Tạp chí Cơ học Tập XI, 1989 số 3 (trang 60 — 63)

VỀ MỘT GIẢ THIẾT VA CHẠM

NGUYỄN VĂN ĐÌNH

§ ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong [1], dựa vào nguyên lý phù hợp, bài toán va chạm được xem xét với giả thiết là ở tất cả các liên kết va chạm chỉ xảy ra hai giai đoạn nén—hồi phục, chuyển tiếp qua nhau tại cùng một thời điểm (do thừa nhận — trong công trình trên — các bất đẳng thức (1,14) đồng thời đổi chiều thành (1.15)). Tuy chưa tổng quát, giả thiết đó có thể được chấp nhận trong những điều kiện nhất định. Điều đáng chú ý là nếu xuất phát từ giả thiết đó, có thể tìm lại những kết quả quen biết như các hệ thức động học Niutơn, định lý Cácnô và nguyên lý Gaoxơ. Đó là nội dung trình bày dưới đây theo phương pháp cổ điển trong Cơ giải tích.

§ 1. HỆ PHƯƠNG TRÌNH VA CHẠM

Để đơn giản, xét cơ hệ lý tưởng, hôlônôm, giữ, dừng, có n bậc tự do, chịu va chạm tại thời điểm đầu t_0 với m ($m \leqslant n$) liên kết lý tưởng, hôlônôm, dừng không giữ (các liên kết va chạm) :

$$f_r(q) \geqslant 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, m) \tag{1.1}$$

trong đó : q — véctơ (cột) tọa độ suy rộng $n \times 1$.

Đối với liên kết thứ r, phản lực suy rộng có biểu thức $\lambda_r \text{grad} f_r$. Nhưng trong Cơ lý thuyết, va chạm được xem là tức thời, vị trí không thay đổi, các lực va chạm là cực lớn và được đánh giá bởi xung va chạm. Như thế véctơ gradf_r xem là hằng, các nhân tử Lagrăng $\lambda_r(t)$ có giá trị cực lớn và được đánh giá bằng xung nhân tử xây dựng như xung va chạm.

Ký hiệu : k_r — hệ số hồi phục và Λ_r, $\Lambda_{r,\,hồi}$ — các xung nhân tử tương ứng hai giai đoạn nén — hồi phục của liên kết thứ r. Từ quan hệ giữa các xung va chạm suy ra quan hệ giữa các xung nhân tử :

$$\Lambda_{r,\,hồi} = k_r \Lambda_r \qquad (r = 1, 2, \ldots m) \tag{1.2}$$

Đối với toàn hệ, tính hồi phục được đặc trưng gọn trong hệ thức :

$$\Lambda_{hồi} = K\Lambda \tag{1.3}$$

trong đó : Λ, $\Lambda_{hồi}$ — các véctơ xung nhân tử $m \times 1$ tương ứng hai giai đoạn nén và hồi phục với các yếu tố Λ_r, $\Lambda_{r,hồi}$ $(r = 1, 2, ..., m)$. K — ma trận hồi phục, ma trận chéo $m \times m$ với các yếu tố k_r.

Hệ phương trình va chạm của giai đoạn nén gồm hệ phương trình Lagrăng :

$$A(\dot{q}_* - \dot{q}_o) = F \cdot \Lambda \tag{1.4}$$

và điều kiện động học thể hiện sự tương thích của vận tốc cuối giai đoạn nén với các liên kết va chạm

$$F' \cdot \dot{q}_* = 0 \text{ hay } F' \cdot (\dot{q}_* - \dot{q}_o) = - F' \cdot \dot{q}_o \tag{1.5}$$

trong đó : A — ma trận $n \times n$, đối xứng, xác định dương trong biểu thức động năng cơ hệ ; F — ma trận chữ nhật $n \times m$ với cột thứ r là véctơ $F_r = \text{grad} f_r$; $\dot{q}_o$, $\dot{q}_*$ — các véctơ vận tốc suy rộng tương ứng thời điểm đầu va chạm t_o và cuối giai đoạn nén ; dấu « ' » — ký hiệu chuyển vị.

