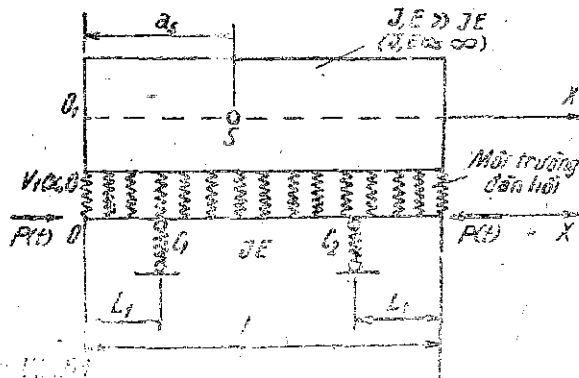


## ỔN ĐỊNH ĐỘNG CỦA MÔ HÌNH TOA XE

LÊ VIỆT GIẢNG, MICHELBERGER PAL

### §1. MÔ HÌNH TÍNH TOÁN

Trong quá trình nghiên cứu động, các phương tiện giao thông được thay bằng các mô hình đơn giản.



Hình 1

Trong trường hợp tải trọng đồng hướng dọc, mô hình động của toa xe tàu hỏa có kết cấu lắp liền kín với tính toán gần đúng được xem là hệ cầu phân, đối đàn hồi.

Chúng ta nghiên cứu một kết cấu đơn giản của 3 thanh dọc được dùng ở toa xe tàu hỏa. Với mô hình trên, chúng ta giả thiết rằng, các thanh dọc ở gầm toa xe là các phần tử có chiều dài bằng chiều dài thực tế của kết cấu, còn các thanh ngang của gầm toa xe được thay bằng một môi trường đàn hồi phân bố liên tục [3]. Hệ số  $\gamma_0$  của môi trường đàn hồi liên tục này là:

$$\gamma_0 = \frac{48EJ_K}{ba^3} \quad (1.1)$$

- Trong đó :
- $EJ_K$  - Độ cứng chống uốn của thanh ngang.
  - a - Bề rộng của toa xe.
  - b - Khoảng cách giữa 2 thanh ngang.

Trong trường hợp này, chúng ta giả thiết rằng, độ cứng chống uốn EJ của thanh dọc là hữu hạn, còn độ cứng chống uốn  $nEJ_1$  của 2 thanh dọc biên là vô hạn, nghĩa là thành biên của toa xe được xem như vật rắn. Như vậy, mô hình gồm vật rắn tuyệt đối liên kết với dầm đàn hồi bằng môi trường đàn hồi được xem là sự gắn đúng của toa xe hàng mui kín và của toa xe khách (Hình 1).

### §2. PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG

Xét chuyển động của mô hình phẳng dưới tác dụng của tải trọng động dọc trục (hình 1). Dầm chịu lực động dọc trục:

$$P(t) = P_0 + P_1\Phi(t) = \alpha\bar{P}_0 + \beta\bar{P}_1\Phi(t) \quad (2.1)$$

Trong đó  $\alpha, \beta$  các tham số hư số, các thành phần hằng số và biến số của ngoại lực được cho theo  $\alpha, \beta$ .  $\Phi(t)$  là hàm của thời gian.

Dưới tác dụng của  $P(t)$ , kết cấu bị dao động, do đó, cường độ của phản lực được hình thành trong môi trường đàn hồi liên tục giữa vật rắn tuyệt đối và dầm đàn hồi sẽ bằng:

$$q(x, t) = \gamma_0 [V_1(x, t) - V(x, t)] \quad (2.2)$$

Trong đó  $V_1(x, t), V(x, t)$  đường cong động của các độ võng của vật rắn và của dầm đàn hồi. Chúng ta biểu diễn đường cong của các độ võng của dầm đàn hồi dưới dạng chuỗi:

$$V(x, t) = \sum_{K=1}^{\infty} f_K(t) y_K(x) \quad (2.3)$$

ở đây  $f_K(t)$  biểu diễn hàm chưa biết của thời gian.

