Tạp chí cơ học tập XI, 1989 Số 2 (trang 10—16)

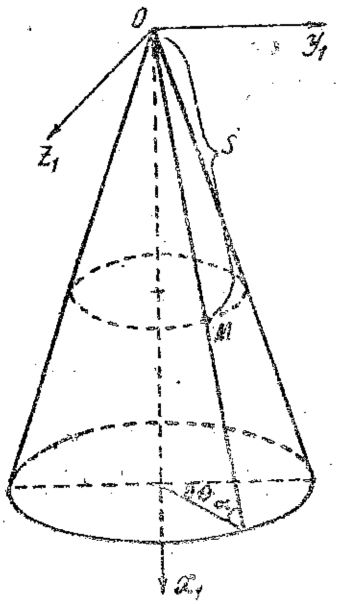
BÀI TOÁN ỔN ĐỊNH CỦA VỎ NÓN THEO LÝ THUYẾT QUÁ TRÌNH BIẾN DẠNG ĐÀN – DẺO

ĐÀO VĂN DŨNG

Bài toán ổn định của bản và vỏ trụ mỏng theo lý thuyết quá trình biến dạng đàn—dẻo đã được nghiên cứu trong [5, 6, 7]. Trong bài này xây dựng các hệ thức cơ bản cho bài toán ổn định của vỏ nón mỏng đối với quá trình rẽ nhánh động chủ động [1].

§1. CÁC HỆ THỨC CƠ BẢN ĐỐI VỚI TRẠNG THÁI XUẤT PHÁT

Xét vỏ nón tròn xoay có bề dày h, chiều cao là H, giả thiết rằng đường sinh tạo với đáy một góc α không đổi. Khi đó gọi $ox_1y_1z_1$ là hệ trục tọa độ có gốc 0 trùng với đỉnh của hình nón (hình vẽ 1), thì vị trí của điểm M bất kỳ thuộc mặt phẳng trung bình của hình nón được xác định như sau :



Hình 1

$$x_1 = S\sin\alpha\ ;\ y_1 = S\cos\alpha\cos\theta;$$
$$z_1 = S\cos\alpha\cdot\sin\theta.$$

Từ đây suy rằng các đại lượng S và θ sẽ được xem như các đường tọa độ cong trong mặt phẳng trung bình của nón và trục z sẽ hướng theo pháp tuyến của mặt tạo bởi S và θ. Khi đó các hệ thức cơ bản xác định trạng thái xuất phát của bài toán ổn định rẽ nhánh động chủ động của vỏ nón là (các đại lượng này ký hiệu bởi chỉ số 0) [3].

Các thành phần biến dạng tại điểm bất kỳ

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon^*_{ij} + Z\chi_{ij},\ i,\ j = 1,\ 2 \tag{1.1}$$

trong đó ε^*_{ij} là các thành phần biến dạng của mặt trung bình, χ_{ij} là độ cong và độ xoắn của vỏ nón, chúng có dạng :

$$\varepsilon^*_{11} = \frac{\partial u}{\partial S};\ \varepsilon^*_{22} = \frac{1}{S\cos\alpha}\frac{\partial v}{\partial\theta} + \frac{u}{S} - \frac{W\mathrm{tg}\alpha}{S},$$

$$\varepsilon^*_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{S\cos\alpha}\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial S} - \frac{v}{S}\right), \tag{1.2}$$

$$\chi_{11} = -\frac{\partial^2 W}{\partial S^2}\ ;\ \chi_{22} = -\frac{1}{S^2\cos\alpha}\frac{\partial^2 W}{\partial\theta^2} - \frac{tg\alpha}{S^2\cos\alpha}\frac{\partial v}{\partial\theta} - \frac{1}{S}\frac{\partial W}{\partial S},$$

$$\chi_{12} = -\frac{1}{2}\left(\frac{tg\alpha}{S}\frac{\partial v}{\partial S} - \frac{2tg\alpha}{S^2}v + \frac{2}{S\cos\alpha}\frac{\partial^2 W}{\partial S\partial\theta} - \frac{2}{S^2\cos\alpha}\frac{\partial W}{\partial\theta}\right). \quad (1.3)$$

