Tạp chí Cơ học Tập XI, 1989, số 3 (trang 52 – 59)

VỀ ỔN ĐỊNH CỦA MẶT PHÂN CÁCH GIỮA HAI CHẤT LỎNG CÙNG CHUYỂN ĐỘNG TRONG KÊNH PHẲNG
PHẦN II – BÀI TOÁN PHI TUYẾN

TRẦN VĂN TRẢN

Trong bài này chúng tôi xét ổn định phi tuyến của bài toán đặt ra ở §1 của phần I. Sử dụng phương pháp nhiễu tỉ lệ, chúng tôi đã nhận được phương trình tiến hóa của nhiễu. Từ đó có thể kết luận khi nào thì nhiễu ban đầu có biên độ hữu hạn sẽ tắt hoặc tăng, tùy thuộc vào thông số hình học và cơ học của bài toán đặt ra. Một số tính toán cụ thể cho các thông số đó cũng được đưa ra ở đây.

§1. ĐẶT BÀI TOÁN

Như chúng ta đã biết kết quả của bài toán tuyến tính chỉ cho ta điều kiện đủ để dòng chảy mất ổn định. Hơn thế nữa bài toán tuyến tính chỉ còn có hai yếu điểm là : thứ nhất nó không phụ thuộc vào điều kiện ban đầu của nhiễu, thứ hai nhiễu tăng hoặc tắt theo quy luật hàm số mũ theo mọi thời gian, điều này rõ ràng là không đúng với thực tế nhất là trong trường hợp dòng chảy mất ổn định. Để khắc phục hai điểm đó người ta đã xây dựng lý thuyết phi tuyến yếu, bắt đầu từ những công trình [1 – 3]. Cho đến hiện nay chưa có thể xây dựng được một lý thuyết phi tuyến mạnh cho lý thuyết ổn định thủy khí ngoài lý thuyết phi tuyến yếu và phương pháp năng lượng. Đối với dòng chảy có mặt thoáng hoặc mặt phân cách bài toán phức tạp lên nhiều lần bởi lẽ tồn tại thêm một biên không xác định. Bài toán này cho chất lỏng lý tưởng (mất ổn định Kelvin – Hemhônxơ) đã có những công trình xây dựng lý thuyết phi tuyến yếu khá tốt [4, 5]. Đã có những cố gắng xây dựng lý thuyết phi tuyến mạnh cho trường hợp này xuất phát từ nguyên lý biến phân, song kết quả còn hạn chế [6]. Tổng quan về vấn đề này có thể xem trong [7].

Ở đây chúng ta sẽ xét bài toán hai chiều về ổn định phi tuyến yếu của dòng chảy gồm hai chất lỏng ở trong kênh phẳng. Nhiễu ở đây ta coi nó có biên độ không phải là vô cùng bé như trong bài toán tuyến tính, song nó cũng chưa phải là lớn bất kỳ. Vì lẽ đó trong phương trình cũng như điều kiện biên của bài toán ta sẽ giữ lại các số hạng bậc ε^3 trở xuống và bỏ qua tất cả các số hạng bậc từ ε^4 trở lên (ε có thể coi là biên độ ban đầu của nhiễu). Sự tồn tại của nhiễu loại này có thể hiểu theo hai cách như sau : ở giá trị $R_e < R_{e*}$ (R_{e*} là số Rơ-nôn tới hạn theo lý thuyết tuyến tính) nhiễu được đưa vào dòng chảy với biên độ ban đầu $\sim \varepsilon$ còn với $R_e > R_{e*}$ thì nhiễu vô cùng bé bắt đầu tăng khi dòng chảy mất ổn định. Sự gia tăng biên độ tuân theo qui luật hàm số mũ và sau một khoảng thời gian là t_1 nào đó, biên độ đó tỉ lệ với $e^{\alpha c_i t_1}$ và khi đó ảnh hưởng của phi tuyến đã có tác dụng rõ rệt đến bức tranh phát triển tiếp theo của dòng chảy. Lúc đó ta có thể nói $\varepsilon \sim e^{\alpha c_i t_1}$ và tiếp theo từ thời điểm t_1 trở đi mô hình phi tuyến yếu sẽ làm việc.

