hoàn của t với chu kỳ T. Giả thiết rằng hai này là các ma trận thực, đối xứng và xác định tương đương với $t \in [0, T]$.

ề giải phương trình (2.1) ta áp dụng phương pháp dao động có điều kiện ử dụng dạng nghiệm :

$$q_i = E_i(t)\sin\Phi(t) \qquad (i = 1, \ldots n) \tag{2.2}$$

$$\Phi(t) = \int_0^t \Omega(\tau)d\tau + \gamma, \quad \dot{\Phi}(t) = \Omega(t) \tag{2.3}$$

ạo hàm biểu thức (2.2) ta được

$$\dot{q}_i = E_i(t)\,\dot{\Phi}(t)\cos\Phi(t) + \dot{E}_i(t)\sin\Phi(t)$$

$$\ddot{q}_i = (\ddot{E}_i - E_i\dot{\Phi}^2)\sin\Phi(t) + (2\dot{E}_i\dot{\Phi} + E_i\ddot{\Phi})\cos\Phi(t)$$

Theo [2] ta chọn điều kiện phụ :

$$2\dot{E}_i(t)\dot{\Phi}(t) + E_i(t)\ddot{\Phi}(t) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.4}$$

Khi đó :

$$\ddot{q}_i = (\ddot{E}_i - E_i\dot{\Phi}^2)\sin\Phi(t) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.5}$$

Từ các điều kiện (2.4) ta suy ra :

$$\frac{dE_i}{E_i} = -\frac{d\Omega}{2\Omega} \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.6}$$

Tích phân lên ta nhận được

$$E_i(t) = d_i\Omega(t)^{-0,5} \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.7}$$

d_i là các hằng số tích phân.

Thế biểu thức (2.7) vào (2.2) và (2.5) ta có :

$$q_i = d_i\Omega(t)^{-0,5}\sin\Phi = a_i(t)\sin\Phi(t) \tag{2.8}$$

$$\ddot{q}_i = -d_i\Omega(t)^{-0,5}\tilde{\Omega}^2(t)\sin\Phi = -a_i(t)\tilde{\Omega}^2(t)\sin\Phi(t) \tag{2.9}$$

ıg đó :

$$a_i(t) = d_i\Omega(t)^{-0,5} \tag{2.10}$$

$$\tilde{\Omega}^2(t) = \Omega^2 - 0,75\Omega^{-2}\dot{\Omega}^2 + 0,5\Omega^{-1}\ddot{\Omega} \tag{2.11}$$

Chú ý rằng nếu

$$\left| 0,5\frac{\ddot{\Omega}}{\Omega^3} - 0,75\left(\frac{\dot{\Omega}}{\Omega^2}\right)^2 \right| \ll 1 \tag{2.12}$$

$$\tilde{\Omega}^2(t) \approx \Omega^2(t)$$

Thế các biểu thức (2.8) và (2.9) vào phương trình (2.1) ta nhận được hệ phương .h đại số :

$$[\underline{C}(t) - \tilde{\Omega}^2(t)\,\underline{M}(t)]\,\vec{a}(t) = 0 \tag{2.13}$$

Hệ phương trình (2.13) có nghiệm không tầm thường khi :

$$|\underline{C}(t) - \tilde{\Omega}^2(t)\,\underline{M}(t)| = 0 \tag{2.14}$$

Giải hệ phương trình (2.14) ta được các hàm $\tilde{\Omega}^2(t)$. Các hàm này được gọi là tần số riêng suy rộng. Giả sử phương trình (2.14) có các nghiệm đơn. Khi đó ta ı vào ký hiệu :

$$v_i(t) = \frac{a_i(t)}{a_1(t)} \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.15}$$

Thay nghiệm $\tilde{\Omega}^2(t)$ của phương trình (2.14) vào hệ phương trình (2.13) giải ra được $v_1^{(i)}(t)$, $v_2^{(i)}(t)$, ..., $v_n^{(i)}(t)$. Cho i biến thiên từ 1 đến n ta được ma trận.

$$\underline{V}(t) = \begin{bmatrix} v_1^{(1)} & v^{(2)} & \ldots & v_1^{(n)} \\ v_2^{(1)} & v_{(}^{2)} & \ldots & v_2^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_n^{(1)} & v_n^{(2)} & \ldots & v \quad) \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

Ma trận $\underline{V}(t)$ được gọi là ma trận dạng riêng suy rộng ứng với hệ phương ı (2.1).