Ở giai đoạn hồi phục, có hệ Lagrăng :

$$A(\dot{q}_1 - \dot{q}_*) = F \cdot K \cdot \Lambda \tag{1.6}$$

trong đó $\dot{q}_1$ — véctơ vận tốc suy rộng cuối va chạm, đại lượng ẩn. Như thế bài toán va chạm cơ hệ với giả thiết hai giai đoạn nén — hồi phục sẽ được giải nhờ hệ (1.4) (1. 5) (1. 6).

Từ (1.4) rút ra :

$$\dot{q}_* - \dot{q}_o = A^{-1} \cdot F \cdot \Lambda \tag{1.7}$$

trong đó số mũ -1 là ký hiệu nghịch đảo.

Đem thay (1.7) vào (1.5) với chú ý rằng $F'A^{-1}F$ là ma trận Gram $m \times m$ đối xứng, có nghịch đảo [2] nên có thể tìm được :

$$\Lambda = -(F'A^{-1}F)^{-1}F'\dot{q}_o. \tag{1.8}$$

Biến thiên của vận tốc suy rộng trong quá trình va chạm rút ra từ (1.6) :

$$\dot{q}_1 - \dot{q}_o = \dot{q}_1 - \dot{q}_* + \dot{q}_* - \dot{q}_o = A^{-1}FK\Lambda + A^{-1}F\Lambda =$$
$$= -A^{-1}F(E + K)(F'A^{-1}F)F'\dot{q}_o \tag{1.9}$$

trong đó : E — ma trận đơn vị $m \times m$.

§2. HỆ THỨC ĐỘNG HỌC NIUTƠN VÀ ĐỊNH LUẬT CACNÔ

Chúng ta đã thiết lập hệ phương trình va chạm (1.4) (1.5), (1.6) của từng giai đoạn va chạm. Từ đó có thể lập hệ phương trình Lagrăng của toàn quá trình va chạm và hệ thức động học cuối va chạm. Thực vậy, cộng hai vế tương ứng của (1.4), (1.6) sẽ được hệ phương trình Lagrăng của toàn quá trình va chạm :

$$A(\dot{q}_1 - \dot{q}_o) = F \cdot (E + K) \cdot \Lambda \tag{2.1}$$

Nhân trái hai vế của (1.9) với F' và chú ý đến tính giao hoán của tích các ma trận đối xứng $(E + K)$ và $(F'A^{-1}F)$ có thể viết :

$$F' \cdot (\dot{q}_1 - \dot{q}_o) = -(F'A^{-1}F)(E + K)(F'A^{-1}F)^{-1}F'\dot{q}_o =$$
$$= -(E + K)(F'A^{-1}F)(F'A^{-1}F)^{-1}F'\dot{q}_o$$

Vậy
$$F'(\dot{q}_1 - \dot{q}_o) = -(E + K)F'\dot{q}_o \text{ hay } F' \cdot \dot{q}_1 = -KF'\dot{q}_o \tag{2.2}$$

Đó là hệ thức động học Niutơn cho điều kiện động học cuối va chạm. Viết khai triển, (2.2) có dạng quen biết :

$$F_r' \cdot (\dot{q}_1 - \dot{q}_o) = -(1 + k_r)F' \cdot \dot{q}_o \text{ hay } F_r' \cdot \dot{q}_1 = -k_r F_r' \dot{q}_o \tag{2.3}$$

Trường hợp va chạm mềm :

$$K = 0,\ A(\dot{q}_1 - \dot{q}_o) = F \cdot \Lambda,\ F' \cdot \dot{q}_1 = 0 \tag{2.4}$$

Trường hợp va chạm đàn hồi với cùng một hệ số hồi phục k :

$$K = kE,\ A(\dot{q}_1 - \dot{q}_o) = (1 + k)F \cdot \Lambda,\ F' \cdot \dot{q}_1 = -kF'\dot{q}_o \tag{2.5}$$

Từ hệ (2.1) (2.2) có thể suy ra định luật động năng Cácnô. Ký hiệu T_o, T_1 — động năng đầu và cuối va chạm, T_Δ — động năng tương ứng vận tốc mất $(\dot{q}_o - \dot{q}_1)$. Chúng ta có :

$$T_o = \frac{1}{2}\dot{q}_o'A\dot{q}_o,\ T_1 = \frac{1}{2}\dot{q}_1'A\dot{q}_1,\ T_\Delta = \frac{1}{2}(\dot{q}_o - \dot{q}_1)'A(\dot{q}_o - \dot{q}_1) \tag{2.6}$$