Để thuận tiện cho việc tính toán về sau này, ở đây ta lấy vận tốc trên bề mặt phân cách và độ dày lớp dưới làm các đại lượng đặc trưng. Khi đó mặt cắt vận tốc của dòng chảy chính có thể viết như sau :

$$U_1 = A_1 y^2 + B_1 y + 1 \,; \quad 0 \leqslant y \leqslant d$$
$$U_2 = A_2 y^2 + B_2 y + 1 \,; \quad -1 \leqslant y \leqslant 0 \tag{1.1}$$

với

$$A_1 = -d^{-2}[1 + (1 + \omega/d)^{-1}(\omega d^{-2} - 1)]^{-1} = -(d + \omega)/d\omega(d + 1),$$
$$A_2 = \omega A_1,\; B_1 = (d^2 - \omega)/d\omega(d + 1),\; B_2 = \omega B_1,\; \omega = \mu_1/\mu_2,\; d = h_1/h_2 \tag{1.2}$$

Giả sử dòng chảy (1.1) bị kích động, ta gọi hàm dòng của chuyển động là $\psi(x, y, t)$. Khi đó ta có thể viết :

$$\psi(x, y, t) = \begin{cases} U_1 y + \varphi^1(x, y, t) = \psi^1 \,; & \eta(x, t) \leqslant y \leqslant d \\ U_2 y + \varphi^2(x, y, t) = \psi^2 \,; & -1 \leqslant y \leqslant \eta(x, t) \end{cases} \tag{1.3}$$

Từ phương trình Nave-Stốc ta có :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi) + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2\psi) - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2\psi) = \varkappa\nabla^4\psi \tag{1.4}$$

$\varkappa = 1$ cho lớp dưới và $\varkappa = \omega/\gamma R_e$ cho lớp trên ($\gamma = \rho_1/\rho_2$) các điều kiện biên :

điều kiện dính trên thành cứng $\dfrac{\partial\psi}{\partial x} = \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\Big|_{y=d\,;\,-1} = 0$ (1.5)

điều kiện trên mặt phân cách [8] $y = \eta(x, t)$

$$\frac{\partial\psi^1}{\partial y} = \frac{\partial\psi^2}{\partial y} \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial\psi^1}{\partial x} = \frac{\partial\psi^2}{\partial x}, \tag{1.7}$$

$$(\sigma^1_{xx} - \sigma^1_{yy})n_x n_y + \sigma^1_{xy}(n_y^2 - n_x^2) = (\sigma^2_{xx} - \sigma^2_{yy})n_x n_y + \sigma^2_{xy}(n_y^2 - n_x^2), \tag{1.8}$$

$$\sigma^1_{xx}n_x^2 + \sigma^1_{yy}n_y^2 + 2\sigma_{xy}n_x n_y = p_1 - p_2 + \sigma^2_{xx}n_x^2 + \sigma^2_{yy}n_y^2 + 2\sigma^2_{xy}n_x n_y - T/R \tag{1.9}$$

trong đó : $\sigma^m_{xx} = 2\mu_m\dfrac{\partial u^m}{\partial x}$, $\sigma^m_{yy} = 2\mu_m\dfrac{\partial v^m}{\partial y}$, $\sigma^m_{xy} = \mu_m\left(\dfrac{\partial u^m}{\partial y} + \dfrac{\partial v^m}{\partial x}\right)$.

$$n_x = -\eta_x(1 + n_x^2)^{-1/2}, \quad n_y = (1 + \eta_x^2)^{-1/2}, \quad R = \eta_{xx}(1 + \eta_x^2)^{-3/2} \tag{1.10}$$

và điều kiện động học :

$$-\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x} \tag{1.11}$$

§2. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Để giải bài toán (1.4) – (1.11) chúng ta sử dụng phương pháp nhiễu tỉ lệ bằng cách đưa vào các biến mới như sau :

$$\xi = \varepsilon^p(x - c_0 t)\,; \quad \tau = \varepsilon^q t$$

trong đó p, q tạm thời là hai số tự nhiên sẽ xác định sau, c_0 là hằng số cũng được xác định sau. Ta biểu diễn hàm φ^k và η ở dạng

$$\varphi^k(x, y, t) = \varepsilon\varphi_1^k(\xi, \tau) + \varepsilon^2\varphi_2^k(\xi, \tau) + \varepsilon^3\varphi_3^k(\xi, \tau) + \ldots$$
$$\eta(x, y, t) = \varepsilon E_1(\xi, \tau) + \varepsilon^2 E_2(\xi, \tau) + \varepsilon^3 E_3(\xi, \tau) + \ldots \tag{2.1}$$

Bây giờ chúng ta viết lại phương trình (1.4) và các điều kiện biên (1.5) — (1.11) theo các biến ξ, τ chúng ta sẽ thấy trường hợp $p = 1$, $q = 2$ là thích hợp bởi vì khi đó phương trình và điều kiện biên tại các bậc theo ε sẽ cho phép chúng ta giải bằng phương pháp tách biến và nhận được lời giải giải tích của chúng. Ở bậc $0(\varepsilon^{\circ})$ ta nhận được lời giải (1.1)