Nếu giả thiết χ_{22}, χ_{12} không phụ thuộc vào v thì (1.3) có dạng

$$\chi_{11} = -\frac{\partial^2 W}{\partial S^2};\ \chi_{22} = -\frac{1}{S^2\cos^2\alpha}\frac{\partial^2 W}{\partial\theta^2} - \frac{1}{S}\frac{\partial W}{\partial S},$$

$$\chi_{12} = -\frac{1}{S\cos\alpha}\frac{\partial^2 W}{\partial S\partial\theta} + \frac{1}{S^2\cos\alpha}\frac{\partial W}{\partial\theta}. \quad (1.4)$$

Ở đây u, v là các thành phần dịch chuyển theo hướng S và θ, còn w là độ võng của mặt trung bình.

Các thành phần lực dãn và mômen như sau :

$$N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{ij}dZ\ ;\ M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} Z\cdot\sigma_{ij}dZ \quad (1.5)$$

Phương trình cân bằng đối với phần tử vỏ có tính đến sự thay đổi hình học [3].

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial S}S\cos\alpha + N_{11}\cos\alpha + \frac{\partial N_{21}}{\partial\theta} - N_{22}\cos\alpha = 0 \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial N_{22}}{\partial\theta} + \frac{\partial N_{12}}{\partial S}S\cos\alpha + N_{12}\cos\alpha + N_{21}\cos\alpha - Q_2\sin\alpha = 0 \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial S}S\cos\alpha + Q_1\cos\alpha + \frac{\partial Q_2}{\partial\theta} + N_{22}\sin\alpha + qS\cos\alpha = 0 \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial S}S\cos\alpha + M_{11}\cos\alpha + \frac{\partial M_{21}}{\partial\theta} - M_{22}\cos\alpha - Q_1S\cos\alpha = 0 \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial M_{12}}{\partial S}S\cos\alpha + \frac{\partial M_{22}}{\partial\theta} + M_{12}\cos\alpha + M_{21}\cos\alpha - Q_2S\sin\alpha = 0 \quad (1.10)$$

Với $q = -(N^\circ_{11}\chi_{11} + 2N^\circ_{12}\chi_{12} + N^\circ_{22}\chi_{22}) =$

$$= N^\circ_{11}\frac{\partial^2 W}{\partial S^2} + 2N^\circ_{12}\left(\frac{1}{S\cos\alpha}\frac{\partial^2 W}{\partial S\partial\theta} - \frac{1}{S^2\cos\alpha}\frac{\partial W}{\partial\theta}\right) + N^\circ_{22}\left(\frac{1}{S^2\cos^2\alpha}\frac{\partial^2 W}{\partial\theta^2} + \frac{1}{S}\frac{\partial W}{\partial S}\right) \quad (1.11)$$

Liên hệ vật lý giữa ứng suất và biến dạng đối với quá trình biến dạng đàn-dẻo có độ cong trung bình [4] :

$$d\sigma_{ij} = \frac{2}{3}G_s(de_{ij} + de_{kk}\delta_{ij}) + (\Phi' - G_s)\frac{\sigma_{mn}d\varepsilon_{mn}}{\sigma_u^2}\sigma_{ij} \quad (1.12)$$

Với $G_s = \sigma_u k(s)$; i, j, m, n = 1 2

Như vậy hệ thức (1.1), (1.5) đến (1.10) cùng với các điều kiện biên cho ta hệ kín xác định trạng thái xuất phát của bài toán ổn định rẽ nhánh đồng chủ động. Sau này ta xem như bài toán này đã giải được tức là xác định được các thành phần σ°_{ij}, ε°_{ij}, u°_i và miền đàn hồi, miền dẻo. Trên cơ sở trạng thái xuất phát này ta sẽ đi xét bài toán theo tiêu chuẩn rẽ nhánh đồng chủ động [1].

