

## VỀ ĐÁNH GIÁ DỊCH CHUYỂN CỦA DÀM CỨNG ĐẸO CHỊU TẢI TRỌNG ĐỘNG II;

VŨ VĂN THẾ

### §. MỞ ĐẦU

Trong phần I đã xét một cách tổng quát kỹ thuật đánh giá đối với các loại dầm chịu tải trọng động. Đã nhận được công thức đánh giá (2.21) chung đối với dầm chịu lực vận tốc. Phần này là những ứng dụng cho dầm ngàm và khớp bản lề qua việc chọn cụ thể các trường động cho phép  $W^*$ ,  $\bar{W}$ . Kết quả nhận được so sánh với các lời giải đã có và kết quả thực nghiệm được chỉ ra trên các biểu đồ. Sự phụ thuộc của kết quả vào việc chọn hàm dạng và hàm biên độ được khẳng định.

### §1. DÀM NGÀM CỨNG TRÊN BIÊN.

Xét dầm ngàm chịu tải trọng xung lực vận tốc phân bố đều trên toàn bộ bề mặt. Các trường động cho phép thỏa mãn điều kiện biên (1.2) trong phần I được chọn dưới dạng sau đây:

$$\begin{aligned}
 u^* &= s, \quad W^* = q(L, T^*) (1 - \tau) (1 - |\bar{x}|) \\
 \bar{u}^* = 0, \quad \bar{W} &= \begin{cases} Q(L, T^*) \tau \left(1 - \frac{\tau}{n}\right)^m (1 - \bar{x}^2)^s, & \tau \leq \bar{T} = \frac{n}{m+1} \\ Q(L, T^*) \frac{n}{m+1} \left(\frac{m}{m+1}\right)^m (1 - \bar{x}^2)^s, & \tau > \bar{T} \end{cases} \quad (1.1)
 \end{aligned}$$

với  $m \geq 1, n > 1, s \geq 1$

So với biên thức chung (2.15) trong phần I theo các ký hiệu ta có:

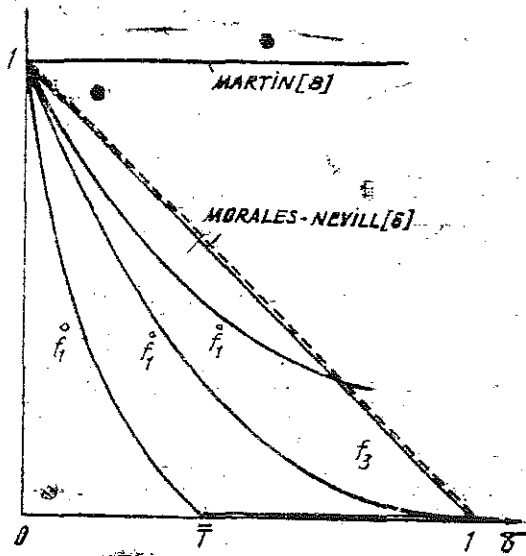
$$\begin{aligned}
 f_1 &= \tau \left(1 - \frac{\tau}{n}\right); \quad f_2 = (1 - \bar{x}^2)^s; \quad f_3 = (1 - \tau) \\
 f_1 &= \begin{cases} \left(1 - \frac{\tau}{n}\right)^{m-1} \left[1 - \frac{m+1}{n} \tau\right] & \forall \tau \leq \bar{T} = \frac{n}{m+1} \\ 0 & \forall \tau > \bar{T} \end{cases} \\
 f_1 &= \begin{cases} -\frac{2m}{n} \left(1 - \frac{\tau}{n}\right)^{m-2} \left(1 - \frac{m+1}{2n} \tau\right) & \forall \tau \leq \bar{T} \\ 0 & \forall \tau > \bar{T} \end{cases} \quad (1.2)
 \end{aligned}$$

Việc chọn các hàm  $f_i$  có dạng trên đây thỏa mãn tất cả các đòi hỏi đề nhận được đánh giá (2.21) trong phần I. So sánh việc chọn  $f_1, f_2$  và việc chọn làm biên độ của các tác giả khác được chỉ trên hình 1.