Bằng cách chứng minh tương tự như trong [6], ta có thể chứng minh tính chất giao của các véctơ $\vec{v}^{(i)}$:

$$\vec{v}^{(i)T} \underline{M}\, \vec{v}^{(k)} = 0 \quad \text{khi } k \neq 1 \tag{2.17}$$

$$\vec{v}^{(1)T} \underline{C}\, \vec{v}^{(k)} = 0 \quad \text{khi} \neq 1 \tag{2.18}$$

§3. DAO ĐỘNG CỦA HỆ CÓ VẾ PHẢI

Bây giờ ta xét hệ phương trình vi phân tuyến tính có vế phải:

$$\underline{M}(t)\ddot{\vec{q}} + \underline{C}(t)\vec{q} = \vec{f}(t) \tag{3.1}$$

thiết $\underline{M}(t)$, $\underline{C}(t)$, $\vec{f}(t)$ tuần hoàn theo t với chu kỳ T. Các ma trận $\underline{M}(t)$ và $\underline{C}(t)$ là na trận thực đối xứng và xác định dương với $t \in [0, T]$

Thực hiện phép biến đổi

$$\vec{q} = \underline{V}(t)\vec{p} \tag{3.2}$$

ıg đó $\underline{V}(t)$ là ma trận dạng riêng suy rộng của phương trình (2.1). Đạo hàm biểu (3.2) ta được:

$$\dot{\vec{q}} = \underline{V}(t)\dot{\vec{p}} + \dot{\underline{V}}(t)\vec{p} \tag{3.3}$$

$$\ddot{\vec{q}} = \underline{V}(t)\ddot{\vec{p}} + 2\dot{\underline{V}}(t)\dot{\vec{p}} + \ddot{\underline{V}}(t)\vec{p} \tag{3.4}$$

(3.2) và (3.4) vào phương trình (3.1):

$$\underline{M}\,\underline{V}\ddot{\vec{p}} + 2\underline{M}\dot{\underline{V}}\dot{\vec{p}} + \underline{M}\ddot{\underline{V}}\vec{p} + \underline{C}\,\underline{V}\vec{p} = \vec{f}(t) \tag{3.5}$$

n bên trái phương trình (3.5) với $\underline{V}^T$:

$$\underline{V}^T\underline{M}\,\underline{V}\ddot{\vec{p}} + 2\underline{V}^T\underline{M}\dot{\underline{V}}\dot{\vec{p}} + \underline{V}^T\underline{M}\ddot{\underline{V}}\vec{p} + \underline{V}^T\underline{C}\,\underline{V}\vec{p} = \underline{V}^T\vec{f}(t) \tag{3.6}$$

Bây giờ giới hạn xét trường hợp khi ma trận dạng riêng suy rộng $\underline{V}(t)$ là ma biến thiên chậm:

$$\underline{V}(t) = \underline{V}_o + \varepsilon\underline{V}_1(t) \tag{3.7}$$

Khi đo nếu bỏ qua các vô cùng bé bậc một, phương trình (3.6) có dạng:

$$\underline{V}^T\underline{M}\,\underline{V}\ddot{\vec{p}} + \underline{V}^T\underline{C}\,\underline{V}\vec{p} \approx \underline{V}^T\vec{f}(t) \tag{3.8}$$

Theo tính chất trực giao (2.17) và (2.18) ta có:

$$\underline{V}^T\underline{M}\,\underline{V} = \begin{bmatrix} m_1^*(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2^*(t) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & & m^*(t) \end{bmatrix}$$

$$
\underline{V}^T \underline{C}\, \underline{V} = \begin{bmatrix} c_1^*(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2^*(t) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & c_n^*(t) \end{bmatrix}
$$

Hệ phương trình (3.8) bây giờ có dạng

$$
m^*(t)\ddot{p}_i + c_i^*(t)\,p_i = h_i(t) \quad (i = 1, \dots, n) \tag{3.9}
$$

ở đó $h_i(t)$ là các thành phần của véctơ

$$
\vec{h}(t) = V^T \vec{\ }(t) \tag{3.10}
$$

Các đại lượng p_i $(i = 1, \dots, n)$ được gọi là các tọa độ chính suy rộng.

Để giải các phương trình vi phân tuyến tính hệ số biến đổi tuần hoàn (3.9) ta sẽ sử dụng phương pháp dao động có điều kiện hoặc phương pháp WKB [1 – 3]

Chú ý rằng các lập luận ở trên có thể mở rộng cho trường hợp $\underline{M}(t)$, $\underline{C}(t)$ và không tuần hoàn.