§2. PHƯƠNG TRÌNH RẼ NHÁNH ĐỒNG CHỦ ĐỘNG ĐỐI VỚI VỎ NÓN

Để thiết lập các phương trình này, giả thiết không tính đến sự cất tải, khi đó để viết các phương trình mô tả bài toán, ta ký hiệu hiệu của các gia số ứng với tiếp tục chính và tiếp tục phụ :

$$\Delta N_{ij} = dN_{ij} - dN^{\circ}_{ij} ; \quad \Delta M_{ij} = dM_{ij} - dM^{\circ}_{ij}$$

$$\Delta W = dW - dW_{o} ; \; i, j = 1, 2 \tag{2.1}$$

Lấy biến phân (1.6) đến (1.10), ta nhận được các phương trình cân bằng dưới dạng hiệu gia số (với $W_o = 0$) :

$$\frac{\partial \Delta N_{11}}{\partial S} S\cos\alpha + \Delta N_{11}\cos + \frac{\partial \Delta N_{21}}{\partial \theta} - \Delta N_{22}\cos\alpha = 0 \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial \Delta N_{22}}{\partial \theta} + \frac{\partial \Delta N_{12}}{\partial S} S\cos\alpha + \Delta N_{12}\cos\alpha + \Delta N_{21}\cos\alpha - \Delta Q_{2}\sin\alpha = 0 \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial \Delta Q_{1}}{\partial S} S\cos\alpha + \Delta Q_{1}\cos\alpha + \frac{\partial \Delta Q_{2}}{\partial \theta} + \Delta N_{22}\sin\alpha + N^{\circ}_{11} S\cos\alpha \frac{\partial^{2} \Delta W}{\partial S^{2}} +$$

$$+ 2N^{\circ}_{12}\left(\frac{\partial^{2}\Delta W}{\partial S \partial \theta} - \frac{1}{S}\frac{\partial \Delta W}{\partial \theta}\right) + N^{\circ}_{22}\left(\frac{1}{S\cos\alpha}\frac{\partial^{2}\Delta W}{\partial \theta^{2}} + \cos\alpha \frac{\partial \Delta W}{\partial S}\right) = 0 \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial \Delta M_{11}}{\partial S} S\cos\alpha + \Delta M_{11}\cos\alpha + \frac{\partial \Delta M_{21}}{\partial \theta} - \Delta M_{22}\cos\alpha - \Delta Q_{1} S\cos\alpha = 0 \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial \Delta M_{12}}{\partial S} S\cos\alpha + \frac{\partial \Delta M_{22}}{\partial \theta} + \Delta M_{12}\cos\alpha + \Delta M_{21}\cos\alpha - \Delta Q_{2} S\sin\alpha = 0 \tag{2.6}$$

Các liên hệ (1.1), (1,5), (1.12) dưới dạng gia số :

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \Delta\varepsilon^{*}_{ij} + Z \,.\, \Delta\chi_{ij} \tag{2.7}$$

$$\Delta\sigma_{ij} = (\Phi'_{o} - G^{\circ}_{s}) \frac{\sigma^{\circ}_{mn}\Delta\varepsilon_{mn}}{\sigma^{\circ 2}_{u}} \sigma^{\circ}_{ij} + \frac{2}{3} G^{\circ}_{s}(\Delta\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}\Delta\varepsilon_{kk}) \tag{2.8}$$

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2}\left[\frac{1}{G^{\circ}_{s}}(\Delta\sigma_{ij} - \Delta\sigma\delta_{ij}) + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{\Phi'_{o}} - \frac{1}{G^{\circ}_{s}}\right)\frac{S^{\circ}_{mn}\Delta S_{mn}}{\sigma^{\circ 2}_{u}}(\sigma^{\circ}_{ij} - \sigma^{\circ}\delta_{ij})\right] \tag{2.9}$$

$$i, j = 1, 2 ; \quad m, n = 1, 2, 3.$$

$$\Delta N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \Delta\sigma_{ij} dZ ; \quad \Delta M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} Z \,.\, \Delta\sigma_{ij} dZ \tag{2.10}$$

Hệ (2.2) đến (2.10) cùng với các điều kiện biên cho ta xét bài toán ổn định rẽ nhánh đồng chủ động của vỏ.

