Tạp chí Cơ học tập XI, 1989 số 3 (trang 46 — 51).

TÍNH MÀNG MỎNG ĐÀN NHỚT TRỰC HƯỚNG CÓ XÉT ĐẾN HIỆN TƯỢNG BIẾN DẠNG RÃO

NGUYỄN HOA THỊNH,
O. V. XINHIAEV,
G. IA. KORABENHIKOV.

Trong bài này trình bày kết quả nghiên cứu trạng thái ứng suất – biến dạng của màng mỏng đàn nhớt trực hướng có xét đến hiện tượng biến dạng rão.

§1. ĐẶT BÀI TOÁN

Xét màng mỏng chữ nhật chiều dài 2a, chiều rộng 2b, chiều dày h, chế tạo từ vật liệu trực hướng bốn bên cố định bằng khớp cầu, hệ tọa độ oxy được chọn có trục ox hướng theo chiều dài, trục oy hướng theo chiều rộng, gốc o ở tâm bản.

Phương trình liên hệ giữa biến dạng và ứng suất như sau [1]:

$$\varepsilon_x(t) = \frac{1}{E_1}\sigma_x(t) + \frac{1}{E_1}\int_0^t K_x(t-\tau)\sigma_x(\tau)d\tau - \frac{\nu_{o2}}{E_2}\sigma_y(t) - \frac{\nu_{o2}}{E_2}\int_0^t K_{xy}(t-\tau)\sigma_y(\tau)d\tau,$$

$$\varepsilon_y(t) = -\frac{\nu_{o1}}{E_1}\sigma_x(t) - \frac{\nu_{o1}}{E_1}\int_0^t K_{xy}(t-\tau)\sigma_x(\tau)d\tau + \frac{1}{E_2}\sigma_y(t) + \frac{1}{E_2}\int_0^t K_y(t-\tau)\sigma_y(\tau)d\tau,$$

$$\gamma_{xy}(t) = \frac{1}{G_o}\tau_{xy}(t) + \frac{1}{G_o}\int_0^t K_o(t-\tau)\tau_{xy}(\tau)d\tau. \tag{1.1}$$

Nhân của toán tử tích phân tuyến tính lấy dưới dạng hàm mũ giảm. Kết quả nghiên cứu bằng thực nghiệm của các tác giả chứng tỏ rằng dạng hàm này dùng để xác định trạng thái ứng suất – biến dạng của các kết cấu xây dựng làm bằng vật liệu polime sau một thời gian làm việc đủ lớn khá phù hợp.

Theo [2], các nhân đó được xác định như sau:

$$K_x(t-\tau) = C_x\exp[-\alpha_x(t-\tau)], \quad K_y(t-\tau) = C_y\exp[-\alpha_y(t-\tau)],$$
$$K_{xy}(t-\tau) = K_{yx}(t-\tau) = C_{xy}\exp[-\alpha_{xy}(t-\tau)],$$
$$K_o(t-\tau) = C\exp[-\alpha(t-\tau)] \tag{1.2}$$

Trong đó:

$$C_x = \frac{E_1 - H_1}{E_1 n_1}, \quad \alpha_x = \frac{H_1}{E_1 n_1}, \quad C_{xy} = \frac{\nu_{\infty 1}E_1 - \nu_{o1}H_1}{\nu_{\infty 1}E_1 n_1}, \quad \alpha_{xy} = \frac{\nu_{o1}H_1}{\nu_{\infty 1}E_1 n_1}, \ldots$$

$$C_y = \frac{E_2 - H_2}{E_2 n_2}, \quad \alpha_y = \frac{H_2}{E_2 n_2}, \quad C = \frac{G_o - G_\infty}{G_o n_{12}}, \quad \alpha = \frac{G_\infty}{G_o n_{12}}, \tag{1.3}$$

E_1, H_1 — Môđuyn đàn hồi tức thời và môđuyn đàn hồi lâu bền của vật liệu theo phương x; E_2, H_2 — cũng các đại lượng trên nhưng theo phương y, G_o, G_∞ — môđuyn trượt tức thời và môđuyn trượt lâu bền của vật liệu; ν_{o1}, $\nu_{\infty 1}$ — Hệ số poatxông của vật liệu theo phương x tại thời điểm đặt tải và sau thời gian dài chịu tải; ν_{o2}, $\nu_{\infty 2}$ — cũng các đại lượng trên nhưng theo phương y; n_1, n_2, n_{12} lần lượt biểu thị thời gian nới của ứng suất pháp theo phương x, ứng suất pháp theo phương y và ứng suất tiếp. Các hằng số kể trên được xác định bằng thực nghiệm.

