Tạp chí Cơ học tập XI, 1989 số 3 (trang 19 — 27)

NGUYÊN LÝ GAOXƠ TRONG VA CHẠM CẤP HAI

NGUYỄN VĂN ĐÌNH

§ ĐẶT VẤN ĐỀ

Va chạm cấp hai là hiện tượng biến thiên đột ngột của gia tốc khi cơ hệ giữ nguyên vị trí và vận tốc. Hiện tượng này có ý nghĩa kỹ thuật và — về mặt lý thuyết — đã được đề cập đến — thí dụ — trong [1]. Vấn đề quan trọng là thiết lập điều kiện loại trừ va chạm cấp hai đã được giải quyết tổng quát trong [2]. Dưới đây, tiếp tục khảo sát, sẽ trình bày quy luật biến thiên của gia tốc: nguyên lý cưỡng bức cực tiểu trong va chạm cấp hai.

§ 1. DẠNG ĐỐI XỨNG CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH VA CHẠM CẤP HAI

Trong [2] sau khi tách phần giao (π) của các liên kết hệ phương trình va chạm cấp hai có dạng:

$$\begin{cases} A\ddot{q}_- = P_- + \sum \lambda_\nu^- \pi_\nu + \sum \chi_\xi^- F_\xi & (1.1) \\ \tilde{\pi}_\mu^- = \pi'_\mu \ddot{q}_- + \pi_\mu^- = 0 & (1.2) \\ \tilde{F}_\eta^- = F'_\eta \ddot{q}_- + F_\eta^- = 0 & (1.3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A\ddot{q}_+ = P_+ + \sum \lambda_\nu^+ \pi_\nu + \sum \delta_\zeta^+ G_\zeta & (1.4) \\ \tilde{\pi}_\mu^+ = \pi'_\mu \ddot{q}_+ + \pi_\mu^+ = 0 & (1.5) \\ \tilde{G}_\theta^+ = G'_\theta \ddot{q}_+ + G_\theta^+ = 0 & (1.6) \end{cases}$$

và điều kiện loại trừ va chạm cấp hai là:

$$\text{hạng } [\pi_\nu, F_\xi, G_\zeta, \Delta P] = \text{hạng } [\pi_\nu F_\xi G_\zeta] = \alpha + \beta - \gamma \qquad (1.7)$$

$$\pi_\mu^- = \pi_\mu^+ \qquad (1.8)$$

$$\text{hạng}\begin{bmatrix} \pi'_\mu A^{-1}\pi_\nu & \pi'_\mu A^{-1}F_\xi & \pi_\mu^- + \pi'_\mu A^{-1}P_- \\ F'_\eta A^{-1}\pi_\nu & F'_\eta A^{-1}F_\xi & F_\eta^- + F'_\eta A^{-1}P_- \\ G'_\theta A^{-1}\pi_\nu & G'_\theta A^{-1}F_\xi & G_\theta^+ + G'_\theta A^{-1}P_- \end{bmatrix} = \alpha \qquad (1.9)$$

$$\text{hạng}\begin{bmatrix} \pi'_\mu A^{-1}\pi_\nu & \pi'_\mu A^{-1}G_\zeta & \pi_\mu^+ + \pi'_\mu A^{-1}P_+ \\ F'_\eta A^{-1}\pi_\nu & F'_\eta A^{-1}G_\zeta & F_\eta^- + F'_\eta A^{-1}P_+ \\ G'_\theta A^{-1}\pi_\nu & G'_\theta A^{-1}G_\zeta & G_\theta^+ + G'_\theta A^{-1}P_+ \end{bmatrix} = \beta \qquad (1.10)$$

trong đó các ký hiệu có cùng ý nghĩa như trong [2].

Tưởng tượng ngay đầu va chạm, đặt thêm $(\beta - \gamma)$ liên kết:

$$\tilde{G}_\theta^- = G'_\theta q + G_\theta^- = 0 \qquad (1.11)$$

với G_θ^- chọn theo điều kiện (1.7) — (1.10) để không xảy ra va chạm cấp hai.