Ở bậc $0(\varepsilon)$ ta có bài toán sau:

$$\frac{\partial^4\varphi_1^1}{\partial y^4} = \frac{\partial^4\varphi_1^2}{\partial y^4} = 0 \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial\varphi_1^1}{\partial\xi} = \frac{\partial\varphi_1^1}{\partial y}\bigg|_{y=d} = 0 \,; \quad \frac{\partial\varphi_1^2}{\partial\xi} = \frac{\partial\varphi_1^2}{\partial y}\bigg|_{y=-1} = 0. \tag{2.4}$$

tại $y = 0$

$$E_1B_1 + \frac{\partial\varphi_1^1}{\partial y} = E_1B_2\frac{\partial\varphi_1^2}{\partial y}\,, \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial\varphi_1^1}{\partial\xi} = \frac{\partial\varphi_1^2}{\partial\xi}\ (2.6),\ \omega\frac{\partial^2\varphi_1^1}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\varphi_1^2}{\partial y^2}\ (2.7),\ \omega\frac{\partial^3\varphi_1^1}{\partial y^3} = \frac{\partial^3\varphi_1^2}{\partial y^3} \tag{2.8}$$

điều kiện động học có dạng

$$\frac{\partial\varphi_1^1}{\partial\xi} = (c_o - 1)E_{1\xi} \tag{2.9}$$

Ở bậc $0(\varepsilon^2)$ ta có bài toán

$$\frac{\partial^4\varphi_2^1}{\partial y^4} = \frac{\gamma Re}{\omega}\left[(U_1 - c_o)\frac{\partial^3\varphi_1^1}{\partial\xi\partial y^2} - U_1''\frac{\partial\varphi_1^1}{\partial\xi}\right] \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial^4\varphi_2^2}{\partial y^4} = Re\left[(U_2 - c_o)\frac{\partial^3\varphi_1^2}{\partial\xi\partial y^2} - U_2''\frac{\partial\varphi_1^2}{\partial\xi}\right] \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial\varphi_2^1}{\partial\xi} = \frac{\partial\varphi_2^1}{\partial y}\bigg|_{y=d} = 0,\quad \frac{\partial\varphi_2^2}{\partial\xi} = \frac{\partial\varphi_2^2}{\partial y}\bigg|_{y=-1} = 0 \tag{2.12}$$

tại $y = 0$

$$B_1E_2 + E_1^2A_1 + E_1\frac{\partial^2\varphi_1^1}{\partial y^2} + \frac{\partial\varphi_2^1}{\partial y} = B_2E_2 + E_1^2A_2 + E_1\frac{\partial^2\varphi_1^2}{\partial y^2} + \frac{\partial\varphi_2^2}{\partial y} \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial\varphi_2^1}{\partial\xi} + E_1\frac{\partial^2\varphi_1^1}{\partial\xi\partial y} = \frac{\partial\varphi_2^2}{\partial\xi} + E_1\frac{\partial^2\varphi_1^2}{\partial\xi\partial y} \tag{2.14}$$

$$\omega\left(\frac{\partial^2\varphi_2^1}{\partial y^2} + E_1\frac{\partial^3\varphi_1^1}{\partial y^3}\right) = \frac{\partial^2\varphi_2^2}{\partial y^3} + E_1\frac{\partial^3\varphi_1^2}{\partial y^3} \tag{2.15}$$

$$\gamma\left[(1 - c_o)\frac{\partial^2\varphi_1^1}{\partial\xi\partial y} - B_1\frac{\partial\varphi_1^1}{\partial\xi}\right] - \frac{\omega}{Re}\frac{\partial^3\varphi_2^1}{\partial y^3} = (1 - c_o)\frac{\partial^2\varphi_1^2}{\partial\xi\partial y} -$$

$$- B_2\frac{\partial\varphi_1^2}{\partial\xi} - \frac{1}{Re}\frac{\partial^3\varphi_2^2}{\partial y^3} - FE_{1\xi} \tag{2.16}$$

điều kiện động học:

$$E_{1\tau} + (1 - C_o)E_{2\xi} + B_1E_1E_{1\xi}' + E_{1\xi}'\frac{\partial\varphi_1^1}{\partial y} = -\left(\frac{\partial\varphi_2^1}{\partial\xi} + E_1\frac{\partial^2\varphi_1^1}{\partial\xi\partial y}\right) \tag{2.17}$$

Bài toán ở bậc $0(\varepsilon^3)$ có dạng

$$\frac{\partial^4\varphi_3^1}{\partial y^4} = \frac{\gamma Re}{\omega}\left[(U_1 - C_o)\frac{\partial^3\varphi_2^1}{\partial\xi\partial y^2} + \frac{\partial^3\varphi_1^1}{\partial\tau\partial y^2} + \frac{\partial\varphi_1^1}{\partial y}\cdot\frac{\partial^3\varphi_1^1}{\partial\xi\partial y^2} - \right.$$

$$- 2A_1 \frac{\partial \varphi_2^1}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi_1^1}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^3 \varphi_1^1}{\partial y^3} \Big] = 2 \frac{\partial^4 \varphi_1^1}{\partial \xi^2 \partial y^2} \qquad (2.18)$$