Hệ phương trình cơ bản để giải bài toán bao gồm hệ phương trình cân bằng và phương trình liên tục của biến dạng sau đây:

Hệ phương trình cân bằng:

$$\sigma_x(t)\frac{\partial^2 W(t)}{\partial x^2} + \sigma_y(t)\frac{\partial^2 W(t)}{\partial y^2} + 2\tau_{xy}(t)\frac{\partial^2 W(t)}{\partial x \partial y} + \frac{q}{h} = 0, \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial \sigma_x(t)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}(t)}{\partial y} = 0, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial \sigma_y(t)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}(t)}{\partial x} = 0 \tag{1.6}$$

Phương trình liên tục của biến dạng xét đến các quan hệ giữa ứng suất và biến dạng (1.1) như sau:

$$\frac{1}{E_1}\frac{\partial^2 \sigma_x(t)}{\partial y^2} + \frac{1}{E_1}\int_0^t K_x(t-\tau)\frac{\partial^2 \sigma_x(\tau)}{\partial y^2}d\tau - \left(\frac{1}{G_o} - \frac{2\nu_{o1}}{E_1}\right)\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} -$$

$$- \int_0^t \left(\frac{1}{G_o}K_o(t-\tau) - \frac{2\nu_{o1}}{E_1}K_{xy}(t-\tau)\frac{\partial^2 \tau_{xy}(\tau)}{\partial x \partial y}\right)d\tau + \frac{1}{E_2}\frac{\partial^2 \sigma_y(t)}{\partial x^2}$$

$$+ \frac{1}{E_2}\int_0^t K_y(t-\tau)\frac{\partial^2 \sigma_y(\tau)}{\partial x^2}d\tau = \left(\frac{\partial^2 W(t)}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 W(t)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 W(t)}{\partial y^2}, \tag{1.7}$$

Hệ phương trình (1.4) — (1.7) được giải với các điều kiện biên (đối với bản bốn bên cố định bằng khớp cầu):

$$x = \pm a: \quad W = 0, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad \partial^2 W/\partial x^2 = 0:$$

$$y = \pm b: \quad W = 0, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad \partial^2 W/\partial y^2 = 0. \tag{1.8}$$

Nghiệm của hệ phương trình trên có thể viết dưới dạng phân ly biến số sau đây:

$$W(x, y, t) = \widehat{W}(x, y)\,\overline{W}(t); \quad \sigma_x(x, y, t) = \widehat{\sigma_x}(x, y)\overline{\sigma}(t);$$

$$\sigma_y(x, y, t) = \widehat{\sigma_y}(x, y)\overline{\sigma_y}(t); \quad \tau_{xy}(x, y, t) = \widehat{\tau_{xy}}(x, y)\overline{\tau_{xy}}(t), \tag{1.9}$$

Trong đó $\widehat{W}(x, y) = W_{xyo}$; $\widehat{\sigma_x}(x\ \ ) = \sigma_{xo}$; $\widehat{\sigma_y}(x, y) = \sigma_{yo}$; $\widehat{\tau_{xy}}(x, y) = \tau_{xy}$ — nghiệm của bài toán màng đàn hồi tuyến tính.

§2. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Căn cứ vào sự phân tích ở trên, bài toán được giải theo hai bước: trước hết giải bài toán đàn hồi tuyến tính để xác định các hàm số $\widehat{W}(x, y)$, $\widehat{\sigma_x}(x, y)$, $\widehat{\sigma_y}(x, y)$, $\widehat{\tau_{xy}}(x, y)$, sau đó giải hệ phương trình (1.4) — (1.7)

Nghiệm của bài toán đàn hồi tuyến tính phù hợp với điều kiện biên (1.8) tìm dưới dạng

$$W = W_o \cos\frac{\pi x}{2a} \cos\frac{\pi y}{2b},$$

$$u = u_o \sin\frac{\pi x}{a} \cos\frac{\pi y}{2b},$$

$$v = v_o \sin\frac{\pi y}{b} \cos\frac{\pi x}{2a}. \qquad (2.1)$$

Giá trị của các thông số u_o, v_o, W_o được xác định theo điều kiện tối thiểu của giá trị năng lượng biến dạng đàn hồi. Điều kiện này đưa về 3 phương trình sau đây:

$$\frac{\partial U}{\partial u_o} = 0 \quad (a); \quad \frac{\partial U}{\partial v_o} = 0 \quad (b); \quad \frac{\partial (U - T)}{\partial W_o} = 0 \quad (c). \qquad (2.2)$$