§ 4. THÍ DỤ

Để làm ví dụ ta xét hệ phương trình vi phân dao động dạng:

$$
\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 + 0{,}2\sin t & 3 + 0{,}2\sin t \\ 3 + 0{,}2\sin t & 5 + 0{,}2\sin t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos t \\ 4\cos t \end{bmatrix} \tag{4.1}
$$

Phương trình tần số (2.14) bây giờ có dạng

$$
\begin{vmatrix} (3 + 0{,}2\sin t) - 2\tilde{\Omega}^2 & 3 + 0{,}2\sin t \\ 3 + 0{,}2\sin t & (5 + 0{,}2\sin t) - 2\tilde{\Omega}^2 \end{vmatrix} = 0
$$

Khai triển ta được

$$
2\tilde{\Omega}^4 - 2(4 + 0{,}2\sin t)\tilde{\Omega}^2 + 3 + 0{,}2\sin t = 0 \tag{4.2}
$$

Phương trình (4.2) có hai nghiệm :

$$
\tilde{\Omega}_1^2 = \frac{1}{2}\,(4 + 0{,}2\sin t + \sqrt{\Delta}) \tag{4.3}
$$

$$
\tilde{\Omega}_2^2 = \frac{1}{2}\,(4 + 0{,}2\sin t - \sqrt{\Delta}) \tag{4.4}
$$

ở đó

$$
\Delta = 10 + 1{,}2\sin t + 0{,}04\sin^2 t \tag{4.5}
$$

Biết các tần số riêng suy rộng, ta dễ dàng tính được ma trận dạng riêng động :

$$
\underline{V}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ v_1(t) & v_2(t) \end{bmatrix}
$$

Trong đó :

$$
v_1(t) = \frac{1 + \sqrt{\Delta}}{3 + 0{,}2\sin t}, \quad v_2(t) = \frac{1 - \sqrt{\Delta}}{3 + 0{,}2\sin t}
$$

Do các hàm $v_1(t)$, $v_2(t)$ là các hàm biến thiên chậm nên ta có thể biến đổi hệ ương trình vi phân (4.1) về dạng vế trái tách rời nhau.

Thực hiện các phép tính

$$\underline{V}^T \underline{M}\,\underline{V} = \begin{bmatrix} m_{11}^*(t) & 0 \\ 0 & m_{22}^*(t) \end{bmatrix}, \quad \underline{V}^T \underline{C}\,\underline{V} = \begin{bmatrix} c_{11}^*(t) & 0 \\ 0 & c_{22}^*(t) \end{bmatrix}, \quad \underline{V}^T \vec{f} = \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix}$$

nhận được

$$m_{11}^*(t) = 4\left(1 + \frac{1+\sqrt{\Delta}}{9 + 1{,}2\sin t + 0{,}04\sin^2 t}\right)$$

$$m_{22}^*(t) = 4\left(1 + \frac{1-\sqrt{\Delta}}{9 + 1{,}2\sin t + 0{,}04\sin^2 t}\right)$$

$$c_{11}^*(t) = 2\sqrt{\Delta} + 2(5 + 0{,}2\sin t)\left(1 + \frac{1+\sqrt{\Delta}}{9 + 1{,}2\sin t + 0{,}04\sin^2 t}\right)$$

$$c_{22}^*(t) = -2\sqrt{\Delta} + 2(5 + 0{,}2\sin t)\left(\frac{1-\sqrt{\Delta}}{9 + 1{,}2\sin t + 0{,}04\sin^2 t}\right)$$

$$h_1(t) = 2\left(1 + 2\,\frac{1+\sqrt{\Delta}}{3 + 0{,}2\sin t}\right)\cos t$$

$$h_2(t) = 2\left(1 + 2\,\frac{1-\sqrt{\Delta}}{3 + 0{,}2\sin t}\right)$$

Để thu được các phương trình đơn giản hơn, ta thực hiện một số phép biến ổi gần đúng. Trước hết chú ý rằng

$$\frac{1}{9 + 1{,}2\sin t + 0{,}04\sin^2 t} = \frac{1}{9\left(1 + \frac{1{,}2}{9}\sin t + \frac{0{,}04}{9}\sin^2 t\right)} \approx \frac{1}{9}\left(1 - \frac{0{,}4}{3}\sin t\right)$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{10 + 1{,}2\sin t + 0{,}04\sin^2 t} \approx \sqrt{10} + 0{,}06\sqrt{10}\sin t$$