$$\frac{\partial^4 \varphi_3^2}{\partial y^4} = \mathrm{Re} \Big[(U_2 - C_o) \frac{\partial^3 \varphi_2^2}{\partial \xi \partial y^2} + \frac{\partial^3 \varphi_2^2}{\partial \tau \partial y^2} + \frac{\partial \varphi_1^2}{\partial y} \cdot \frac{\partial^3 \varphi_1^2}{\partial \xi \partial y^2} -$$

$$- 2A_2 \frac{\partial \varphi_2^2}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi_1^2}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^3 \varphi_1^2}{\partial y^3} \Big] - 2 \frac{\partial^4 \varphi_1^2}{\partial \xi^2 \partial y^2} \qquad (2.19)$$

$$\frac{\partial \varphi_3^1}{\partial \xi} = \frac{\partial \varphi_3^1}{\partial y} \Big|_{y=1} = 0 ; \quad \frac{\partial \varphi_3^2}{\partial \xi} = \frac{\partial \varphi_3^2}{\partial y} \Big|_{y=-1} = 0 \qquad (2.20)$$

tại $y = 0$

$$B_1 E_3 + 2A_1 E_1 E_2 + \frac{\partial \varphi_3^1}{\partial y} + E_2 \frac{\partial^2 \varphi_1^1}{\partial y^2} + E_1 \frac{\partial^2 \varphi_2^1}{\partial y^2} + \frac{E_1^2}{2} \frac{\partial^3 \varphi_1^1}{\partial y^3} =$$

$$= \{ B_1 \to B_2 ; A_1 \to A_2 ; \varphi_k^1 \to \varphi_k^2 \} \qquad (2.21)$$

$$\frac{\partial \varphi_3^1}{\partial \xi} + E_1 \frac{\partial^2 \varphi_2^1}{\partial \xi \partial y} + E_2 \frac{\partial^2 \varphi_1^1}{\partial \xi \partial y} + \frac{E_1^2}{2} \frac{\partial^3 \varphi_1^1}{\partial \xi \partial y^2} = \{ \varphi_k^1 \to \varphi_k^2 \} \qquad (2.22)$$

$$\omega \Big(2A_1 E_3 + \frac{\partial^2 \varphi_3^1}{\partial y^2} + E_1 \frac{\partial^3 \varphi_2^1}{\partial y^3} + E_2 \frac{\partial^3 \varphi_1^1}{\partial y^3} - \frac{\partial^2 \varphi_1^1}{\partial \xi^2} \Big) =$$

$$= \{ A_1 \to A_2 ; \varphi_k^1 \to \varphi_k^2 \} \qquad (2.23)$$

$$\Big\{ \Big[(1 - C_o) \frac{\partial^2 \varphi_2^1}{\partial \xi \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi_1^1}{\partial \tau \partial y} + (1 - c_o) E_1 \frac{\partial^3 \varphi_1^1}{\partial \xi \partial y^2} + \frac{\partial \varphi_1^1}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_1^1}{\partial \xi \partial y} - B_1 \frac{\partial \varphi_1^1}{\partial \xi} -$$

$$- 2A_1 E_1 \frac{\partial \varphi_1^1}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi_1^1}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_1^1}{\partial y^2} \Big] - \frac{\omega}{\mathrm{Re}} \Big(\frac{\partial^3 \varphi_1^1}{\partial \xi^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \varphi_3^1}{\partial y^3} + E_1 \frac{\partial^4 \varphi_2^1}{\partial y^4} \Big) -$$

$$- 2\omega \Big(B_1 E_{1\xi\xi} + \frac{\partial^3 \varphi_1^1}{\partial \xi^2 \partial y} \Big) \Big\} = \{ \omega \to 1 ; B_1 \to B_2 ; A_1 \to A_2 ;$$

$$\varphi_k^1 \to \varphi_k^2 \} - F \cdot E_{2\xi} . \qquad (2.24)$$

điều kiện động học

$$E_{2\tau} + (1 - C_o) E_{3\xi} + B_1 E_1 E_{2\xi} + B_1 E_{1\xi} E_2 + A_1 E_1^2 E_{1\xi} + E_{2\xi} \frac{\partial \varphi_1^1}{\partial y} +$$

$$+ E_{1\xi} \frac{\partial \varphi_3^1}{\partial y} + E_1 E_{1\xi} \frac{\partial^2 \varphi_1^1}{\partial y^2} = - \Big(\frac{\partial \varphi_3^1}{\partial \xi} + E_1 \frac{\partial^2 \varphi_2^1}{\partial \xi \partial y} + E_2 \frac{\partial^2 \varphi_1^1}{\partial \xi \partial y} + \frac{E_1^2}{2} \frac{\partial^3 \varphi_1^1}{\partial \xi \partial y^2} \Big) \qquad (2.25)$$