Theo công thức (2.3) trong phần I, trường ứng suất cân bằng với  $W$  có dạng:

$$\begin{aligned} \bar{N} &= F(t) \\ \bar{M}^2 &= F(t) \frac{Q(L, T^*)}{K} \tau \left(1 - \frac{\tau}{n}\right)^m \times \\ &\times (1 - \bar{x}^2)^s + \frac{2m}{n} \frac{\rho L^2}{T^{*2}} \frac{Q(L, T^*)}{K} \times \\ &\times \left(1 - \frac{\tau}{n}\right)^m \left(1 - \frac{m+1}{2n} \tau\right) \times \\ &\times \iint (1 - \bar{x}^2)^s dx dx + R(t)x + H(t) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Ở đây  $F(t), R(t), H(t)$  là các hàm của biến thời gian được chọn một cách tùy ý. Các đại lượng khác được xác định như sau:



Hình 1

$$\text{Khi } \bar{T} = \frac{n}{m+1} > 1$$

$$Q = \frac{T^* \dot{W}_0}{2 \left[ 1 - \left( \frac{n-1}{n} \right)^m \right]} \cdot \frac{1}{\int_0^1 (1-\bar{x})(1-\bar{x}^2)^s d\bar{x}}$$

$$A = \frac{\int_0^1 \tau(1-\tau)(1-\tau/n)^m d\tau}{1 - \left( \frac{n-1}{n} \right)^m} \cdot \frac{1}{\int_0^1 (1-\bar{x})(1-\bar{x}^2)^s d\bar{x}} \quad (1.3a)$$

$$\text{Khi } \bar{T} < 1$$

$$Q(L, T^*) = \frac{1}{1 - \frac{n}{m+1} \left( \frac{m}{m+1} \right)^m} \cdot \frac{T^* \dot{W}_0}{2 \int_0^1 (1-\bar{x})(1-\bar{x}^2)^s d\bar{x}}$$

$$\Delta = \frac{\int_0^1 \tau(1-\tau)(1-\tau/n)^m d\tau + \left\{ \frac{1}{2} - \frac{n}{m+1} - \frac{1}{2} \left( \frac{n}{m+1} \right)^2 \right\} \frac{n}{m+1} \left( \frac{m}{m+1} \right)^m}{\left[ 1 - \frac{n}{m+1} \left( \frac{m}{m+1} \right)^m \right] \int_0^1 (1-\bar{x})(1-\bar{x}^2)^s d\bar{x}}$$

$$T = \frac{KH}{3AW_0} [-1 + \sqrt{1 + 3A\lambda/K^2}], \lambda = \frac{\rho L^2 W_0^2}{2M_0 H} \quad (1.3b)$$

T\* (1.3) nếu ta chọn  $F(t) = 0$  và  $R(t), H(t)$  sao cho:

$$\bar{M}^0 = \frac{2m}{n} \frac{\rho L^2}{T^{*2}} \cdot \frac{Q(L, T^*)}{K} \left( 1 - \frac{\tau}{n} \right)^{m-2} \left( 1 - \frac{m+1}{2n} \tau \right) \left\{ \iint (1-\bar{x}^2)^s d\bar{x} + \frac{x}{a} + b \right\} \quad (1.4)$$

thì trạng thái ứng suất ( $\bar{M}^0, N$ ) sẽ nằm trên trục tung của điều kiện dẻo trên hình 2. Điều kiện trạng thái ứng suất này là cho phép. Ta chỉ cần điều kiện:

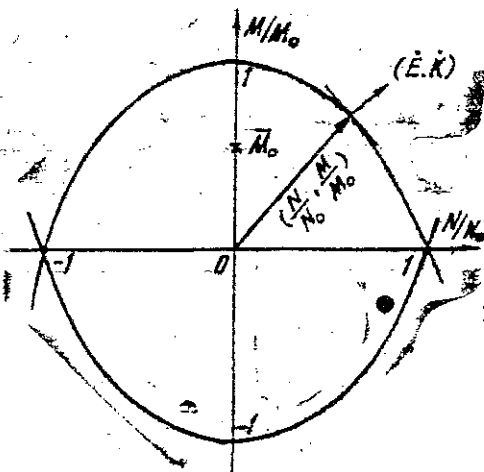
$$\left| \frac{\bar{M}^0(x, \tau)}{M_0} \right| \leq 1 \quad \forall x, \tau \in [0, 1] \quad (1.5)$$

T\* (1.3) chúng ta thấy rằng (1.5) sẽ được thỏa mãn nếu như chọn K sao cho:

$$\frac{2m}{n} \frac{\rho L^2}{T^{*2}} \frac{Q(L, T^*)}{K M_0} \cdot \max_{\forall x \in [0, 1]} \left| \iint (1-\bar{x}^2)^s d\bar{x} + \frac{x}{a} + b \right| = 1 \quad (1.6)$$