Trong đó U — năng lượng biến dạng đàn hồi xác định theo công thức

$$U = \iiint\limits_V \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy})\, dv. \qquad (2.3)$$

T — công của ngoại lực xác định theo công thức

$$T = \int_{-a}^{a} \int_{-Ka}^{Ka} q W_o \cos\frac{\pi x}{2a} \cos\frac{\pi y}{2Ka}\, dx dy \qquad (2.4)$$

Trong đó $K = b/a$.

Thay U, T xác định từ các công thức (2.3), (2.4) và giải chúng, từ các phương trình (2.2, a), (2.2, b) ta được:

$$u_o = C_o \frac{3\pi^2 W_o^2}{a}, \quad v_o = D_o \frac{3\pi^2 W_o^2}{Ka} \qquad (2.5)$$

Trong đó: C_o, D_o là các hệ số hằng số phụ thuộc vào các thông số ν_{o1}, $n = E_2/E_1 = \nu_{o2}/\nu_{o1}$, $m = G_o/E_1$, $K = b/a$.

Thay u_o, v_o từ công thức (2.5) vào công thức (2.2, c) và giải chúng ta có:

$$W_o = a\sqrt[3]{2S_1 aq/E_1 h} \qquad (2.6)$$

Biết u, v, w ta xác định được biến dạng và từ công thức của định luật Húc tổng quát, ta xác định được các giá trị của các ứng suất sau đây:

$$\sigma_{xo} = \frac{E_1 W_o^2}{(1 - n\nu_{o1}^2)a^2} (C_1 + n\nu_{o1} D_1),$$

$$\sigma_{yo} = \frac{E_1 n W_o^2}{(1 - n\nu_{o1}^2)a^2} (D_1 + \nu_{o1} C_1),$$

$$\tau_{xyo} = \frac{E_1 m W_o^2}{a^2} C_2. \qquad (2.7)$$

Trong đó S_1, C_1', C_2, D_1 là các hệ số hằng số phụ thuộc vào các thông số của vật liệu và kích thước của màng (v_{o1}, n, m K) đã nêu ở trên.

Bài toán màng đàn nhớt tuyến tính có xét đến hiện tượng biến dạng rão nhằm xác định các hàm thời gian $\overline{W}(t)$, $\overline{\sigma_x}(t)$, $\overline{\sigma_y}(t)$, $\overline{\tau_{xy}}(t)$ trong các biểu thức (1.9) được giải như sau:

Ta đưa vào ký hiệu

$$F_j\sigma_j = \int_0^t K_j(t-\tau)\sigma_j(\tau)d\tau \tag{2.8}$$

Toán tử tích phân tuyến tính (2.8) là phép bện của các hàm số

$$F_j\sigma_j = K_j * \sigma_j \tag{2.9}$$

Tập hợp các hàm số trong không gian ảnh xạ là phép bện trong không gian gốc. Bởi vậy dùng biến đổi Lapơlaxơ đối với toàn tử tích phân (2.8) ta nhận được:

$$F_j\sigma_j = K_j^*\sigma_j^* \tag{2.10}$$

Ta đặt các ký hiệu

$$B_x = \frac{1}{E_1},\ B_{xy} = \frac{v_{o2}}{E_2} = B_{yx} = \frac{v_{o1}}{E_1},\ B_y = \frac{1}{E_2},\ B_o = \frac{1}{G_o},\ B_j^* = B_j(1+K_j^*). \tag{2.11}$$

Dùng phép biến đổi Lapơlaxơ đối với phương trình (1.7) và tiến hành giản hóa, nhờ các biểu thức (2.10), (2.11) ta nhận được phương trình liên tục của màng mỏng trực hướng làm bằng vật liệu có tính di truyền tuyến tính dưới dạng toán tử như sau:

$$B_x^*\frac{\partial^2\sigma_x^*}{\partial y^2} - (B_o^* - 2B_{xy}^*)\frac{\partial^2\tau_{xy}^*}{\partial x\partial y} + B_y^*\frac{\partial^2\sigma_y^*}{\partial x^2} = \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right)^2\right]^* - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)^*. \tag{2.12}$$

Hệ phương trình cân bằng của màng mỏng không phụ thuộc vào tính chất của vật liệu nên vẫn giữ dạng (1.4), (1.5), (1.6).