Bài toán (2.3) — (2.8) cho ta lời giải

$$\varphi_1^1 = E_1(\xi, \tau) P_o(y) = E_1 (a_{oo} + a_{o1} y + a_{o2} y^2 + a_{o3} y^3)$$

$$\varphi_1^2 = E_1(\xi, \tau) Q_o(y) = E_1 (b_{oo} + b_{o1} y + b_{o2} y^2 + b_{o3} y^3) \qquad (2.26)$$

Ở đây các hệ số a_{on}, b_{on} được xác định duy nhất từ các điều kiện biên (2.4) — (2.8) trong đó

$$a_{oo} = b_{oo} = C_o - 1 = 2B_1(1 - \omega) d^2 \omega (1 + d) / [\Omega \equiv d^4 + 4d^3\omega + 6d^2\omega + 4 d\omega + \omega^2] \qquad (2.27)$$

Thay φ_1^1 và φ_1^2 vào bài toán (2.10) — (2.16) ta thấy nghiệm của nó có dạng

$$\varphi_2^1 = P_1(y) E_2 + P_2(y) E_1^2 + P_3(y) E_{1\xi}$$

$$\varphi_2^2 = Q_1(y) E_2 + Q_2(y) E_1^2 + Q_3(y) E_{1\xi} \qquad (2.28)$$

trong đó

$$P_1 \equiv P_o ; \quad Q_1 \equiv Q_o ;$$

$$P_2(y) = a_{20} + a_{21}y + a_{22}y^2 + a_{23}y^3 \ ; \ Q_2(y) = b_{20} + b_{21}y + b_{22}y^2 + b_{23}y^3 \ ;$$

$$P_3(y) = a_{30} + a_{31}y + a_{32}y^2 + a_{33}y^3 + \frac{\gamma Re}{\omega}\left(\frac{\alpha_{30}}{24}y^4 + \frac{\alpha_{31}}{120}y^5 + \frac{\alpha_{32}}{360}y^6 + \frac{\alpha_{33}}{840}y^7\right);$$

$$Q_3(y) = b_{30} + b_{31}y + b_{32}y^2 + b_{33}y^3 + Re\left(\frac{\beta_{30}}{24}y^4 + \frac{\beta_{31}}{120}y^5 + \frac{\beta_{32}}{360}y^6 + \frac{\beta_{33}}{840}y^7\right)$$

Các hệ số a_{2k}, b_{2k}, a_{3k}, b_{3k}, α_{3k}, β_{3k} hoàn toàn xác định một cách duy nhất từ các điều kiện biên (2.12) — (2.16). Do tầm quan trọng của hệ số a_{30} chúng ta viết rõ biểu thức của nó

$$a_{30} = [2N(\omega + d) - M(\omega - d^2)]\Omega^{-1} \ ;$$

$$N = 2P_1\omega + 2d^3(q_1 + r) - P_2 d\omega + d^3(q_2 - 3r) \ ;$$

$$M = (3P_1 - P_2 d)\omega - (3q_1 + q_2)d^2 \ ;$$

$$P_1 = -\frac{\gamma Re}{\omega}\left(\frac{\alpha_{30}}{24}d^4 + \frac{\alpha_{31}}{120}d^5 + \frac{\alpha_{32}}{360}d^6 + \frac{\alpha_{33}}{840}d^7\right);$$

$$q_1 = -Re\left(\frac{\beta_{30}}{24} - \frac{\beta_{31}}{120} + \frac{\beta_{32}}{360} - \frac{\beta_{33}}{840}\right);$$

$$P_2 = -\frac{\gamma Re}{\omega}\left(\frac{\alpha_{30}}{6}d^3 + \frac{\alpha_{31}}{24}d^4 + \frac{\alpha_{32}}{60}d^5 + \frac{\alpha_{33}}{120}d^6\right);$$

$$q_2 = -Re\left(-\frac{\beta_{30}}{6} + \frac{\beta_{31}}{24} - \frac{\beta_{32}}{60} + \frac{\beta_{33}}{120}\right);$$

$$r = \frac{Re}{6}(\gamma a_{00}a_{01} + \gamma a_{00}B_1 - B_2 b_{00} - b_{00}b_{01} - F) \ ;$$

$$\alpha_{30} = -2a_{12}a_{00} - 2A_1a_{00},$$

$$\alpha_{31} = 2B_1a_{02} - 6a_{03}a_{00} - 2A_1a_{01} \ ; \quad \alpha_{32} = 6B_1a_{03} \ ; \ \alpha_{33} = 4A_1a_{03} \qquad (2.29)$$

để cho β_{3k} ta có biểu thức tương tự chỉ thay A_1, B_1, a_{ij} thành A_2, B_2, b_{ij}.
Bây giờ thay biểu thức của φ_1^1 và φ_2^1 vào (2.17) chúng ta nhận được phương trình tiến hóa cho E_1 ở dạng:

$$E_{1\tau} + (B_1 + 2a_{20} + 2a_{01})E_1E_{1\xi} + a_{30}F_{1\xi\xi} = 0 \qquad (2.30)$$