Ở đây các tham số a, b được xác định từ điều kiện  $\bar{M}^0(\bar{x}, \tau) \neq 0$  và

$$P = \max_{\forall x \in [0, 1]} \left| \iint (1-\bar{x}^2)^s d\bar{x} + \frac{x}{a} + b \right| \text{ đạt giá trị nhỏ nhất.}$$



Hình 2

Thay các giá trị (1.3a), (1.3b) vào (1.6) chúng ta sẽ có biểu thức sau đây để xác định tham số K

$$\frac{2m}{n} PG \frac{3A\lambda/K^2}{\sqrt{1 + 3A\lambda/K^2} - 1} = 1 \quad (1.7)$$

hoặc

$$3A\lambda' + \frac{n}{2mPG} = \frac{n}{2mPG} \sqrt{1 + 3A\lambda'}$$

với  $\lambda' = \lambda/K^2$

ở đây

Khi  $T > 1$

$$G = \frac{A}{\int_0^1 \tau(1-\tau)(1-\tau/n)^m d\tau};$$

$$A = \frac{\int_0^1 \tau(1-\tau)(1-\tau/n)^{m-1} d\tau}{\left[1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^m\right] \int_0^1 (1-\bar{x})(1-\bar{x}^2)^m dx} \quad (1.7a)$$

Khi  $T < 1$

$$G_2 = A \int_0^1 \tau(1-\tau)(1-\tau/n)^{m-1} d\tau + \left[ \frac{1-\frac{n}{m+1}}{2} + \frac{1-\left(\frac{n}{m+1}\right)^2}{2} \right] \frac{n}{m+1} \left(\frac{m}{m+1}\right)^m$$

$$A = \frac{\int_0^1 \tau(1-\tau)(1-\tau/n)^{m-1} d\tau + \left[ \frac{1-\frac{n}{m+1}}{2} + \frac{1-\left(\frac{n}{m+1}\right)^2}{2} \right] \frac{n}{m+1} \left(\frac{m}{m+1}\right)^m}{\left[1 - \frac{n}{m+1} \left(\frac{m}{m+1}\right)^m\right] \int_0^1 (1-\bar{x})(1-\bar{x}^2)^m dx} \quad (1.7b)$$

Giải (1.7) ta thu được :

$$3A\lambda' = \frac{n}{mPG} \left[ -1 + \frac{n}{4mPG} \right]; K = \sqrt{\frac{3AmPG}{n \left[ -1 + \frac{n}{4mPG} \right]}} \quad (1.8)$$

Với chú ý  $f_3(0) = 1$ ,  $B = 4$ ,  $C = \int_0^1 (1-\tau)(1-\tau/2) d\tau$ , thế (1.8) vào (2.21) phần I ta có

danh giá sau :

$$\frac{\delta}{2H} \geq \sqrt{\frac{\lambda}{12AB}} \left\{ \left[ -1 + \sqrt{1+B} \right] - \frac{1}{B} \left[ -1 + \sqrt{1+B} \right]^2 - \frac{1}{3B} \left[ -1 + \sqrt{1+B} \right]^3 \right\} \quad (1.9)$$

Ở đây :

$$B = \frac{n}{mPG} \left[ -1 + \frac{n}{4mPG} \right]$$

Xét trường hợp  $S = 2$  ta sẽ có :

$$P = \text{Max}_{x \in [0,1]} \left| \frac{x^2}{2} + \frac{x^6}{30} - \frac{x^4}{6} - \frac{11x}{30} + 0,03541733 \right| = 0,03541733$$

ta các điểm  $x = 0$ ,  $x = 0,1104292$ ,  $x = 1$

Xét trường hợp  $S = 3$  sẽ thu được kết quả:

$$P = \max_{\forall x \in [0,1]} \left| \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{10} - \frac{x^8}{56} - \frac{93x}{280} + 0,0285931 \right| = 0,0285931$$

tại các điểm  $\bar{x} = 0$ ,  $\bar{x} = 0,3110107$ ,  $\bar{x} = 1$ .