Chú ý rằng ở đây $\Delta P = 0$, toàn bộ α liên kết cũ (1.2) (1.3) được duy trì nghĩa là không có loại liên kết (F) bị mất khi va chạm và số α giữ vai trò số γ, số liên kết sau va chạm là $\alpha + \beta - \gamma$, $\pi_\mu^+ = \pi_\mu^-$ và G_θ^- ở (1.11) giữ vai trò của G_θ^+

Dễ dàng thấy (1.7) thỏa mãn vì:

$$\text{hạng}\,[\pi_\nu, F_\xi, G_\zeta, 0] = \text{hạng}\,[\pi_\nu, F_\xi, G_\zeta] = \alpha + (\alpha + \beta - \gamma) - \alpha = \alpha + \beta - \gamma \qquad (1.12)$$

Điều kiện (1.8) cũng thỏa mãn vì toàn bộ các liên kết cũ được duy trì với các số hạng tự do π_μ^-, F_η^- không thay đổi.

Điều kiện (1.10) có dạng phức tạp hơn:

$$\text{hạng}\,[\Delta] = \text{hạng}\begin{bmatrix} \pi'_\mu A^{-1}\pi_\nu & \pi'_\mu A^{-1}F_\xi & \pi'_\mu A^{-1}G_\zeta & \pi_\mu^- + \pi'_\mu A^{-1}P_- \\ F'_\eta A^{-1}\pi_\nu & F'_\eta A^{-1}F_\xi & F'_\eta A^{-1}G_\zeta & F_\eta^- + F'_\eta A^{-1}P_- \\ G'_\theta A^{-1}\pi_\nu & G'_\theta A^{-1}F_\xi & G'_\theta A^{-1}G_\zeta & G_\theta^- + G'_\theta A^{-1}P_- \end{bmatrix} = \alpha + \beta - \gamma \qquad (1.13)$$

nhưng luôn luôn thỏa mãn vì $(\alpha + \beta - \gamma)$ cột đầu của ma trận ở vế trái là ma trận Gram xây dựng từ $(\alpha + \beta - \gamma)$ véctơ độc lập bậc nhất π_μ, F_η, G_θ [3].

Kết quả là G_θ^- chọn theo điều kiện (1.9):

$$\text{hạng}\begin{bmatrix} \pi'_\mu A^{-1}\pi_\nu & \pi'_\mu A^{-1}F_\xi & \pi_\mu^- + \pi'_\mu A^{-1}P_- \\ F'_\eta A^{-1}\pi_\nu & F'_\eta A^{-1}F_\xi & F_\eta^- + F'_\eta A^{-1}P_- \\ G'_\theta A^{-1}\pi_\nu & G'_\theta A^{-1}F_\xi & G_\theta^- + G'_\theta A^{-1}P_- \end{bmatrix} = \alpha \qquad (1.14)$$

Tương tự ngay cuối va chạm đặt thêm $(\alpha - \gamma)$ liên kết:

$$\widetilde{F}^+_\eta = F'_\eta \ddot{q} + F^+_\eta = 0 \tag{1.15}$$

với F^+_η chọn theo điều kiện loại trừ va chạm cấp hai:

$$\text{hạng} \begin{bmatrix} \pi'_\mu A^{-1}\pi_\nu & \pi'_\mu A^{-1}G_\zeta & \pi^+_\mu + \pi'_\mu A^{-1}P_+ \\ G'_\theta A^{-1}\pi_\nu & G'_\theta A^{-1}G_\zeta & G^+_\theta + G'_\theta A^{-1}P_+ \\ F'_\eta A^{-1}\pi_\nu & F'_\eta A^{-1}G_\zeta & F^+_\eta + F'_\eta A^{-1}P_+ \end{bmatrix} = \beta \tag{1.16}$$

Cũng trong [2] đã biết rằng nếu va chạm cấp hai không xảy ra, tương ứng liên kết mới, các nhân tử Lagrăng triệt tiêu.