Như vậy có bốn phương trình (1.4), (1.5), (1.6) và (2.12) để xác định được bốn ẩn số σ_x, σ_y, τ_{xy}, W. Đặt các biểu thức (1.9) vào các phương trình cân bằng (1.5) và (1.6) nhận được

$$\overline{\sigma_x}(t) = \left(-\frac{\partial\tau_{xyo}}{\partial y} \Big/ \frac{\partial\sigma_{xo}}{\partial x}\right)\overline{\tau_{xy}}(t) = \overline{\tau_{xy}}(t),$$

$$\overline{\sigma_y}(t) = \left(-\frac{\partial\tau_{xyo}}{\partial x} \Big/ \frac{\partial\sigma_{yo}}{\partial y}\right)\overline{\tau_{xy}}(t) = \overline{\tau_{xy}}(t). \tag{2.13}$$

Đẳng thức (2.13) chứng tỏ rằng, các thừa số phụ thuộc vào thời gian trong ba biểu thức cuối cùng của (1.9) bằng nhau, nghĩa là:

$$\overline{\sigma_x}(t) = \overline{\sigma_y}(t) = \overline{\tau_{xy}}(t) = \Phi(t) \tag{2.14}$$

Từ phương trình (1.4) có tính đến (1.9), (2.14) và phương trình cân bằng tương ứng với (1.4) trong bài toán màng đàn hồi tuyến tính ta nhận được

$$\Phi(t)\overline{W}(t) = 1 \tag{2.15}$$

Đặt các biểu thức (1.9), (2.14) vào phương trình liên tục của biến dạng (2.12) và xét đến phương trình liên tục của biến dạng tương ứng trong bài toán màng đàn hồi tuyến tính, ta nhận được phương trình:

$$\Phi^*_{(p)}\left[B_x\frac{\partial^2\sigma_{xo}}{\partial y^2} - (B_o^* - 2B_{xy}^*)\frac{\partial^2\tau_{xyo}}{\partial x\partial y} + B_y^*\frac{\partial^2\sigma_{yo}}{\partial x^2}\right] -$$

$$-\left[\frac{1}{E_1}\frac{\partial^2\sigma_{xo}}{\partial y^2}-\left(\frac{1}{G_o}-\frac{2\nu_{c1}}{E_1}\right)\frac{\partial^2\tau_{xyo}}{\partial x\partial y}+\frac{1}{E_2}\frac{\partial^2\sigma_{yo}}{\partial x^2}\right]\overline{[W^2(t)]^*}=0. \qquad (2.16)$$

Trong đó các đạo hàm $\frac{\partial^2\sigma_{xo}}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2\sigma_{yo}}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2\tau_{xyo}}{\partial x\partial y}$

được xác định trực tiếp từ các công thức (2.7). Vì các đạo hàm này đều là các hàm số của W, nên phương trình (2.16) có thể viết dưới dạng:

$$L(W) = 0 \qquad (2.17)$$

Phương trình (2.17) được giải bằng phương pháp tích phân Bupnóp — GaloocKin với giả thiết hàm W có dạng (2.1). Kết quả nhận được:

$$\overline{[W^2(t)]^*} = \Phi^*(p)\,[B_x^*E_1B_1 - (B^* - 2B_{xy}^*)G_oB_2 + B_y^*E_2B_3], \qquad (2.18)$$

Trong đó B_1, B_2, B_3 — hằng số phụ thuộc vào vật liệu, hình dáng và kích thước của màng.