Kết quả tính toán khi:

$$S = 3; n = m = 3/2; T = 0,6; \delta/2H > 0,1986753\sqrt{\lambda};$$

$$S = 2; n = m = 3/2; T = 0,6; \delta/2H > 0,1907875\sqrt{\lambda};$$

$$S = 2; n = 3/2; m = 2; T = 0,5; \delta/2H > 0,1755679\sqrt{\lambda};$$

$$S = 2; n = 4; m = 3; T = 1; \delta/2H > 0,1327273\sqrt{\lambda};$$

$$S = 2; n = 4; m = 2; T = 4/3; \delta/2H > 0,143153\sqrt{\lambda}.$$

Các kết quả mới nhận được so với đánh giá trên của Ponth - Martin [3], các kết quả cũ [2] và các kết quả thực nghiệm của Symonds Jones [4] được chỉ trên hình 3. Sự phụ thuộc của kết quả nhận được vào hàm dạng và hàm biên độ được chỉ trên hình 4 và hình 5.

## § 2. DẦM CHỊU KHỚP BẢN LỀ TRÊN BIÊN

Xét dầm khớp bản lề chịu tác dụng xung lực vận tốc phân bố đều trên toàn bộ bề mặt. Trường đồng cho phép được chọn dưới dạng sau:

$$u^* = 0, \quad W^* = q(L, T^*)(1 - \tau)(1 - |\bar{x}|)$$

$$\bar{u} = 0, \quad \bar{W} = \begin{cases} Q(L, T^*)\tau(1 - \tau/n)^m(1 - \bar{x}^2) & \forall \tau \leq T = n/(m+1) \\ 0 & \forall \tau > T \end{cases} \quad (2.1)$$

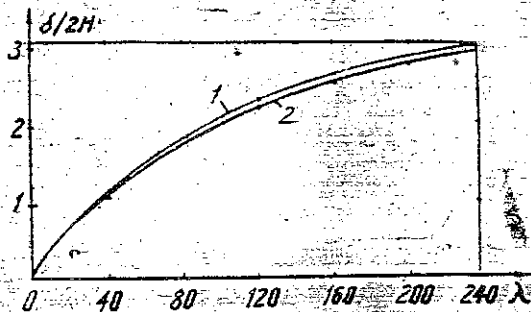
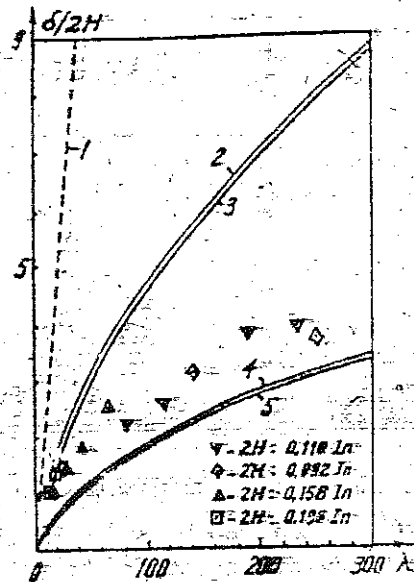
Trường ứng suất cho phép cân bằng với dịch chuyển  $\bar{W}$  có dạng:

$$M^0 = \frac{2m^2 \rho L^2}{n T^{*2}} \frac{Q(L, T^*)}{K} \left(1 - \frac{\tau}{n}\right)^{m-2} \left(1 - \frac{m+1}{2n} \tau\right) \left\{ \frac{\bar{x}^2}{2} - \frac{\bar{x}^4}{12} + \frac{\bar{x}}{a} + b \right\}; \quad (2.2)$$

Ở đây: Khi  $T \geq 1$

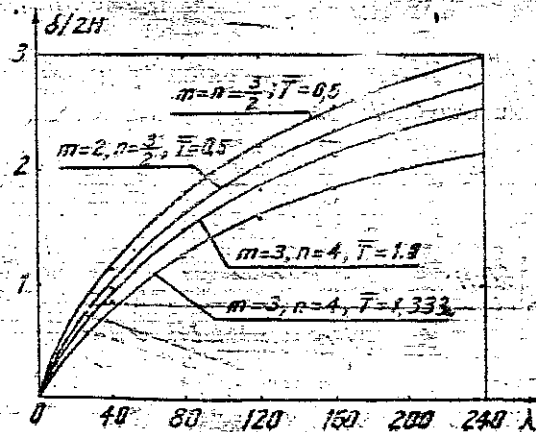
$$Q(L, T^*) = \frac{6T^*W_0}{1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^m}; \quad A = \frac{\int_0^1 \tau(1-\tau)(1-\tau/n)^m d\tau}{1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^m} \quad (2.3)$$