Sau khi tìm được φ_1^1, φ_2^1, φ_1^2, φ_2^2 ta có thể giải bài toán ở bậc $0(\varepsilon^3)$ bằng cách tìm nghiệm của nó ở dạng:

$$\varphi_3^1 = P_4(y)E_3 + P_5(y)E_1E_2 + P_6(y)E_1^3 + P_7(y)E_{2\xi} + P_8(y)E_1E_{1\xi} + P_9(y)E_{1\xi\xi},$$

$$\varphi_3^2 = Q_4(y)E_3 + Q_5(y)E_1E_2 + Q_6(y)E_1^3 + Q_7(y)E_{2\xi} + Q_8(y)E_1E_{1\xi} + Q_9(y)E_{1\xi\xi} \qquad (2.31)$$

trong đó

$$P_4 = P_0, \ Q_4 = Q_0, \ P_5(y) = \sum_{k=0}^{3} a_{5k}y^k, \quad Q_5(y) = \sum_{k=0}^{3} b_{5k}y^k,$$

$$P_6(y) = \sum_{k=0}^{3} a_{6k}y^k, \quad Q_6(y) = \sum_{k=0}^{3} b_{6k}y^k, \ P_7 = P_3, \ Q_7 = Q_3,$$

$$P_8(y) = \sum_{k=0}^{3} a_{8k}y^k + \frac{\gamma Re}{\omega}\sum_{k=0}^{3} \alpha_{8k}y^{k+4}, \ Q_8(y) = \sum_{k=0}^{3}(b_{8k}y^k + Re\beta_{8k}y^{k+4}),$$

$$P_9(y) = \sum_{k=0}^{3} a_{9k} y^k + \sum_{k=0}^{7} \alpha_{9k} y^{k+4}, \quad Q_9(y) = \sum_{k=0}^{3} b_{9k} y^k + \sum_{k=0}^{7} \beta_{9k} y^{k+4}. \tag{2.32}$$

Tất cả các hệ số a_{ij}, b_{ij}, α_{mn}, β_{mn} ở trên đều được xác định duy nhất từ các điều kiện biên và qua các hệ số đã được xác định từ trước đó.

Thay các biểu thức của φ_1^1, φ_2^1, φ_3^1 vào (2.25) chúng ta sẽ nhận được phương trình tiến hóa cho E_2 ở dạng sau:

$$E_{2\tau} + a_{30}E_{2\xi\xi} + (B_1 + 2a_{01} + a_{50})E_1E_{2\xi} + (B_1' + 2a_{01} + a_{50})E_{1\xi}E_2 +$$
$$+ (A_1 + 3a_{02} + 3a_{60} + 3a_{21})E_1^2E_{1\xi} + (a_{31} + a_{80})(E_{1\xi}^2 + E_1E_{1\xi\xi}) + a_{90}E_{1\xi\xi\xi} = 0 \quad \text{hay là}$$

$$E_{2\tau} + \frac{d}{d\xi}\Big[a_{30}E_{2\xi} + (B_1 + 2a_{01}' + a_{50})E_1E_2 + (a_{31} + a_{80})E_1E_{1\xi} +$$
$$+ \frac{1}{3}(A_1 + 3a_{02} + 3a_{60} + 3a_{21})E_1^3 + a_{90}E_{1\xi\xi}\Big] = 0 \tag{2.33}$$

§3. MỘT SỐ KẾT LUẬN RÚT RA TỪ NGHIÊN CỨU PHƯƠNG TRÌNH TIẾN HÓA CỦA NHIỄU PHI TUYẾN

Bây giờ chúng ta xem xét hai phương trình (2.30) và (2.33). Phương trình (2.30) là phương trình Burger. Nó đã được các nhà cơ học và toán học nghiên cứu rất kỹ, ví dụ [9]. Trong trường hợp hệ số $a_{30} > 0$, $|E_1|$ tăng không có giới hạn và mọi nhiễu phi tuyến ban đầu đều mất ổn định. Nếu $a_{30} < 0$ nghiệm của (2.30) khi $t \to \infty$ sẽ tiến tới 0 hoặc một const $\neq 0$ tùy thuộc vào trạng thái ban đầu của nhiễu. Phương trình (2.30) khi $a_{30} < 0$ đưa về dạng

$$E_{1\tau} - \nu E_{1zz} + E_1E_{1z} = 0 \tag{3.1}$$

bằng phép thay biến $z = \xi/q$ trong đó

$a^2 = -a_{30}$, $\nu = a^2/(B_1 + 2a_{20} + 2a_{01})^2 \equiv a^2/q^2$

Nghiệm của (3.1) với giá trị ban đầu $E_1(0, z) = f(z)$ có dạng [9]:

$$E_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z-\eta}{\tau} e^{-G/2\nu} d\eta \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-G/2\nu} d\eta \tag{3.2}$$

$$\text{với } G(\eta, z, \tau) = \int_0^{\eta} f(\eta')d\eta' + (z-\eta)^2/2\tau$$