Tổng hợp các kết quả, có thể viết hệ phương trình va chạm cấp hai dưới dạng đối xứng:

$$\begin{cases} A\ddot{q}_- = P_- + \sum \lambda^-_\nu \pi_\nu + \sum \chi^-_\xi F_\xi + \sum \sigma^-_\zeta G_\zeta & (1.17) \\ \pi'_\mu \ddot{q}_- + \pi^-_\mu = 0 & (1.18) \\ F'_\eta \ddot{q}_- + F^-_\eta = 0 & (1.19) \\ G'_\theta \ddot{q}_- + G^-_\theta = 0 & (1.20) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A\ddot{q}_+ = P_+ + \Sigma\lambda^+_\nu \pi_\nu + \Sigma\chi^+_\xi F_\xi + \Sigma\sigma^+_\zeta G_\zeta & (1.21) \\ \pi'_\mu \ddot{q}_+ + \pi^+_\mu = 0 & (1.22) \\ F'_\eta \ddot{q}_+ + F^+_\eta = 0 & (1.23) \\ G'_\theta \ddot{q}_+ + G^+_\theta = 0 & (1.24) \end{cases}$$

trong đó G^-_θ, F^+_η chọn theo (1.14) (1.16), $\sigma^-_\zeta = 0$, $\chi^+_\xi = 0$. Tương ứng trừ các vế của hai hệ trên, chúng ta được:

$$A(\Delta\ddot{q} - \Delta\ddot{q}_o) = \Sigma\Delta\lambda_\nu \pi_\nu + \Sigma\Delta\chi_\xi F_\xi + \Sigma\Delta\sigma_\zeta G_\zeta \tag{1.25}$$

$$\pi'_\mu \Delta\ddot{q} + \Delta\pi_\mu = 0 \tag{1.26}$$

$$F'_\eta \Delta\ddot{q} + \Delta F_\eta = 0 \tag{1.27}$$

$$G'_\theta \Delta\ddot{q} + \Delta G_\theta = 0 \tag{1.28}$$

trong đó $\Delta\ddot{q}_o = A^{-1}\Delta P$ (biến thiên gia tốc gây ra ở hệ tự do bởi biến thiên kích động $\Delta P = P_+ - P_-$), và — ở các số hạng khác — $\Delta X = X_+ - X_-$ (biến thiên đại lượng X trước và sau va chạm).

§2. BIẾN THIÊN KHẢ DĨ CỦA GIA TỐC VÀ NGUYÊN LÝ GAOXƠ

Xem gia tốc suy rộng $\ddot{q}_-$ đầu va chạm là đã biết. Gọi tập gia tốc suy rộng khả dĩ cuối va chạm là tập B các gia tốc $\ddot{q}$ thỏa mãn các hệ thức (2.1), (2.2) và từ đó tách ra tập con B' thỏa mãn thêm hệ thức (2.3) :

$$\pi'_\mu \ddot{q} + \pi^+_\mu = 0 \quad (2.1); \quad G'_\theta \ddot{q} + G^+_\theta = 0 \quad (2.2); \quad F'_\eta \ddot{q} + F^+_\eta = 0 \quad (2.3)$$

Gọi tập biến thiên khả dĩ của gia tốc suy rộng trong va chạm là tập δB các biến thiên $\delta\ddot{q} = \ddot{q} - \ddot{q}_-$ trong đó $\ddot{q}$ thuộc tập B và từ đó tách ra tập con δB' tương ứng khi $\ddot{q}$ thuộc tập con B'. Tập δB' thỏa mãn các hệ thức :

$$\pi'_\mu \delta\ddot{q} + \Delta\pi_\mu = 0 \quad (2.4); \quad G'_\theta \delta\ddot{q} + \Delta G_\theta = 0 \quad (2.5); \quad F'_\eta \delta\ddot{q} + \Delta F_\eta = 0 \quad (2.6)$$

Từ (1.22) (1.23) (1.24) dễ dàng nhận thấy gia tốc thực cuối va chạm thuộc tập B' và từ (1.26) (1.27) (1.28) — biến thiên thực của gia tốc trong va chạm thuộc tập δB'. Từ (2.4) (2.5) (2.6) và (1.26) (1.27) (1.28) — suy ra :

$$\pi'_\mu (\delta\ddot{q} - \Delta\ddot{q}) = 0 \quad (2.7); \quad G'_\theta (\delta\ddot{q} - \Delta\ddot{q}) = 0 \quad (2.8); \quad F'_\eta (\delta\ddot{q} - \Delta\ddot{q}) = 0 \quad (2.9)$$