Hình 3 :  
 So sánh các kết quả đã có và kết quả mới ;  
 - (1) đánh giá trên theo lý thuyết tuyến tính của Martin [8]  
 - (2) đánh giá trên theo lý thuyết biến dạng [3]  
 - (3) đánh giá trên lý thuyết giá số [3]  
 - (4) kết quả mới  
 - (5) kết quả cũ [2]  
 - Dữ kiện thực nghiệm Symonds Jones [4]  
 (trên hình)



Hình 4: Sự phụ thuộc của kết quả đánh giá vào hàm dạng.  
 1. Đánh giá khi  $S = 3, m = n = 3/2$   
 2. Đánh giá khi  $S = 2, m = n = 3/2$

Hình 5. Sự phụ thuộc của đánh giá vào hàm biên độ khi chọn  
 $\bar{W} = Q(L, T^*) \tau (1 - \tau |n|)^m (1 - \bar{x}^2)^2$



Khi  $\bar{T} < 1$

$$Q(L, T^*) = \frac{6T^* \bar{W}_0}{5 \left[ 1 - \frac{n}{m+1} \left( \frac{m}{m+1} \right)^m \right]} \quad (2-4)$$

$$A = \frac{n(m+1) \int_0^1 \tau(1-\tau)(1-\tau/n)^{m-1} \left[ \frac{1}{2} \frac{n}{m+1} + \frac{1}{2} \left( \frac{n}{m+1} \right)^2 \right] \frac{n}{m+1} \left( \frac{m}{m+1} \right)^m}{5 \left[ 1 - \frac{n}{m+1} \left( \frac{m}{m+1} \right)^m \right]}$$

Các tham số a, b được xác định sao cho  $M^0(-1, \tau) = M^0(1, \tau) = 0 \forall \tau \in [0, \infty)$

và 
$$P = \max_{x \in [0,1]} \left| \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{12} + \frac{x}{a} + b \right|$$
 đạt giá trị nhỏ nhất

Từ đó suy ra:

$$P = \max_{x \in [0,1]} \left| \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{12} - \frac{17x}{36} + \frac{1}{18} \right| = 0,055462154 \quad (2.5)$$

tại  $x = 0$  và  $x = 0,5187559748$ . Tương tự như trong trường hợp đàm phán kết hợp (2.1) - (2.3), (2.2) với điều kiện  $|M^0 M_0| \leq 1$  ta suy ra kết quả sau đây:

$$\frac{m}{n} \frac{12A\lambda/K^2}{-1 + \sqrt{1 + 12A\lambda K^2}} PG = 1 \quad (2.6)$$

Giải ra ta thu được:

$$12A\lambda K^2 = \frac{2n}{mPG} \left[ -1 + \frac{n}{2mPG} \right] \quad (2.7)$$

Từ đó suy ra:

$$K = \sqrt[3]{\frac{6AmPG}{n \left[ -1 + \frac{n}{2mPG} \right] \lambda}} \quad (2.8)$$

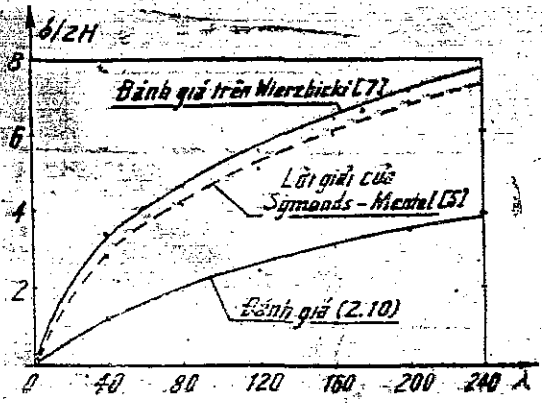
Đặt

$$B = \frac{2n}{mPG} \left[ -1 + \frac{n}{2mPG} \right] \quad (2.9)$$

Với chú ý  $f_3(0) = 1, C = \frac{1}{12}, B = 2$  từ (2.2) của phần I kết hợp với (2.7), (2.8), (2.9)

ta thu được kết quả:

$$\delta/2H \geq \sqrt{\frac{\lambda}{12AB}} \left\{ \left[ -1 + \sqrt{1+B} \right] - \frac{1}{B} \left[ -1 + \sqrt{1+B} \right]^2 - \frac{1}{3B} \left[ -1 + \sqrt{1+B} \right]^3 \right\} \quad (2.10)$$



Hình 6. So sánh lời giải mới với các lời giải đã có khi chọn  $\bar{W} = QCL, T^* \tau(1 - 2\tau/3)^{3/2} (1 - \bar{x}^2)$

So sánh kết quả (2.10) khi  $m = n = 3/2$  với đánh giá trên của Wierzbicki [7], lời giải của Symonds Mentel [5] được chỉ trên hình 6.