Nếu xét tiệm cận của (3.2) khi $\tau \to \infty$ ta sẽ có

$$\lim_{\tau\to\infty} E_1(\xi, \tau) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } |f| < k \text{ và } \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)d\eta\right| < \infty; \quad \left(\int_0^{2L} f(\eta)d\eta = 0\right) & (3.3) \\ \text{const} \neq 0 & \text{nếu } |f| < k \text{ và } \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)d\eta\right| = \infty; \quad \left(\int_0^{2L} f(\eta)d\eta \neq 0\right) & (3.4) \end{cases}$$

Trường hợp ta xét nghiệm của (3.1) trong lớp có hàm tuần hoàn theo ξ với chu kỳ 2L thì các tích phân trong (3.3) và (3.4) được lấy từ 0 đến 2L. Cũng từ (3.2) ta thấy $\lim\limits_{\tau \to \infty} E_{1\xi} = const < 0$ trong cả hai trường hợp trên.

Bây giờ ta giả thiết rằng $B_1 + 2a_{01} + a_{50} = b > 0$ (3.5)

Khi đó trong trường hợp (3.3) ta có $E_1(\xi, \infty) = 0$ và $E_{1\xi}(\xi, \infty) = -K_2 < 0$. Số hạng tự do trong (2.33) sẽ tiến tới $(a_{31} + a_{80})K_2^2$. Theo định lý 2, §1 chương VI [10] ta có $E_2 \to E(\xi)$ khi $\tau \to \infty$ trong đó $E(\xi)$ là nghiệm của phương trình

$$-a^2E_{\xi\xi} - bK_2E + (a_{31} + a_{80})K_2^2 = 0 \qquad (3.6)$$

Dễ dàng thấy rằng $E \sim \cos(\lambda\xi)$ tức là E_2 sẽ tiến tới lời giải dừng, tuần hoàn với chu kỳ $2\pi/\lambda$; $\lambda = \sqrt{bK_2/a^2}$ trong khi $E_1 \to 0$

Nếu nhiễu ban đầu $E_1(\xi, 0)$ thuộc nhóm (3.4) ta sẽ có $E_1(\xi, \infty) = K_1 \neq 0$. Khi đó số hạng tự do trong (2.33) sẽ tiến tới một hằng số K_3 và cũng theo định lý nói trên ta sẽ có $E_2 \to E(\xi)$ khi $\tau \to \infty$, trong đó $E(\xi)$ bây giờ là nghiệm của phương trình.

$$-a^2E_{\xi\xi} + bK_1E_{\xi} - bK_2E_2 + K_3 = 0 \qquad (3.7)$$

Nghiệm của phương trình này xét trên toàn bộ trục số $(-\infty < \xi < \infty)$ sẽ không giới nội và do đó nhiễu sẽ mất ổn định, đúng hơn là biên độ của nó sau một khoảng thời gian nào đó sẽ đạt được một giá trị mà nó không còn phù hợp với lý thuyết phi tuyến yếu.

Bảng 1

ω	a_{30}							
0,01	0,15E+0	0,14E+2	0,55E+2	0,15E+1	0,14E+3	0,56E+3	0,36E+2	0,57E+4
0,04	0,63E−5	0,49E+0	0,19E+1	0,63E−2	0,50E+1	0,19E+2	0,63E+1	0,32E+3
0,08	−0,18E−2	0,18E+0	0,37E+0	−0,15E−1	0,19E+1	0,38E+1	0,34E+1	0,14E+3
0,1	−0,17E−2	0,13E+0	0,24E+0	−0,14E−1	0,14E+1	0 25E+1	0,29E+4	0,13E+3
0,2	−0,13E−2	0,36E−1	0,77E−1	−0,11E−1	0,41E+0	0,85E+0	0,17E+1	0,86E+2
0,3	−0,10E−2	0,13E−1	0,37E−1	−0,90E−2	0,17E+0	0,43E+0	0,14E+1	0,69E+2
0,4	−0,83E−3	0,60E−2	0,20E−1	−0,71E−2	0,91E−1	0,25E+0	0,11E+1	0,58E+2
0,5	−0,65E−3	0,28E−2	0,11E−1	−0,54F−2	0,55E−1	0,16E+0	0,10E+1	0,51E+2
1,0	0,70E−6	0,19E−4	0,35E−4	0,70E−3	0,19E−1	0,35E−1	0,70E+0	0,35E+2
1,1	0,11E−3	0,48E−4	−0,39E−3	0,17E−2	0,18E−1	0,29E−1	0,67E+0	0,34E+2
1,4	0,42E−3	0,35F−3	−0,90E−3	0,47E−2	0,19E−1	0,21E−I	0,60E+0	0,30E+2
1,8	0,87E−3	0,94E−3	−0,81E−3	0,92E−2	0,24E−1	0,18E−1	0,55E+0	0,27E+2
2,0	0,11E−2	0,12E−2	−0,64E−3	0,18E−1	0,26E−1	0,19E−1	0,54E+0	0,26E+2
2,5	0,19E−2	0,21E−2	−0,55E−4	0,19E−2	0,33E−1	0,23E−1	0,55E+0	0,25E+2
3,0	0,28E−2	0,28E−2	0,62E−3	0,28E−1	0,40E−1	0,28E−1	0,59E+0	0,22E+2
4,0	0,49E−2	0,12E−2	0,21E−2	0,49E−1	0,53E−1	0,40E−1	0,74E+0	0.20E+2
	Re=1 d=0,2	Re=1 d=1	Re=1 d=1,6	Re=10 d=0,2	Re=10 d=1	Re=10 d=1,6	Re=100 d=0,2	Re=100 d=1,6