$y_K(x)$  là dạng thứ  $K$  của dao động riêng của dầm gối đàn hồi.

a) Khi nghiên cứu riêng về dao động phẳng của vật rắn, chúng ta giả thiết rằng vật rắn có 2 bậc tự do, và vị trí của nó được đặc trưng bởi 2 tọa độ. — Góc quay  $\varphi$  và chuyển vị thẳng đứng  $V_s$  của trọng tâm của nó, chúng đều là hàm của thời gian:

$$\varphi = \varphi(t), \quad V_s = V_s(t).$$

Trong trường hợp này

$$V_1(x, t) = V_s(t) - (x - a_s)\varphi(t) \quad (2.4)$$

Ở đây  $a_s$  tọa độ trọng tâm của vật rắn. Xuất phát từ các điều kiện trên chúng ta thiết lập phương trình chuyển động của vật rắn dưới dạng ma trận:

$$S\ddot{X} + K_1 X = F(t) \quad (2.5)$$

Trong đó:  $S = \begin{bmatrix} M_0 & G \\ 0 & J_m \end{bmatrix}$ ;  $K_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ;  $X = \begin{bmatrix} V_s(t) \\ \varphi(t) \end{bmatrix}$ ;  $F(t) = \gamma_0 \begin{bmatrix} \xi^* f \\ \eta^* f \end{bmatrix}$

$M_0$  — Khối lượng rút gọn của vật rắn.

$J_m$  — Mô men quán tính của vật rắn đối với trục quay đi qua trọng tâm của nó

với  $a_{11} = -\gamma_0 l$ ;  $a_{12} = a_{21} = -\frac{\gamma_0}{2} (l^2 - 2a_s l)$ ;  $a_{22} = \frac{\gamma_0}{3} (l^3 - 3a_s l^2 + 3a_s^2 l)$ ; (2.6)

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}; \quad \begin{aligned} \xi^* &= [\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots] \\ \eta^* &= [\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots] \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\xi_j = \int_0^l y_j(x) dx; \quad \eta_j = \int_0^l (a_s - x) y_j(x) dx \quad (2.8)$$

b) Trong quá trình nghiên cứu dao động phẳng của kết cấu, dầm dọc giữa được xem là dầm gối đàn hồi, và phương trình vi phân dao động của dầm đó được viết dưới dạng:

$$L(x, t) = EJ \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + P(t) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + K \frac{\partial v}{\partial t} + \gamma_0 (v - V_1) + q^*(x, t) = 0 \quad (2.9)$$

Ở đây  $V_1(x, t), V(x, t)$  — Độ võng của vật rắn và dầm đàn hồi;

$EJ = \text{const}$  — Độ cứng chống uốn của dầm đàn hồi;

$m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$  — Lực quán tính phân bố phát sinh do dao động

$K \frac{\partial v}{\partial t}$  - Phản lực phân bố phát sinh do ma sát và bộ giảm chấn.

$P(t) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$  - Lực phân bố phát sinh do tải trọng động dọc trục

$\gamma_0(v - v_0)$  - Phản lực phân bố của môi trường đàn hồi liên tục

$q^*(x, t)$  - Lực phân bố tương đương phát sinh tại các gối đàn hồi

Chúng ta tìm nghiệm của phương trình (2.9) dưới dạng của chuỗi (2.3). Các dạng của dao động riêng, như đã biết, được trục giao và được chuẩn hóa, được biểu diễn bằng quan hệ:

$$\int_0^1 m y_i(x) y_j(x) dx \begin{cases} = 1 & (i=j) \\ = 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (2.10)$$

phần trái của phương trình (2.10) biểu thị 1 hệ lực cân bằng, như vậy, có thể ứng dụng nguyên lý công ảo đối với nó. Công ảo của 1 hệ lực cân bằng bằng không. Chúng ta sẽ lấy các dạng dao động riêng  $y_j(x)$ , ( $j = 1, 2, 3, \dots$ ) làm chuyển vị ảo. Chúng ta nhận được toàn bộ công ảo bằng phép tích phân theo toàn chiều dài của dầm:

$$\int_0^1 L(x, t) y_j(x) dx = 0 \quad (j = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.11)$$