## KẾT LUẬN

Trên đây chúng ta nhận được đánh giá dịch chuyển lớn nhất của dầm ngàm và khớp ở biên chịu tải trọng xung lực vận tốc khi chọn trường động cho phép dưới dạng

$$u^* = 0, W^* = q(L, T^*) (1 - \tau) (1 - |x|), \bar{u} = 0; \bar{W} = Q(L, T^*) (1 - \tau/n) \tau (1 - x^2)^3.$$

Kỹ thuật xác định tham số K được chỉ ra qua biểu thức (1.6), (1.7), (1.8), và (2.6), khi chúng ta chọn trạng thái ứng suất cho phép  $N, M^0$  cân bằng với dịch chuyển cho phép  $W$  trong dạng uốn thuần túy. Khác với các tác giả trước đây đều chọn các trường động cho phép trong dạng tách biệt là các hàm tuyến tính của biến thời gian và không gian [4, 6, 8]. Trong bài này chúng ta chọn trong dạng bội bậc cao. Khi khảo sát ảnh hưởng của kết quả đo việc chọn hàm biên độ bội cao (linh) đã chỉ ra rằng tham số  $T = n/(m+1)$  sẽ đóng vai trò quyết định. Khi  $T \in [0; 4/3]$  đánh giá sẽ đạt cực đại khi  $T$  ở lân cận điểm 0, 6. Ảnh hưởng mức độ bội của hàm dạng (tham số S) vào đánh giá chỉ ra trên hình 4, với bội cao có thể nhận được đánh giá tốt hơn. Kỹ thuật đánh giá được trình bày ở đây cho chúng ta nhiều khả năng nhận được đánh giá tốt hơn phương pháp cũ (2) hình 3. Đánh giá nhận được là phù hợp với kết quả thực nghiệm và các lời giải cổ điển.

Địa chỉ:

Nhà ngày 2/10/1987

Phân viện Cơ học T. p. HCM

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. VŨ VĂN THẾ. Về đánh giá dịch chuyển của dầm cứng dẻo chịu tải động I. Tạp chí Cơ học số 3, 1988.
2. VŨ VĂN THẾ. Đánh giá dịch chuyển lớn của dầm cứng dẻo chịu tải động. Tạp chí khoa học Kỹ thuật số 5, 6, 1984.
3. MARTIN J. B., PONTIER A. R. Bounds for impulsively loaded plastic structures. J. Eng. Mech. Div. PP. 107-119, vol. 98, 1972.
4. SYMONDS P. S., JONES N. Impulsive loading of fully clamped beams with finite plastic deflection and strain rate sensitivity. Int. J. Mech. Sci. PP 49-70, vol. 14, 1972.
5. SYMONDS P. S., MENTEL J. I. Impulsive loading of plastic beams with axial constraints. J. Mech. Phys. Sol. PP. 196-222, vol. 6, 1958.
6. MORALES W. J., NEVILL G. E. Lower bounds on deformations of dynamically loaded rigid plastic continua. AIAA Journal. PP 965, vol 7, 1970.
7. WIERZBICKI T. Bounds for large Plastic deformations of dynamically loaded continua and structures. Course on Dynamics of plastic structures EISM Udine Italy, 1979.
8. MARTIN J. B. Impulsive Loading Theorems for rigid plastic continua. J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE. EMS. PP. 27-42, 1964.

## SUMMARY

### ON BOUND FOR DISPLACEMENT OF DYNAMICALLY LOADED RIGID PLASTIC BEAMS II

In this part the particular case of a fully clamped and simple supported beam acted on by a uniformly initial velocity  $W_0$  is studied in some details. Lower bound on permanent deflection at the center of the beam is established (1.9), (2.10) by a suitable choice of the kinematically admissible velocity and displacement field. (1.1) It is observed that reasonable agreement between the lower bound (1.9) and the experimental results has been obtained (Fig. 3).