Nếu trạng thái xuất phát không phụ thuộc vào z thì

$$\Delta N_{ij} = h\left[(\Phi'_{o} - G^{\circ}_{s}) \frac{\sigma^{\circ}_{mn}\Delta\varepsilon^{*}_{mn}}{\sigma^{\circ 2}_{u}} \sigma^{\circ}_{ij} + \frac{2}{3} G^{\circ}_{s}(\Delta\varepsilon^{*}_{ij} + \delta_{ij}\Delta\varepsilon^{*}_{kk})\right] \tag{2.11}$$

$$\Delta M_{ij} = \frac{h^{3}}{12}\left[(\Phi'_{o} - G^{\circ}_{s}) \frac{\sigma^{\circ}_{mn}\Delta\chi_{mn}}{\sigma^{\circ 2}_{u}} \sigma^{\circ}_{ij} + \frac{2}{3} G^{\circ}_{s}(\Delta\chi_{ij} + \delta_{ij}\Delta\chi_{kk})\right] \tag{2.12}$$

Sau đây đưa ra một cách tường minh hệ trên cho trường hợp trạng thái xuất phát không phụ thuộc vào S và θ (tức là trạng thái xuất phát là thuần nhất) và giả thiết trong phương trình (2.3) không có mặt của ΔQ_2, khi đó nếu đặt

$$\Delta N_{11} = \frac{1}{S^2\cos^2\alpha}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{S}\frac{\partial\varphi}{\partial S}; \quad \Delta N_{22} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial S^2};$$

$$\Delta N_{12} = \Delta N_{21} = -\frac{1}{S\cos\alpha}\frac{\partial^2\varphi}{\partial S\partial\theta} + \frac{1}{S^2\cos\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}. \tag{2.13}$$

thì các phương trình (2.2), (2.3) đồng nhất thỏa mãn, còn ba phương trình (2.4), (2.5), (2.6) sau khi khử ΔQ_1 và ΔQ_2 đi, có dạng

$$S\cos\alpha\frac{\partial^2\Delta M_{11}}{\partial S^2} + 2\cos\alpha\frac{\partial\Delta M_{11}}{\partial S} + \frac{\partial^2\Delta M_{21}}{\partial S\partial\theta} + \frac{\partial^2\Delta M_{12}}{\partial S\partial\theta} - \cos\alpha\frac{\partial\Delta M_{22}}{\partial S} + \frac{1}{S}\frac{\partial\Delta M_{12}}{\partial\theta} +$$
$$+\frac{1}{S}\frac{\partial\Delta M_{21}}{\partial\theta} + \frac{1}{S\cos\alpha}\frac{\partial^2\Delta M_{22}}{\partial\theta^2} + \Delta N_{22}\sin\alpha + N^{\circ}_{11}S\cos\alpha\frac{\partial^2\Delta w}{\partial S^2} + 2N^{\circ}_{12}\left(\frac{\partial^2\Delta w}{\partial S\partial\theta} -\right.$$
$$\left.-\frac{1}{S}\frac{\partial\Delta w}{\partial\theta}\right) + N^{\circ}_{22}\left(\frac{1}{S\cos\alpha}\frac{\partial^2\Delta w}{\partial\theta^2} + \cos\alpha\frac{\partial\Delta w}{\partial S}\right) = 0 \tag{2.14}$$

Hàm φ trong (2.13) sẽ được xác định từ phương trình tương thích biến dạng

$$-\frac{\varkappa_{11}}{S}\operatorname{tg}\alpha - \frac{2}{S\cos\alpha}\frac{\partial^2\Delta\varepsilon_{12}}{\partial S\partial\theta} - \frac{2}{S^2\cos\alpha}\frac{\partial\Delta\varepsilon_{12}}{\partial\theta} + \frac{\partial^2\Delta\varepsilon_{22}}{\partial S^2} + \frac{1}{S^2\cos^2\alpha}\frac{\partial^2\Delta\varepsilon_{11}}{\partial\theta^2} +$$
$$+\frac{2}{S}\frac{\partial\Delta\varepsilon_{22}}{\partial S} - \frac{1}{S}\frac{\partial\Delta\varepsilon_{11}}{\partial S} = 0. \tag{2.15}$$