Như vậy, chúng ta có hai phương trình (2.14), (2.18) để xác định hai ẩn số $\Phi(t)$ và $\overline{W}(t)$. Cần chú ý rằng, trong thực tế, người ta quan tâm nhiều đến giá trị các hàm số này ứng với giá trị lớn của thời gian t ($t \rightarrow \infty$), và chúng được xác định nhờ định lý về giá trị hữu hạn [3]. Kết quả nhận được:

$$\overline{W}_\infty = \sqrt[3]{\frac{E_1}{H_1}B_1 - G_o\left(\frac{1}{G_\infty}-\frac{2\nu_{\infty 1}}{H_1}\right)B_2 + \frac{E_2}{H_2}B_3}. \qquad (2.19)$$

Dựa vào kết quả (2.19) ta tính được giá trị Φ_∞ từ biểu thức (2.15) như sau:

$$\Phi_\infty = \left[\frac{E_1}{H_1}B_1 - G_o\left(\frac{1}{G_\infty}-\frac{2\nu_{\infty 1}}{H_1}\right)B_2 + \frac{E_2}{H_2}B_3\right]^{1/3}. \qquad (2.20)$$

Như vậy, trạng thái ứng suất — biến dạng của màng đàn nhớt trực hướng với thời gian tác dụng của tải trọng đủ lớn ($t = \infty$) được xác định bằng công thức sau:

$$W(x, y, \infty) = W_{xyo}\overline{W}_\infty, \qquad \sigma_x(x, y, \infty) = \sigma_{xo}\Phi_\infty,$$
$$\sigma_y(x, y, \infty) = \sigma_{yo}\Phi_\infty. \qquad \tau_{xy}(x, y, \infty) = \tau_{xyo}\Phi_\infty. \qquad (2.21)$$

Trong đó W_{xyo}, σ_{xo}, σ_{yo}, τ_{xyo} được xác định từ bài toán đàn hồi tuyến tính tương ứng, còn $\overline{W}_\infty$, Φ_∞ được xác định từ các công thức (2.19) và (2.20).

Bài toán được giải trên máy tính điện tử.

§3. VÍ DỤ MINH HỌA

Phương pháp nêu trên được vận dụng để inh kết cấu xây dựng dưới dạng màng mỏng chịu áp lực gió là 560Пa.

Kích thước và các đặc trưng cơ học của màng mỏng như sau:

$a = 900mm$, $b = 600mm$, $h = 0{,}19mm$, $E_1 = 4800MПa$, $E_2 = 2600MПa$,

$G_o = 900MПa$, $\nu_{c1} = 0{,}20$, $\nu_{\infty 1} = 0{,}08$,

$H_1 = 2600MПa$, $H_2 = 1700MПa$, $G_\infty = 1900MПa$.

Kết quả tính toán cho ta giá trị độ võng ở trung tâm của màng ($x = 0$, $y = 0$) tại thời điểm bắt đầu đặt tải là $W_o = 0{,}05m$ và sau thời gian đặt tải lớn là $W_\infty = 0{,}064m$.

KẾT LUẬN

Từ kết quả nghiên cứu trên chúng ta thấy rằng, biến dạng rão của vật liệu ảnh hưởng rõ rệt đến trạng thái ứng suất – biến dạng của màng : độ võng tăng lên theo thời gian còn ứng suất thì giảm xuống. Trong ví dụ minh họa, trị số của độ võng lớn nhất tại $t = \infty$ đạt 128% trị số của nó tại $t = 0$ (thời điểm ban đầu).

Phương pháp tính toán trên cho phép vận dụng để tính toán các kết cấu màng làm bằng vật liệu có tính chất phức tạp và xác định được trạng thái ứng suất – biến dạng của kết cấu theo thời gian đặt tải đủ lớn.

Địa chỉ
Học Viện Kỹ thuật Quân sự

Nhận ngày 21/12/1988

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. БУГАКОВ И И. Ползучесть полимерных материалов. Наука, М., 1973.
2. РЖАНИЦЫН А.Р. Теория ползучести. Стройиздат. , 1968.
3. МАРТЫНЕНКО В. С. Операционное исчисление. Изд-во Киевского ун-та, 1965.

РЕЗЮМЕ

РАСЧЁТ ВЯЗКОУПРУГОЙ ОРТОТРОПНОЙ МЕМБРАНЫ С УЧЁТОМ ПОЛЗУЕСТИ

Рассмотрено напряженно-деформируемое состояние прямоугольной вязкоупругой ортотропной мембраны с шарнирным закреплением на контуре под действием поперечной равномерно распределенной нагрузки с учётом ползучести. Ядра линейных интегральных операторов в соотношениях между деформациями и напряжениями приняты в виде затухающей показательной функции. Для решения системы интегрально – дифференциальных уравнений используется метод разделения переменных : неизвестные функции координат (x, y) найдены энергетическим методом, а функции от времени(t) методом преобразования Лапласа. В результате показано влияние ползучести на прогибы мембраны.