Nhân trái hai vế của (1.25) với $(\delta\ddot{q} - \Delta\ddot{q})$ và chú ý đến (2.7) (2.8) (2.9) chúng ta rút ra hệ thức :

$$(\delta\ddot{q} - \Delta\ddot{q})' A (\Delta\ddot{q}_o - \Delta\ddot{q}_o) = 0 \qquad (2.10)$$

Nguyên lý — Trong va chạm cấp hai, biến thiên thực của gia tốc là biến thiên khả dĩ thuộc tập con δB' làm cực tiểu hàm :

$$G = \frac{1}{2} (\delta\ddot{q} - \Delta\ddot{q}_o)' A (\delta\ddot{q} - \Delta\ddot{q}_o). \qquad (2.11)$$

Chứng minh — Tính hiệu giá trị hàm G tương ứng giá trị bất kỳ của biến thiên gia tốc khả dĩ $\delta\ddot{q}$ thuộc tập δB' với biến thiên thực $\Delta\ddot{q}$:

$$\Delta G = \frac{1}{2} (\delta\ddot{q} - \Delta\ddot{q})' A (\delta\ddot{q} - \Delta\ddot{q}_o) - \frac{1}{2} (\Delta\ddot{q} - \Delta\ddot{q}_o)' A (\Delta\ddot{q} - \Delta\ddot{q}_o) \qquad (2.12)$$

Vì ma trận A đối xứng nên có thể biến đổi :

$$\Delta G = \frac{1}{2} [(\delta\ddot{q} - \Delta\ddot{q}_o) - (\Delta\ddot{q} - \Delta\ddot{q}_o)]' A [(\delta\ddot{q} - \Delta\ddot{q}_o) - (\Delta\ddot{q} - \Delta\ddot{q})]$$
$$+ \frac{1}{2} (\delta\ddot{q} - \Delta\ddot{q}_o)' A (\Delta\ddot{q} - \Delta\ddot{q}_o) + \frac{1}{2} (\Delta\ddot{q} - \Delta\ddot{q}_o)' A (\delta\ddot{q} - \Delta\ddot{q}_o) -$$
$$- (\Delta\ddot{q} - \Delta\ddot{q}_o)' A (\Delta\ddot{q} - \Delta\ddot{q}_o) = \frac{1}{2} (\delta\ddot{q} - \Delta\ddot{q})' A (\delta\ddot{q} - \Delta\ddot{q}) +$$

$$+ (\delta\ddot{q} - \Delta\ddot{q}_o)' A(\Delta\ddot{q} - \Delta\ddot{q}_o) - (\Delta\ddot{q} - \Delta\ddot{q}_o)' A(\Delta\ddot{q} - \Delta\ddot{q}_o) =$$

$$= \frac{1}{2} (\delta\ddot{q} - \Delta\ddot{q})' A(\delta\ddot{q} - \Delta\ddot{q}) + (\delta\ddot{q} - \Delta\ddot{q})' A(\Delta\ddot{q} - \Delta\ddot{q}_o). \quad (2.13)$$

Theo 2.11) số hạng cuối ở vế phải triệt tiêu; mặt khác A là ma trận xác định dương nên:

$$\Delta G = \frac{1}{2} (\delta\ddot{q} - \Delta\ddot{q})' A(\delta\ddot{q} - \Delta\ddot{q}) \geqslant 0 \quad (2.14)$$

và chỉ triệt tiêu khi $\delta\ddot{q} = \Delta\ddot{q}$. Nguyên lý được chứng minh. Trường hợp kích động không biến thiên, $\Delta P = 0$ kéo theo $\Delta\ddot{q}_o = 0$ và $G = \frac{1}{2} (\delta\ddot{q})' A(\delta\ddot{q})$. Từ nguyên lý cưỡng bức suy ra biến thiên thực của gia tốc là biến thiên khả dĩ thuộc tập $\delta B'$ có môđuyn cực tiểu.