Thay biểu thức (2.9), (2.10), (2.13) vào đây, đồng thời ký hiệu

$$a_{11} = \frac{1}{G^{\circ}_S h} + \frac{1}{4h}\left(\frac{1}{\Phi'_{\circ}} - \frac{1}{G^{\circ}_S}\right)\left(\frac{2\sigma^{\circ}_{11} - \sigma^{\circ}_{22}}{\sigma^{\circ}_u}\right)^2,$$

$$a_{12} = a_{21} = -\frac{1}{2G^{\circ}_S h} + \frac{1}{4h}\left(\frac{1}{\Phi'_{\circ}} - \frac{1}{G^{\circ}_S}\right)\cdot\frac{(2\sigma^{\circ}_{11} - \sigma^{\circ}_{22})(2\sigma^{\circ}_{22} - \sigma^{\circ}_{11})}{\sigma^{\circ 2}_u},$$

$$a_{13} = 2a_{31} = \frac{3}{2h}\left(\frac{1}{\Phi'_{\circ}} - \frac{1}{G^{\circ}_S}\right)\frac{\sigma^{\circ}_{12}(2\sigma^{\circ}_{11} - \sigma^{\circ}_{22})}{\sigma^{\circ 2}_u},$$

$$a_{22} = \frac{1}{G^{\circ}_S h} + \frac{1}{4h}\left(\frac{1}{\Phi'_{\circ}} - \frac{1}{G^{\circ}_S}\right)\left(\frac{2\sigma^{\circ}_{22} - \sigma^{\circ}_{11}}{\sigma^{\circ}_u}\right)^2,$$

$$a_{23} = 2a_{32} = \frac{3}{2h}\left(\frac{1}{\Phi'_{\circ}} - \frac{1}{G^{\circ}_S}\right)\frac{\sigma^{\circ}_{12}(2\sigma^{\circ}_{22} - \sigma^{\circ}_{11})}{\sigma^{\circ 2}_u},$$

$$a_{33} = \frac{3}{2G^{\circ}_S h} + \frac{9}{2h}\left(\frac{1}{\Phi'_{\circ}} - \frac{1}{G^{\circ}_S}\right)\left(\frac{\sigma^{\circ}_{12}}{\sigma^{\circ}_u}\right)^2,$$

Ta nhận được phương trình xác định φ như sau

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{S}\frac{\partial^2\Delta W}{\partial S^2} + a_{11}\left(\frac{1}{S^4\cos^4\alpha}\frac{\partial^4\varphi}{\partial\theta^4} - \frac{1}{S^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial S^2} + \frac{2}{S^4\cos^2\alpha}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{S^3}\frac{\partial\varphi}{\partial S}\right) +$$
$$+ a_{12}\left(\frac{2}{S^2\cos^2\alpha}\frac{\partial^4\varphi}{\partial S^2\partial\theta^2} - \frac{2}{S^3\cos^2\alpha}\frac{\partial^3\varphi}{\partial S\partial\theta^2} + \frac{2}{S^4\cos^2\alpha}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}\right) + a_{22}\left(\frac{\partial^4\varphi}{\partial S^4} +\right.$$

$$+\frac{2}{S}\frac{\partial^3\varphi}{\partial S^3}\Bigg) + a_{13}\Bigg(-\frac{2}{S^3\cos^3\alpha}\frac{\partial^4\varphi}{\partial S\partial\theta^3} + \frac{2}{S^4\cos^3\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta^3} - \frac{2}{S^3\cos\alpha}\frac{\partial^2\varphi}{\partial S\partial\theta} +$$

$$+\frac{2}{S^4\cos\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\Bigg) + a_{23}\Bigg(-\frac{2}{S\cos\alpha}\frac{\partial^4\varphi}{\partial S^3\partial\theta} - \frac{2}{S^3\cos\alpha}\frac{\partial^2\varphi}{\partial S\partial\theta} + \frac{2}{S^4\cos\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\Bigg) +$$

$$+ a_{33}\Bigg(\frac{2}{S^2\cos^2\alpha}\frac{\partial^4\varphi}{\partial S^2\partial\theta^2} - \frac{2}{S^3\cos^2\alpha}\frac{\partial^3\varphi}{\partial S\partial\theta^2} + \frac{2}{S^4\cos^2\alpha}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}\Bigg) = 0 \qquad (2.17)$$