Sau khi mang (2.3) và (2.9) vào (2.1) và sau khi đơn giản hóa ta có:

$$\int_0^1 EJ \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} y_j(x) dx = \omega_j^2 f_j(t)$$

ở đây

$$\frac{d^4 y_k(x)}{dx^4} = \frac{m \omega_k^2}{EJ} y_k(x)$$

$\omega_k$  - Tần số vòng thứ k của dao động riêng của dầm đàn hồi.

$$\int_0^1 P(t) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} y_j(x) dx = - \omega_j^2 \sum_{K=1}^{\infty} [\alpha_{aK} + \beta \Phi(t) b_{jK}] f_K(t)$$

trong đó

$$a_{jK} = - \frac{\bar{P}_0}{\omega_j^2} \int_0^1 \frac{d^2 y_K(x)}{dx^2} y_j(x) dx; \quad b_{jK} = - \frac{\bar{P}_1}{\omega_j^2} \int_0^1 \frac{d^2 y_K(x)}{dx^2} y_j(x) dx; \quad (2.12)$$

( $j = 1, 2, 3, \dots$ )

$$\int_0^1 m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} y_j(x) dx = \frac{d^2 f_j(t)}{dt^2}; \quad \int_0^1 K \frac{\partial v}{\partial t} y_j(x) dx = \omega_j^2 h_j \frac{df_j(t)}{dt}$$

trong đó

$$h_j = \frac{k}{m \omega_j^2}, \quad (j = 1, 2, 3, \dots) \quad (k - \text{hệ số tắt dần}) \quad (2.13)$$

$$\int_0^1 \gamma_0 \cdot v \cdot y_j(x) dx = \omega_j^2 g_j f_j(t)$$

trong đó

$$g_j = \frac{\gamma_0}{m\omega_j^2}, \quad (j = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.14)$$

chúng ta tiếp tục xác định thành phần sau:

$$\int_0^1 q^*(x, t) y_j(x) dx$$

Khi dao động, phần lực phát sinh ở gối đàn hồi thứ  $i$  sẽ bằng:

$$\frac{1}{C_i} V(a_i, t) \quad (2.15)$$

trong đó  $a_i$  - Tọa độ của gối thứ  $i$ ,

$V(a_i, t)$  - Độ võng động của dầm ở gối thứ  $i$ ,

$C_i (C_m/N)$  - Hằng số lò xo của gối thứ  $i$ , (hình 1)

theo nguyên lý công ảo, ta có quan hệ:

$$\int_0^1 q^*(x, t) y_j(x) dx = \sum_{i=1}^m \frac{1}{C_i} V(a_i, t) y_j(a_i) \quad (2.16)$$

ở đây  $m$  - Số gối đàn hồi;

$y_j(a_i)$  - Độ võng của dầm ở gối đàn hồi thứ  $i$ , tương ứng với tần số riêng thứ  $j$

Từ quan hệ (2.16), chúng ta nhận được:

$$\int_0^1 q^*(x, t) y_j(x) dx = \omega_j^2 d_j f_j(t)$$

trong đó

$$d_j = \frac{1}{\omega_j^2} \sum_{i=1}^m \frac{1}{C_i} y_j^2(a_i); \quad (j = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.17)$$

Theo quan hệ (2.4) và (2.8) thành phần sau đây bằng:

$$\int_0^1 \gamma_0 V_1(x, t) \cdot y_j(x) dx = \gamma_0 V_s(t) \xi_j + \gamma_0 \varphi(t) \eta_j, \quad (j = 1, 2, 3, \dots)$$