§ 3. BIẾN THIÊN KHẢ DĨ CỦA PHẢN LỰC VÀ NGUYÊN LÝ GAOXƠ

Có thể trình bày nguyên lý Gaoxơ dưới dạng phản lực. Ký hiệu Q_v^-, Q_ξ^+, $Q_\zeta^- = 0$ và Q_v^+, Q_ξ^+, Q_ζ^+ — các phản lực đầu và cuối va chạm; $\Delta Q_v = Q_v^+ - Q_v^-$, $\Delta Q_\xi = Q_\xi^+ - Q_\xi^-$, $\Delta Q_\zeta = Q_\zeta^+ - Q_\zeta^-$ — biến thiên của chúng trong va chạm. Chuyển các hệ phương trình va chạm (1.17) — (1.20) thành dạng.

$$A\ddot{q}_- = P_- + Q_- \quad (3.1); \quad \pi'_\mu A^{-1}Q_- + (\pi_\mu^- + \pi'_\mu A^{-1}P_-) = 0 \quad (3.2)$$

$$F'_\eta A^{-1}Q_- + (F_\eta^- + F'_\eta A^{-1}P_-) = 0 \quad (3.3); \quad G'_\theta A^{-1}Q_- + (G_\theta^- + G'_\theta A^{-1}P_-) = 0 \quad (3.4)$$

và hệ (1.21) — (1.24) thành:

$$A\ddot{q}_+ = P_+ + Q_+ \quad (3.5); \quad \pi'_\mu A^{-1}Q_+ + (\pi_\mu^+ + \pi'_\mu A^{-1}P_+) = 0 \quad (3.6)$$

$$F'_\eta A^{-1}Q_+ + (F_\eta^+ + F'_\eta A^{-1}P_+) = 0 \quad (3.7); \quad G'_\theta A^{-1}Q_+ + (G_\theta^+ + G'_\theta A^{-1}P_+) = 0 \quad (3.8)$$

trong đó $Q_- = \Sigma Q_v^- + \Sigma Q_\xi^- + \Sigma Q_\zeta^-$, $Q_+ = \Sigma Q_v^+ + \Sigma Q_\xi^+ + \Sigma Q_\zeta^+$. Từ đó hệ (1.25) — (1.26) chuyển thành:

$$A(\Delta\ddot{q}) - \Delta P = \Delta Q \quad (3.9); \quad \pi'_\mu A^{-1}(\Delta Q) + (\Delta\pi_\mu + \pi'_\mu A^{-1}\Delta P) = 0 \quad (3.10)$$

$$F'_\eta A^{-1}(\Delta Q) + (\Delta F_\xi + F'_\xi A^{-1}\Delta P) = 0 \quad (3.11); \quad G'_\theta A^{-1}(\Delta Q) + (\Delta G_\theta + G'_\theta A^{-1}\Delta P) = 0 \quad (3.12)$$

trong đó
$$\Delta Q = Q_+ - Q_-$$

xem các phản lực đầu va chạm là đã biết. Gọi tập phản lực khả dĩ cuối va chạm — ký hiệu B_1 — là tập phản lực Q_v, Q_ξ, Q_ζ thỏa mãn hai hệ thức (3-6) (3-7) và từ đó tách ra tập con B'_1 thỏa mãn thêm hai hệ thức (3-8).

Gọi tập biến thiên khả dĩ của phản lực cuối va chạm — ký hiệu δB_1 — tập $\delta Q_\nu = Q_\nu - Q_\nu^-$, $\delta Q_\xi = Q_\xi - Q_\xi^-$, $\delta Q_\zeta = Q_\zeta - Q_\zeta^-$ thỏa mãn hai hệ thức (3.10) (3.11) và từ đó tách ra tập con δB_1^* thỏa mãn thêm hệ thức (3.12)

Hiển nhiên các phản lực thực cuối va chạm thuộc tập B_1' và biến thiên thực của phản lực cuối va chạm thuộc tập δB_1. Cũng dễ dàng suy ra các hệ thức

$$\pi'_\mu A^{-1}(\delta Q - \Delta Q) = 0 \quad (3.13); \quad F'_\eta A^{-1}(\delta Q - \Delta Q) = 0 \quad (3.14); \quad G'_\theta A^{-1}(\delta Q - \Delta Q) = 0 \quad (3.15)$$