Bây giờ ta biểu diễn phương trình (2.14) qua các hàm w và φ. Thay (2.12) vào (2.14) và ký hiệu

$$D_{11} = \frac{h^3}{12}\left[\frac{4}{3}G_S^\circ + (\Phi'_o - G_S^\circ)\left(\frac{\sigma_{11}^\circ}{\sigma_u^\circ}\right)^2\right],$$

$$D_{12} = D_{21} = \frac{h^3}{12}\left[\frac{2}{3}G_S^\circ + (\Phi'_o - G_S^\circ)\frac{\sigma_{11}^\circ\sigma_{22}^\circ}{\sigma_u^{\circ 2}}\right],$$

$$D_{13} = 2D_{31} = \frac{h^3}{6}(\Phi'_o - G_S^\circ)\frac{\sigma_{11}^\circ\sigma_{12}^\circ}{\sigma_u^{\circ 2}},$$

$$D_{22} = \frac{h^3}{12}\left[\frac{4}{3}G_S^\circ + (\Phi'_o - G_S^\circ)\left(\frac{\sigma_{22}^\circ}{\sigma_u^\circ}\right)^2\right],$$

$$D_{23} = 2D_{32} = \frac{h^3}{6}(\Phi'_o - G_S^\circ)\frac{\sigma_{22}^\circ\sigma_{12}^\circ}{\sigma_u^{\circ 2}},$$

$$D_{33} = \frac{h^3}{6}\left[\frac{1}{3}G_S^\circ + (\Phi'_o - G_S^\circ)\left(\frac{\sigma_{12}^\circ}{\sigma_u^\circ}\right)^2\right].$$

Cuối cùng ta nhận được

$$D_{11}\Bigg(-S\cos\alpha\frac{\partial^4\Delta W}{\partial S^4} - 2\cos\alpha\frac{\partial^3\Delta W}{\partial S^3}\Bigg) + D_{12}\Bigg(-\frac{2}{S\cos\alpha}\frac{\partial^4\Delta W}{\partial S^2\partial\theta^2} + \frac{2}{S^2\cos\alpha}\frac{\partial^3\Delta W}{\partial S\partial\theta^2} -$$

$$-\frac{2}{S^3\cos\alpha}\frac{\partial^2\Delta W}{\partial\theta^2}\Bigg) + D_{22}\Bigg(-\frac{1}{S^3\cos^3\alpha}\frac{\partial^4\Delta W}{\partial\theta^4} - \frac{2}{S^3\cos\alpha}\frac{\partial^2\Delta W}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\alpha}{S}\frac{\partial^2\Delta W}{\partial S^2} -$$

$$-\frac{\cos\alpha}{S^2}\frac{\partial\Delta W}{\partial S}\Bigg) + D_{13}\Bigg(-2\frac{\partial^4\Delta W}{\partial S^3\partial\theta} - \frac{2}{S^2}\frac{\partial^2\Delta W}{\partial S\partial\theta} + \frac{2}{S^3}\frac{\partial\Delta W}{\partial\theta}\Bigg) +$$

$$+ D_{23}\Bigg(-\frac{2}{S^2\cos^2\alpha}\frac{\partial^4\Delta W}{\partial S\partial\theta^3} + \frac{2}{S^3\cos^2\alpha}\frac{\partial^3\Delta W}{\partial\theta^3} - \frac{2}{S^2}\frac{\partial^2\Delta W}{\partial S\partial\theta} + \frac{2}{S^3}\frac{\partial\Delta W}{\partial\theta}\Bigg) +$$

$$+ D_{33}\Bigg(-\frac{2}{S\cos\alpha}\frac{\partial^4\Delta W}{\partial S^2\partial\theta^2} + \frac{2}{S^2\cos\alpha}\frac{\partial^3\Delta W}{\partial S\partial\theta^2} - \frac{2}{S^3\cos\alpha}\frac{\partial^2\Delta W}{\partial\theta^2}\Bigg) +$$

$$+ N_{11}^\circ S\cos\alpha\frac{\partial^2\Delta W}{\partial S^2} + 2N_{12}^\circ\Bigg(\frac{\partial^2\Delta W}{\partial S\partial\theta} - \frac{1}{S}\frac{\partial\Delta W}{\partial\theta}\Bigg) + N_{22}^\circ\Bigg(\frac{1}{S\cos\alpha}\frac{\partial^2\Delta W}{\partial\theta^2} +$$

$$+\cos\alpha\frac{\partial\Delta W}{\partial S}\Bigg) + \sin\alpha\frac{\partial^2\varphi}{\partial S^2} = 0 \qquad (2.19)$$

Nhận xét rằng nếu vật thể là đàn hồi tức là $\Phi'_o = E$, $G_S^\circ = E$, khi đó các phương trình (2.17) và (2.19) trùng với các phương trình ổn định đàn hồi của vỏ nón [3].