Như vậy, khi thay các thành phần nhận được vào (2.11), chúng ta nhận được phương trình ma trận sau:

$$C \frac{d^2 f}{dt^2} + H \frac{df}{dt} + [E + D + G - \alpha A - \beta \Phi(t) B] f = C \xi \gamma_0 V_s(t) + C \eta \gamma_0 \varphi(t) \quad (2.18)$$

trong đó  $C, H, D, G$  - Các ma trận chéo,

$E$  - Ma trận đơn vị,

$A, B$  - Các ma trận vuông

$f, \xi, \eta$  - Các véc tơ [2, 4]

Chúng ta dẫn vào các ký hiệu:

$K = C^{-1} H$  - Ma trận chéo

$$\Phi(t) = C^{-1} [E + D + G - \alpha A - \beta \Phi(t) B]$$

$\Phi(t)$  - Ma trận đối xứng, phụ thuộc vào thời gian, lúc này phương trình (2.18) có dạng:

$$\frac{d^2f}{dt^2} + K \frac{df}{dt} + \Phi(t)f = \xi\gamma_0 V_s(t) + \eta\gamma_0 \varphi(t) \quad (2.21)$$

Từ phương trình (2.5) và (2.21) chúng ta nhận được hệ phương trình chuyển động của kết cấu phẳng (hình 1) dưới dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} M_0 & 0 & 0 \\ 0 & J_m & 0 \\ 0 & 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{V}_s \\ \ddot{\varphi} \\ \ddot{f} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_s \\ \dot{\varphi} \\ \dot{f} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & -\gamma_0 \xi^* \\ a_{21} & a_{22} & -\gamma_0 \eta^* \\ -\gamma_0 \xi & -\gamma_0 \eta & \Phi(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s \\ \varphi \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

### §3. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG (2.22) BIÊN ĐỘ DAO ĐỘNG

Khi dùng giá trị riêng tổng quát và véctơ riêng tổng quát [5] có thể dẫn hệ (2.22) về một hệ phương trình vi - tích phân:

$$\begin{aligned} C \frac{d^2f}{dt^2} + H \frac{df}{dt} + [E + D + G - \alpha A - \beta \Phi(t)B]f = \\ = \sum_{i=1}^n \left[ q_i \cos \sqrt{\lambda_i} t + Q_i \int_0^t f(\tau) \sin \sqrt{\lambda_i} (t - \tau) d\tau \right] \end{aligned} \quad (3.1)$$

Trong đó  $\frac{n}{n}$  - Số bậc tự do của vật rắn,  
 $\sqrt{\lambda_i}$  - Tần số dao động riêng của vật rắn,  
 $q_i$  - Các véctơ,  
 $Q_i$  - Các ma trận vuông [4]

Hệ (3.1), nói một cách chính xác, là vô hạn. Nhưng ở đây chúng ta hạn chế bởi 1 số hữu hạn của các phương trình vi tích phân, mỗi lần chọn số này, số này phụ thuộc với yêu cầu của độ chính xác của tính toán.

Khi sử dụng ma trận cấp một, chúng ta cũng đạt tới độ chính xác thỏa mãn đối với tính toán thực tế.

Dựa vào phương trình thuần nhất tương ứng với hệ (3.1). Trong trường hợp  $\Phi(t)$  là hàm chu kỳ của thời gian, chúng ta xác định được miền mất ổn định động [1], [2]. Phương trình (3.1) được giải nhờ phương pháp biến phân của Галеркин [1, 4].

Trên cơ sở giải (3.1), chúng ta xác định quan hệ giữa tần số của tải trọng động dọc trục với biên độ dao động của dầm đàn hồi. Nhờ vậy, khảo sát được các yếu tố chính ảnh hưởng đến giá trị biên độ dao động của dầm dọc giữa trong miền cộng hưởng tham số.