Chú ý rằng các liên kết là lý tưởng, các phản lực đầu cũng như cuối va chạm và do đó biến thiên thực ΔQ của phản lực biểu diễn bậc nhất qua hệ vecto π_ν, F_ξ, G_ζ:

$$\Delta Q = \Sigma p_\nu \pi_\nu + \Sigma q_\xi F_\xi + \Sigma r_\zeta G_\zeta \quad (3.16)$$

trong đó : p_ν, q_ξ, r_ζ — các hệ số không đồng thời triệt tiêu. Tương ứng nhân (3.13) (3.14) (3.15) với p_μ, q_η, r_θ rồi cộng lại, chúng ta được hệ thức :

$$(\Delta Q)' A^{-1}(\delta Q - \Delta Q) = 0 \quad (3.17)$$

Nguyên lý : Trong va chạm cấp hai, biến thiên thực của phản lực là biến thiên khả dĩ thuộc tập $\delta B_1'$ làm cực tiểu hàm :

$$G = \frac{1}{2}(\delta Q)' A^{-1}(\delta Q) \quad (3.18)$$

Chứng minh : Tính hiệu :

$$\Delta G = \frac{1}{2}(\delta Q)' A^{-1}(\delta Q) - \frac{1}{2}(\Delta Q)' A^{-1}(\Delta Q) \quad (3.19)$$

Chú ý đến tính đối xứng và xác định dương của ma trận A^{-1} và đến hệ thức (3.17) có thể biến đổi :

$$\Delta G = \frac{1}{2}(\delta Q - \Delta Q)' A^{-1}(\delta Q - \Delta Q) + \frac{1}{2}(\delta Q)' A^{-1}(\Delta Q)$$

$$+ \frac{1}{2}(\Delta Q)' A^{-1}(\delta Q) - (\Delta Q)' A^{-1}(\Delta Q)$$

$$= \frac{1}{2}(\delta Q - \Delta Q)' A^{-1}(\delta Q - \Delta Q) + (\delta Q)' A^{-1}(\Delta Q) - (\Delta Q)' A^{-1}(\Delta Q)$$

$$= \frac{1}{2}(\delta Q - \Delta Q)' A^{-1}(\delta Q - \Delta Q) + (\delta Q - \Delta Q)' A^{-1}(\Delta Q)$$

$$= \frac{1}{2}(\delta Q - \Delta Q)' A^{-1}(\delta Q - \Delta Q) \geqslant 0 \quad (3.20)$$

và chỉ triệt tiêu khi : $\delta Q = \Delta Q$.

§4. BIỂU THỨC KHÁC CỦA BIẾN THIÊN GIA TỐC VÀ PHẢN LỰC

Bây giờ chúng ta trở lại dạng ban đầu của hệ phương trình va chạm cấp hai :

$$\begin{cases} A\ddot{q}_- = P_- + \sum \chi_r^- f_r & (4.1) \\ \tilde{f}_r^- = f_r'\ddot{q}_- + f_r^- = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, \alpha < N) & (4.2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A\ddot{q}_+ = P_+ + \sum \sigma_k^+ g_k & (4.3) \\ \tilde{g}_k^+ = g_k'\ddot{q}_+ + g_k^+ = 0 \; (k = 1, 2, \ldots, \beta < N) & (4.4) \end{cases}$$

và của điều kiện loại trừ va chạm cấp hai :

$$\text{hạng } [f_1, \ldots, f_\alpha, g_1, \ldots, g_\beta, \Delta P] = \text{hạng } [f_1, \ldots, f_\alpha, g_1, \ldots, g_\beta] = \alpha + \beta - \gamma, \quad (4.5)$$

$$\text{hạng } \begin{bmatrix} f_1 \ldots f_\alpha g_1 \ldots g_\beta \\ f_1^- \ldots f_\alpha^- g_1^+ \ldots g_\beta^+ \end{bmatrix} = \text{hạng } [f_1 \ldots f_\alpha g_1 \ldots g_\beta] = \alpha + \beta - \gamma \quad (4.6)$$

$$\text{hạng } \begin{bmatrix} f_s'A^{-1}f_r & f_s^- + f_s'A^{-1}P_- \\ g_m'A^{-1}f_r & g_m^+ + g_m'A^{-1}P_- \end{bmatrix} = \alpha \quad (4.7)$$

$$\text{hạng } \begin{bmatrix} f_s'A^{-1}g_k & f_s^- + f_s'A^{-1}P_+ \\ g_m'A^{-1}g_k & g_m^+ + g_m'A^{-1}P_+ \end{bmatrix} = \beta \quad (4.8)$$