Như vậy là bài toán ổn định rẽ nhánh đồng chủ động chính là bài toán tìm nghiệm khác không của (2.17) và (2.19). Phương pháp chung để giải là ta sẽ chọn nghiệm sao cho ΔW và φ thỏa mãn điều kiện biên động học, sau đó thay vào các phương trình trên và từ điều kiện không tầm thường của nghiệm suy ra phương trình xác định lực. Giá trị nhỏ nhất của nó chính là lực tới hạn cần tìm.

§ 3. VÍ DỤ :

Sau đây để minh họa, xét bài toán vỏ nón (tựa bản lề tại đáy), chịu nén dọc trục bởi áp lực P_1, xét trường hợp sự vòng của vỏ là đối xứng, khi đó

$$W = W(S)\ ;\ \varphi = \varphi(S)\ ;\ N^{\circ}_{12} = N^{\circ}_{22} = 0\ ;\ N^{\circ}_{11} = -\frac{P_1}{\pi l_1 \sin 2\alpha} = -P$$

các phương trình (2.17), (2.19) dẫn về

$$a_{22}\left(\frac{d^4\varphi}{ds^4} + \frac{2}{S}\frac{d^3\varphi}{ds^3}\right) + a_{11}\left(-\frac{1}{S^2}\frac{d^2\varphi}{ds^2} + \frac{1}{S^3}\frac{d\varphi}{ds}\right) + \frac{tg\alpha}{S}\frac{d^2\Delta W}{ds^3} = 0,$$

$$-D_{11}\left(\frac{d^4\Delta W}{ds^4} + \frac{2}{S}\frac{d^3\Delta W}{ds^3}\right) + D_{22}\left(\frac{1}{S^2}\frac{d^2\Delta W}{ds^2} - \frac{1}{S^3}\frac{d\Delta W}{ds}\right) -$$

$$-P\frac{d^2\Delta W}{ds^2} + \frac{tg\alpha}{S}\frac{d^2\varphi}{ds^2} = 0.$$

Sau một vài phép biến đổi, ta có thể biểu diễn các phương trình trên dưới dạng

$$a_{22}S^{-2+\sqrt{\Delta_1}}\frac{d}{ds}\left\{S^{2-\sqrt{\Delta_1}}\frac{d}{ds}\left[S^{-\sqrt{\Delta_1}}\frac{d}{ds}\left(S^{\sqrt{\Delta_1}}\frac{d\varphi}{ds}\right)\right]\right\} + \frac{tg\alpha}{S}\frac{d^2\Delta W}{ds^2} = 0,$$

$$-D_{11}S^{-2+\sqrt{\Delta_2}}\frac{d}{ds}\left\{S^{2-\sqrt{\Delta_2}}\frac{d}{ds}\left[S^{-\sqrt{\Delta_2}}\frac{d}{ds}\left(S^{\sqrt{\Delta_2}}\frac{d\Delta W}{ds}\right)\right]\right\} -$$

$$-P\frac{d^2\Delta W}{ds^2} + \frac{tg\alpha}{S}\frac{d^2\varphi}{ds^2} = 0. \qquad (2.20)$$

trong đó $\Delta_1 = \dfrac{a_{11}}{a_{22}}$; $\Delta_2 = \dfrac{D_{22}}{D_{11}}$

Để tìm nghiệm hệ (2.20), ta sử dụng giả thiết [2] xem rằng khi mất ổn định, vỏ sẽ tạo nên một số lớn các sóng mà độ dài của mỗi sóng sẽ không quá lớn vì vậy nên độ lớn S giới hạn của mỗi sóng có thể xem là không đổi. Nếu xét sóng kề với đáy của nón, khi đó ta đặt $S = l_1$, ở đây l_1 là khoảng cách từ đỉnh đến đáy của nón lấy theo đường sinh. Trong trường hợp này (2.20) dẫn về

$$a_{22}\frac{d^4\varphi}{ds^4} + \frac{tg\alpha}{l_1}\frac{d^2\Delta W}{ds^2} = 0,$$

$$-D_{11}\frac{d^4\Delta W}{ds^4} - P\frac{d^2\Delta W}{ds^2} + \frac{tg\alpha}{l_1}\frac{d^2\varphi}{ds^2} = 0 \qquad (2.21)$$