## § 4. THÍ DỤ

Trên cơ sở phương pháp đã được nghiên cứu ở trên, chúng ta tính toán ở động của 1 toa xe thực:

Các số liệu:

$G = 50$  tấn — trọng lượng toa xe.

$L = 2.000\text{cm}$  — toàn chiều dài toa xe.

$L_1 = 200\text{cm}$  — khoảng cách từ nút dầm đến gối đàn hồi.

$J = 6.000\text{cm}^4$  — mômen quán tính của dầm dọc giữa.

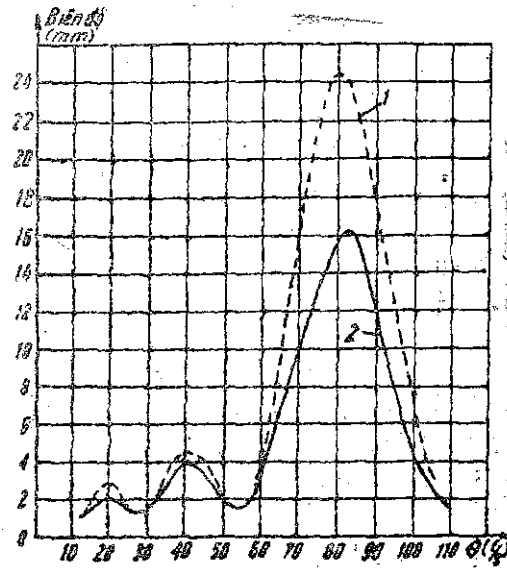
$J_k = 500\text{cm}^4$  — mômen quán tính của dầm ngang.

$a = 300\text{cm}$  — chiều rộng của toa xe.

$b = 100\text{cm}$  — khoảng cách giữa 2 thanh ngang ở gầm toa xe.

$k = 400\text{N} \cdot \text{S}/\text{cm}$  — hệ số cản của bộ phận chống rung.

$f = 0,8 + 1,251/s$  — tần số của các lò xo được ứng dụng ở các toa xe khác nhau.



Hình 2. Biểu đồ biên độ

$L = 2.000\text{cm}$ ,  $L_1 = 200\text{cm}$ ,  $J = 6.000\text{cm}^4$ ,  $E = 2,1 \cdot 10^9\text{N}/\text{cm}^2$ ,  $\Omega_1 = 86\text{S}^{-1}$ ,  $\sqrt{\lambda_1} = 28,5\text{S}^{-1}$ ,  
(1)  $\gamma = 6438\text{N}/\text{cm}$ ; (2)  $\gamma = 14486\text{N}/\text{cm}$ .

Trên cơ sở nghiệm của phương trình (3.1), chúng ta nhận được quan hệ giữa  $\theta$  (tần số tải trọng động dọc trục) với biên độ dao động ngang của dầm dọc giữa đối với toa xe thực trên. Quan hệ này được biểu diễn trên hình 2.

Địa chỉ:  
Trường đại học Bách Khoa Đà Nẵng

Nhận ngày 15-10 1988

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. БОЛОТИН В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. Гостехиздат. Москва 1956.
2. ЛЕ ВЪЕТ ЗАНГ. Исследование динамической устойчивости (параметрического резонанса) неразрезного стержня на упругих опорах PERIODICA POLYTECHNICA Vol. 7. №1, Budapest, 1979.
3. MICHELBERGER PAL. Válogatott Fejezetek a könnyűszerkezetek szilárdságtanából Tankönyv kiadó, Bp. 1968.
4. ROZSA PAL. Linearis algebra és alkalmazásai, Műszakiadó, Bp. 1974.

## РЕЗЮМЕ

### ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ МОДЕЛИ ВАГОНА

Приводится методика исследования динамической устойчивости модели железнодорожного вагона при действии продольной динамической нагрузки. Определяется амплитуда колебания в области параметрического резонанса. Рассмотрен пример расчета.