Đặt thêm ở đầu va chạm β liên kết :

$$\tilde{g}_k^- = g_k'\ddot{q} + g_k^- = 0 \quad (4.9)$$

trong đó $\bar{g}_k$ được chọn theo điều kiện loại trừ va chạm cấp hai (4.5) — (4.8). Chú ý rằng các điều kiện trên được thiết lập khi các liên kết sau va chạm là độc lập với nhau. Ở đây, số liên kết sau va chạm (4.2) (4.9) là $(\alpha + \beta)$ nhưng chỉ có $(\alpha + \beta - \gamma)$ liên kết độc lập. Vì vậy cần một số lập luận bổ sung và kết quả cho thấy $\bar{g}_k$ được xác định bởi hai điều kiện :

$$\text{hạng } \begin{bmatrix} f_1 \ldots f_\alpha g_1 \ldots g_\beta \\ f_1^- \ldots f_\alpha^- g_1^- \ldots g_\beta^- \end{bmatrix} = \text{hạng } [f_1 \ldots f_\alpha g_1 \ldots g_\beta] = \alpha + \beta - \gamma \quad (4.10)$$

$$\text{hạng } \begin{bmatrix} f_s'A^{-1}f_r & f_s^- + f_s'A^{-1}P_- \\ g_m'A^{-1}f_r & g_m^- + g_m'A^{-1}P_- \end{bmatrix} = \alpha \quad (4.11)$$

(có thể thấy (4.10) dẫn đến γ hệ thức mà khi thỏa mãn thì (4.11) dẫn đến $(\beta - \gamma)$ hệ thức ; tất cả có β hệ thức xác định β đại lượng $\bar{g}_k$).

Tương tự ở cuối va chạm đặt thêm α liên kết :

$$\tilde{f}_r^+ = f_r'\ddot{q} + f_r^+ = 0 \quad (4.12)$$

trong đó f_r^+ chọn theo điều kiện loại trừ va chạm cấp hai, quy về (4.10) và :

$$\text{hạng } \begin{bmatrix} g_k'A^{-1}g_m & g_k^+ + g_k'A^{-1}P_+ \\ f_r'A^{-1}g_m & f_r^+ + f_r'A^{-1}P_+ \end{bmatrix} = \beta \quad (4.13)$$

Phản lực các liên kết được đặt thêm xem là triệt tiêu (phần liên kết mới độc lập với liên kết cũ có phản lực triệt tiêu như đã biết ; phần không độc lập biểu diễn bậc nhất qua các liên kết cũ nên thực sự không phải liên kết mới và do đó có thể quy ước phản lực triệt tiêu). Vì vậy hệ phương trình va chạm cấp hai có dạng đối xứng :

$$\begin{cases} A\ddot{q}_- = P_- + \sum \chi_r^- f_r + \sum \sigma_k^- g_k & (4.14) \\ f_r'\ddot{q}_- + f_r^- = 0 \quad (4.15)\ ; \quad g_k'\ddot{q}_- + g_k^- = 0 & (4.16) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A\ddot{q}_+ = P_+ + \sum \chi_r^+ f_r + \sum \sigma_k^+ g_k & (4.17) \\ f_r'\ddot{q}_+ + f_r^+ = 0 \quad (4.18)\ ; \quad g_k'\ddot{q}_+ + g_k^+ = 0 & (4.19) \end{cases}$$

trong đó : g_k^-, f_r^+ xác định theo (4.10) (4.11) (4.13) và $\sigma_k^- = 0$, $\chi_r^+ = 0$.
Tập con B' của các gia tốc khả dĩ sau va chạm thỏa mãn các hệ thức :

$$f_r'\ddot{q} + f_k^+ = 0 \quad (4.20)\ ; \qquad g_k'\ddot{q} + g^+ = 0 \qquad (4.21)$$

và tập con $\delta B'$ của biến thiên khả dĩ các gia tốc thỏa mãn các hệ thức :

$$f_r'\delta\ddot{q} + \Delta f_r = 0 \quad (4.22)\ ; \qquad g_k'\delta\ddot{q} + \Delta g_k = 0 \qquad (4.23)$$

trong đó : $\Delta f_r = f_r^+ - f_r^-,\quad \Delta g_k = g_k^+ - g_k^-$

Chuyển hệ phương trình va chạm sang dạng phản lực, chúng ta có :