Tìm nghiệm (2.21) dưới dạng

$$\Delta W = A_1 \sin\frac{\pi}{\lambda}(s - l_1), \quad \varphi = A_2 \sin\frac{\pi}{\lambda}(s - l_1). \qquad (2.22)$$

ở đây λ là độ dài sóng. Thay (2.22) vào (2.21) nhận được hệ thức xác định A_1, A_2, và từ tiêu chuẩn ổn định rẽ nhánh (tức là các A_i, $i = 1, 2$ không đồng thời bằng 0) suy ra

$$P = D_{11}\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2\frac{tg^2\alpha}{l_1^2}\frac{1}{a_{22}}$$

Tìm cực trị P theo $\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2$, nhận được

$$P_{ht} = 2\sqrt{\frac{D_{11}}{a_{22}}\frac{tg\alpha}{l_1}} = \frac{2}{3}\frac{tg\alpha}{l_1}h^2\sqrt{G_s^o\Phi_o'}\,, \tag{2.23}$$

Từ công thức này dễ dàng tìm được lực tới hạn P_1^*.

Nhận xét : Trường hợp vỏ nón đàn hồi tức là $\Phi_o' = E$ và $G_s^* = E$ từ (2.23) nhận được nghiệm quen biết đối với vật liệu không nén được $\left(\mu = \frac{1}{2}\right)$ [2] ;

$$P_{th}^{dh} = \frac{2}{3}Eh^2\frac{tg\alpha}{l_1}$$

KẾT LUẬN

Như vậy chúng ta đã xây dựng được các hệ thức cơ bản cho bài toán ổn định rẽ nhánh động chủ động của vỏ nón theo lý thuyết quá trình biến dạng đàn — dẻo với độ cong trung bình. Đồng thời cũng chỉ ra rằng việc tìm điểm rẽ nhánh quá trình tương đương với việc tìm nghiệm khác không của hệ (2.17) và (2.19). Đối với trường hợp vỏ nón chịu lực nén dọc trục, nhận được giá trị lực tới hạn, kết quả này trong trường hợp đàn hồi trùng hoàn toàn với giá trị lực tới hạn đàn hồi [2].

Địa chỉ
Trường đại học Tổng hợp HN

Nhận ngày 27-11-1987

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. КЛЮШНИКОВ В. Д. Устойчивость упруго-пластических систем. М., 1980.
2. ШТАЕРМАН И. Я. Устойчивость оболочек. Труды Киевского авиа, ин та, №1, 1936.
3. ВОЛЬМИР А. С. Устойчивость упругих систем. М., 1963.
4. ДАО ЗУЙ БИК Модификация соотношений упруго пластических процессов средней кривизны. Вестник МГУ, №5, 1981.
5. ĐÀO HUY BÍCH. Bài toán ổn định ngoài giới hạn đàn hồi của vỏ mỏng theo lý thuyết quá trình biến dạng đàn dẻo. Tạp chí Cơ học, số 2, 1986.
6. ĐÀO HUY BÍCH, ĐÀO VĂN DŨNG. Về sự ổn định của vỏ mỏng trong lý thuyết quá trình biến dạng đàn dẻo. Tạp chí Cơ học, số 3. 1986.
7. ĐÀO VĂN DŨNG. Về sự ổn định của bản mỏng trong lý thuyết quá trình biến dạng đàn dẻo. Tạp chí Cơ học số 2, 1987.

SUMMARY

ON THE STABILITY OF CONICAL SHELLS IN THE THEORY OF ELASTO-PLASTIC DEFORMATION PROCESSES

In this paper, the system of fundamental equations which describes the problem of stability of conical shells in the theory of elasto-plastic deformation processes has been presented. We have obtained this system by using the criterion of coactive bifurcation. As for its applications we have considered a conical shell subjected to the axial loading and found the value of critical pressure.