Chú ý đến (2.1) có thể tính :

$$T_o - T_1 = \frac{1}{2}\dot{q}_o'A\dot{q}_o - \frac{1}{2}\dot{q}_1'A\dot{q}_1 = \frac{1}{2}(\dot{q}_o - \dot{q}_1)'A(\dot{q}_o - \dot{q}_1) - \dot{q}_1'A\dot{q}_1 + \dot{q}_1'A\dot{q}_o =$$

$$= T_\Delta - \dot{q}_1'A(\dot{q}_1 - \dot{q}_o) = T_\Delta - \dot{q}_1'F(E + K)\Lambda \tag{2.7}$$

Chuyển vị của các hệ thức (2.2) cho phép biểu diễn $\dot{q}_1'F$ qua $\dot{q}_o'F$ rồi qua $(\dot{q}_o - \dot{q}_1)'F$ nên (2.7) trở thành :

$$T_o - T_1 = T_\Delta + (\dot{q}_o - \dot{q}_1)'FK\Lambda \tag{2.8}$$

Thay Λ bởi (1.8) rồi biểu diễn $F'\dot{q}_o$ qua $F'(\dot{q}_o - \dot{q}_1)$ chúng ta được định luật Cácnô :

$$T_o - T_1 = T_\Delta - (\dot{q}_o - \dot{q}_1)'FK(F'A^{-1}F)^{-1}(E + K)^{-1}F'(\dot{q}_o - \dot{q}_1) \tag{2.9}$$

Trường hợp va chạm mềm, công thức có dạng quen biết :

$$T_o - T_1 = T_\Delta \tag{2.10}$$

Trường hợp các liên kết va chạm có cùng hệ số hồi phục k, đơn giản hơn là từ (2.1) (2.8) rút ra :

$$T_o - T_1 = T_\Delta + (\dot{q}_o - \dot{q}_1)'Fk\Lambda = T_\Delta - (\dot{q}_o - \dot{q}_1)'\frac{k}{1 + k}A(\dot{q}_o - \dot{q}_1) =$$

$$= T_\Delta - \frac{2k}{1 + k}T_\Delta = \frac{1 - k}{1 + k}T_\Delta \tag{2.11}$$

§3. NGUYÊN LÝ GAOXƠ TRONG VA CHẠM

Từ hệ (2.1) (2.2) còn có thể thiết lập nguyên lý Gaoxơ trong va chạm. Thực vậy, gọi vận tốc suy rộng khả dĩ cuối va chạm — ký hiệu $\dot{q}_\delta$ là tập các vận tốc suy rộng thỏa mãn hệ thức :

$$F'\dot{q}_\delta = -K \cdot F' \cdot \dot{q}_o \tag{3.1}$$

Từ (2.2) dễ nhận thấy vận tốc suy rộng thực cuối va chạm thuộc tập các vận tốc suy rộng khả dĩ nói trên và do đó :

$$F'(\dot{q}_1 - \dot{q}_\delta) = 0 \qquad (3.2)$$

Gọi vận tốc mất khả dĩ là hiệu $(\dot{q}_o - \dot{q}_\delta)$, động năng tương ứng vận tốc mất khả dĩ là đại lượng :

$$T_\delta = \frac{1}{2}(\dot{q}_o - \dot{q}_\delta)' A(\dot{q}_o - \dot{q}_\delta) \qquad (3.3)$$