$$\begin{cases} A\ddot{q}_- = P_- + Q_- & (4.24) \\ f_r'A^{-1}Q_- + (f_r^- + f_r'A^{-1}P_-) = 0 & (4.25) \\ g_k'A^{-1}Q_- + (g_k^- + g_k'A^{-1}P_-) = 0 & (4.26) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A\ddot{q}_+ = P_+ + Q_+ & (4.27) \\ f_r'A^{-1}Q_+ + (f_r^+ + f_r'A^{-1}P_+) = 0 & (4.28) \\ g_k'A^{-1}Q_+ + (g_k^+ + g_k'A^{-1}P_+) = 0 & (4.29) \end{cases}$$

trong đó :

$$Q_- = \sum Q_r^- + \sum Q_k^-, \quad Q_+ = \sum Q_r^+ + \sum Q_k^+, \quad Q_k^- = 0, \quad Q_r^+ = 0 .$$

Tập con B_1' của phản lực khả dĩ sau va chạm xác định bởi hệ thức : (4.28) (4.29) sau khi thay Q_+ bởi phản lực khả dĩ Q. Tập con $\delta B_1'$ của biến thiên khả dĩ các phản lực xác định bởi hệ thức :

$$f_r'A^{-1}\delta Q + (\Delta f_r + f_r'A^{-1}\Delta P) = 0 \qquad (4.30)$$

$$g_k'A^{-1}\delta Q + (\Delta g_k + g_k'A^{-1}\Delta P) = 0 \qquad (4.31)$$

§5. VỀ NGUYÊN LÝ GAOXƠ

Đến đây cần làm sáng tỏ quan hệ giữa nguyên lý Gaoxơ thông thường với nguyên lý đó trong va chạm cấp hai. Trước hết dễ nhận thấy nguyên lý Gaoxơ thông thường chính là nguyên lý của va chạm cấp hai. Thực vậy nguyên lý Gaoxơ của chuyển động thông thường so sánh gia tốc của cơ hệ tự do (giải phóng liên kết) với cơ hệ khảo sát là cơ hệ chịu liên kết. Như thế xảy ra va chạm cấp hai : nếu xem gia tốc tự do là gia tốc trước va chạm thì gia tốc sau va chạm là gia tốc khi đặt thêm liên kết (của cơ hệ khảo sát). Chú ý rằng ở đây, tập con B' trùng với tập B và được xác định từ các phương trình liên kết của cơ hệ khảo sát (sau va chạm).

Một nhận xét khác : nguyên lý Gaoxơ vẫn đúng khi chỉ giải phóng một phần liên kết nghĩa là khi so sánh gia tốc của cơ hệ khảo sát với cơ hệ tự do hơn do chịu ít liên kết hơn. Trường hợp này, tập con B' cũng trùng với tập B vì các liên kết trước va chạm (còn lại sau khi giảm liên kết) được duy trì sau va chạm.

KẾT LUẬN

Những kết quả thu được cho thấy khi xảy ra va chạm cấp hai, sự biến thiên đột ngột của gia tốc cũng như của phản lực tuân theo nguyên lý Gaoxơ. Dưới dạng tổng quát, các biểu thức của tập con các biến thiên khả dĩ của gia tốc và của phản lực nói trong nguyên lý được thiết lập dễ dàng và do toàn bộ các liên kết trước và sau va chạm quyết định.

Địa chỉ

Viện Cơ học Viện KHVN

Nhận ngày 29/2/1988

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. КИЛЬЧЕВСКИЙ Н. А. Курс теоретической механики. Т.2, Наука, М., 1977.

2. НГУЕН ВАН ДИНЬ. Условия исключения удара второго рода. ПМ. Том XX, №10, 1984.

3. ГАНТМАХЕР Ф. Р. Теория матриц. Наука, М., 1966.

RESUMÉ

LE PRINCIPE DE GAUSS POUR LE PHÉNOMÈNE DU CHOC DU SECOND ORDRE

Dans cet article, a été établi le principe de Gauss pour le phénomène du choc du second ordre. Le sous-ensemble des accélérations cité dans le principe est défini non seulement par les liaisons qui existent après le choc mais encore par cellesqui existent avant le choc.