ừ đó ta nhận được biểu thức gần đúng của các khối lượng suy rộng

$$m_{11}(t) = 4\left(\frac{10 + \sqrt{10}}{9} - \frac{20 + 11\sqrt{10}}{1350}\sin t\right)$$

$$m_{22}(t) = 4\left(\frac{10 - \sqrt{10}}{9} - \frac{20 - 11\sqrt{10}}{1350}\sin t\right)$$

Bằng cách tương tự chúng ta nhận được các biểu thức gần đúng :

$$c_{11}^*(t) = \frac{100 + 28\sqrt{10}}{9} + \frac{200 + 56\sqrt{10}}{675}\sin t,$$

$$c_{22}^*(t) = \frac{100 - 28\sqrt{10}}{9} + \frac{200 - 56\sqrt{10}}{675}\sin t,$$

$$h_1(t) = \frac{10 + 4\sqrt{10}}{3}\cos t - \frac{10 + \sqrt{10}}{225}\sin 2t,$$

$$h_2(t) = \frac{10 - 4\sqrt{10}}{3}\cos t - \frac{10 - \sqrt{10}}{225}\sin 2t.$$

Cuối cùng các phương trình chuyển động đã đơn giản hóa trong các tọa độ hình suy rộng có dạng :

$$4\left(\frac{10+\sqrt{10}}{9}-\frac{20+11\sqrt{10}}{1350}\sin t\right)\ddot{p}_1+\left(\frac{100+28\sqrt{10}}{9}+\frac{200+56\sqrt{10}}{675}\sin t\right)p_1$$

$$=\frac{10+4\sqrt{10}}{3}\cos t-\frac{10+\sqrt{10}}{225}\sin 2t \tag{4.7}$$

$$4\left(\frac{10-\sqrt{10}}{9}-\frac{20-11\sqrt{10}}{1350}\sin t\right)\ddot{p}_2+\left(\frac{100-28\sqrt{10}}{9}+\frac{200-56\sqrt{10}}{1350}\sin t\right)p_2$$

$$=\frac{10-4\sqrt{10}}{3}\cos t-\frac{10-\sqrt{10}}{225}\sin 2t \tag{4.8}$$

§ 5. KẾT LUẬN

Ở đây phát triển phương pháp dao động có điều kiện tính toán dao động của ác hệ tuyến tính mô tả bởi hệ phương trình vi phân tuyến tính hệ số tuần hoàn hi đó, các tần số riêng suy rộng là các hàm số, ma trận dạng riêng suy rộng cũng à ma trận hàm.

Dựa trên các thuật toán trình bày ở đây dễ dàng thiết lập các chương trình ính toán trên máy tính điện tử. Hệ chương trình này đã được xây dựng ở Tổ Cơ học ý thuyết, Đại học Bách khoa Hà nội.

Địa chỉ
Trường Đại học Bách khoa Hà nội

Nhận ngày 23-2-1989

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. ВУЛЬФСОН И.И., КОЛОВСКИЙ М.З. Нелинейные задачи динамнки машин Изд « Машиностроение », Денинград, 1968.
2. ВУЛЬФСОН И.И. Динамические расчеты цикловых механизмов. Изд. « Маши ностроение », Ленинград 1976.
3. ВУЛЬФСОН И.И. Виброактивность приводов машин разветвленной и кольцевой структуры. Изд. « Машиностроение », Ленинград 1986.
4. NGUYỄN VĂN KHANG. Dynamische Stabilitat und periodische Schwingungen in Mechanismen. Diss. B, TH Karl-marx-Stadt 1986.
5. DRESIG V., VULFSON I. I. Dynamik der Mechanismen. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1988.
6. NGUYỄN VĂN KHANG. Các phương pháp số tính dao động. Trong tập « Dao động cơ học và ứng dụng trong kỹ thuật ». Hội Cơ học Việt Nam, Hà nội 1983.

ZUSAMMENFASSUNG

ZUR MODALEN BERECHNUNG FUR SYSTEME MIT MEHREREN FREIHEITSGRADEN MIT ZEITLICH VERANDERLICHEN PARAMETERN

In dieser Arbeit wird die Methode des fiktiven Oszillators zur Bestimmung der verallgemeinerten Frequenzen und der verallgemeinerten Modalmatrix fur Systeme mit zeitlich varanderlichen Parametern angewendet. Fur den wichtigen Fall langsamer Veranderlichkeit der Modalmatrix ist es moeglich, die Entkopplung der Bewegungsgleichungen vorzunehmen.