Giá trị của a^{ε}_{0} theo các thông số hình học và cơ học được cho ở bảng 1. Ta thấy ở Re không lớn lắm, với d > 1 hoặc d < 1 đều tồn tại những giá trị ω sao cho $a_{30} < 0$. Khi Re tăng $a_{30} < 0$ chỉ có thể đối với những giá trị d < 1. Còn khi Re lớn (Re ⩾ 50), với mọi d, ω ta đều có $a_{30} > 0$. Một điều rất lý thú là với mọi Re khi d = 1 ta đều có $a_{30} > 0$. Điều này phù hợp với kết quả của lý thuyết tuyến tính là dòng chảy với d = 1, $P_1 = P_2$ mất ổn định ở mọi giá trị Re[11].

KẾT LUẬN

Kết quả tính toán ở đây một lần nữa cho chúng ta thấy dòng chảy có mặt phân cách rất không ổn định. Trong mô hình này chúng ta thấy nhiễu thuộc nhóm (3.3) phù hợp với ý nghĩa vật lý hơn cả, do đó ta có thể kết luận là trong trường hợp mất ổn định tuyến tính nếu $a_{30} < 0$ dòng chảy mất ổn định đó sẽ tiến tới trạng thái (3.6) tức là dòng chảy dừng và tuần hoàn.

Địa chỉ
Viện Cơ học Viện KHVN

Nhận ngày 10/1/1988

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. STUART J. T. On the nonlinear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows. I. The basic behaviour in plane Poiseuille flow. J. Fluid Mech. Vol. 9. pp353, 1960.
2. STUART J. T. Nonlinear effects in hydrodynamic stability. Proc. Xth Int. Congr. Appl. Mech. Elseiver, Amsterdam, 1962.
3. STEWARTSON K., STUART J. T. A nonlinear instability theory for wave system in plane Poiseuille flow. J. Fluid Mech. Vol. 48, pp 529, 1971.
4. DRAZIN P. G. Kelvin-Helmholtz instability of finite amplitude. J. Fluid Mech. Vol. 42. P 2, 1970.
5. NAYFEH A. H., SARIC W. S. Nonlinear waves in a Kelvin — Helmholtz flor. J. F. Fluid Mech. Vol. 55 p 2, 1972.
6. HSIEH D. Y., FENGSU C. A nonlinear study of Kelvin — Helmholtz stability. Phys. Fluids Vol. 28, p5, 1985.
7. MASLOWE S. A. Instabilities and transition in shear flows. trong tuyển tập: Hydrodynamic instabilities and the Transition to Turbulence. Springer — Verlag, 1981
8. TRẦN VĂN TRẦN, NGUYỄN TRUNG HÀ Về ổn định của mặt phân cách giữa hai chất lỏng cùng chuyển động trong kênh phẳng. Tạp chí cơ học số 3, 1988.
9. WHITHAM G. B. Linear and Nonlinear waves, New york, 1974.
10. FRIEDMAN A. Partial differential equation of parabolic type. Prentice — hall, 1934
11. YIH C. S. Instability due to viscousity stratification J. Fluid Mech. Vol. 27 PP 337, 1967.

SUMMARY

INSTABILITY OF THE INTERFACE OF TWO VISCOUS FLUIDS MOVING IN A CHANNEL, PART II A NONLINEAR PROBLEM.

In this paper, the method of multiple scaling is used for obtaining the amplitude evolution equations from the weakly nonlinear problem of hydrodynamic stability of co-current flow of two viscous fluids in a channel. It is shown that in the case of stabilility the interface may evolve to some finite amplitude with periodic steady state.