Tiến hành biến đổi :

$$T_\delta = \frac{1}{2}(\dot{q}_o - \dot{q}_\delta)' A(\dot{q}_o - \dot{q}_\delta) = \frac{1}{2}(\dot{q}_o - \dot{q}_1 + \dot{q}_1 - \dot{q}_\delta)' A(\dot{q}_o - \dot{q}_1 + \dot{q}_1 - \dot{q}_\delta) =$$

$$= \frac{1}{2}(\dot{q}_o - \dot{q}_1)' A(\dot{q}_o - \dot{q}_1) + \frac{1}{2}(\dot{q}_1 - \dot{q}_\delta)' A(\dot{q}_1 - \dot{q}_\delta) - (\dot{q}_\delta - \dot{q}_1)' A(\dot{q}_1 - \dot{q}_o) =$$

$$= T_\Delta + \frac{1}{2}(\dot{q}_1 - \dot{q}_\delta)' A(\dot{q}_1 - \dot{q}_\delta) - (\dot{q}_\delta - \dot{q}_1)' A(\dot{q}_1 - \dot{q}_o) \qquad (3.4)$$

Chú ý đến (2.1) và hệ thức chuyển vị của (3.2) chúng ta có :

$$(\dot{q}_\delta - \dot{q}_1)' A(\dot{q}_1 - \dot{q}_o) = (\dot{q}_\delta - \dot{q}_1)' F(E + K)\Lambda = 0 \qquad (3.5)$$

Do đó (3.4) trở thành :

$$T_\delta - T_\Delta = \frac{1}{2}(\dot{q}_1 - \dot{q}_\delta)' A(\dot{q}_1 - \dot{q}_\delta) \qquad (3.6)$$

Vế phải của (3.6) là dạng toàn phương xác định dương nghĩa là luôn dương và chỉ triệt tiêu khi $(\dot{q}_1 - \dot{q}_\delta)$ triệt tiêu. Từ đó có thể phát biểu :

Nguyên lý Gaoxơ. *Sau va chạm, vận tốc suy rộng thực là vận tốc suy rộng khả dĩ làm cực tiểu động năng tương ứng vận tốc mất suy rộng khả dĩ.*

KẾT LUẬN

Những nội dung vừa trình bày cho phép rút ra một nhận xét : giả thiết sử dụng trong [1] về giai đoạn nén — hồi phục chuyển tiếp qua nhau đồng thời ở mọi liên kết va chạm sẽ dẫn đến hệ thức động học Niutơn của riêng từng liên kết va chạm và trong điều kiện đó các định lý giảm động năng và nguyên lý Gaoxơ có dạng quen biết.

Địa chỉ
Viện Cơ học Viện KHVN

Nhận ngày 29/12/1988.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. ĐỖ SANH — Bài toán va chạm của các hệ cơ học. Tạp chí Cơ học số 3, 1987.
2. ГАНТМАХЕР Ф. Р. Теория матриц. Изд. «Наука» Москва 1966.

RÉSUMÉ

SUR UNE HYPOTHÈSE DU CHOC

Dans cet article, est faite une remarque sur l'hypothèse du choc implicitement proposée dans [1]. C' est que de cette hypothèse pouvent être déduites les relations de Newton ainsi que la théorème de Carnot et le principe de Gauss.

ẢNH HƯỞNG CỦA TRAO ĐỔI... (Tiếp trang 32)

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. НИГМАТУЛИН Р, И. Динамика многофазных сред. Наука, М., 1987.

2. ЗЫОНГ НГОК ХАЙ. МАМЫТОВ А. Об эффекте усиления ударных волн в пузырьковых жидкостях. Отчет НИИ мех. МГУ, №3835, М., 1987.

3. МИРЗАДЖАНЗАДЕ А. Х., НИГМАТУЛИН Р. И., ПЫЖ В. А. Об аномальном повышении давления при ударных нагружениях водной суспензии бетонитовой глины, Докл. АН СССР, Т. 278. №6, М. 1984.

4. NGUYỄN VĂN ĐIỆP, DƯƠNG NGỌC HẢI và cộng sự. Công nghệ khai thác vận chuyển dầu nhiều parafin có độ nhớt cao mỏ Bạch Hổ. Báo cáo Viện Cơ học Viện KHVN, Hà nội, 1987 (tiếng Việt và tiếng Nga).

SUMMARY

INFLUENCE OF HEAT – MASS TRANSFER ON WAVE DYNAMICS OF TWO – PHASE MEDIA

In the framework of the methods of multiphase media mechanics the wave dynamic of vapor — or gas — liquid mixtures is investigated. It shows that the heat — mass transfer plays an important role in the considered process.