Tạp chí cơ học tập XI, 1989 Số 2 (trang 1 – 9)

BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG DỪNG CỦA CHẤT LỎNG VI CỰC

TẠ NGỌC CẦU

Trong bài này chúng tôi chứng minh rằng hệ phương trình mô tả chuyển động dừng của chất lỏng vi cực luôn tồn tại nghiệm suy rộng, và chỉ ra điều kiện đủ để nghiệm đó là duy nhất.

§1. ĐẶT BÀI TOÁN

Chuyển động dừng của chất lỏng vi cực trong trường nhiệt được mô tả bởi hệ phương trình sau [1] :

$$(\mu + k)\Delta\overline{v} - (\overline{v}\nabla)\overline{v} - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}P - g\beta T\overline{\gamma} + k\,\mathrm{rot}\,\overline{W} + f_1(x) = 0 \qquad (1\text{-}1)$$

$$\alpha\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\overline{W} - \sigma\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\overline{W} - J_o(\overline{v}\nabla)\overline{W} + k\,\mathrm{rot}\overline{v} - 2k\overline{W} = 0 \qquad (1\text{-}2)$$

$$\chi\Delta T - \overline{v}\,\nabla T + f_2(x) = 0 \qquad (1\text{-}3)$$

$$\mathrm{div}\overline{v} = 0 \qquad (1\text{-}4)$$

Giả sử miền chứa chất lỏng Ω là đóng, hữu hạn với biên cứng S hai lần khả vi liên tục. Ta xét bài toán với các điều kiện biên

$$\overline{v}\,|_s = 0,\ \overline{W}\,|_s = 0,\ T\,|_s = T_c(x). \qquad (1\text{-}5)$$

Ở đây $\overline{v}$ – vận tốc chất lỏng, $\overline{W}$ – véc tơ xoáy vi mô, T – nhiệt độ, ρ – mật độ chất lỏng, J_o – mô men quán tính vi mô, χ – hệ số truyền nhiệt, μ – hệ số nhớt α, σ – hệ số nhớt vi mô, β – hệ số nở khối trong quá trình đẳng áp, k – hằng số dương.

Ta sẽ chứng minh định lý tồn tại nghiệm suy rộng của hệ phương trình (1-1) ÷ (1-4) với điều kiện biên (1-5) và chỉ ra điều kiện để nghiệm đó là duy nhất.

§2. CÁC KHÔNG GIAN HÀM VÀ PHƯƠNG TRÌNH TOÁN TỬ

Ta xây dựng một số không gian cần thiết cho việc nghiên cứu hệ (1-1) ÷ (1-5).

Gọi $\mathcal{H}_1(\Omega)$ là đóng của tập hợp các véc tơ hàm xôlênôit trơn triệt tiêu trên biên S theo chuẩn sinh ra từ tích vô hướng :

$$(\overline{v}_1, \overline{v}_2)_{\mathcal{H}_1} = \int_\Omega \mathrm{rot}\overline{v}_1 \cdot \mathrm{rot}\overline{v}_2\, d\Omega \qquad (2\text{-}1)$$

$\mathscr{H}_2(\Omega)$ là dóng của các hàm trơn, triệt tiêu trên biên S theo chuẩn sinh ra từ . hướng:

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{\mathscr{H}_2} = \int_\Omega \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2 d\Omega \quad (2\text{-}2)$$

Theo [2] ta xây dựng không gian $\mathscr{H}_3(\Omega)$ là dóng của các véc tơ hàm trơn êu trên S với chuẩn nhận được từ tích vô hướng.

$$(\overline{W}_1, \overline{W}_2)_{\mathscr{H}_3} = \int_\Omega \operatorname{div}\overline{W}_1 \cdot \operatorname{div}\overline{W}_2 d\Omega + \int_\Omega \operatorname{rot}\overline{W}_1 \cdot \operatorname{rot}\overline{W}_2 d\Omega \quad (2\text{-}3)$$

Trong [2], [8] chứng minh rằng các không gian $\mathscr{H}_1(\Omega)$, $\mathscr{H}_2(\Omega)$, $\mathscr{H}_3(\Omega)$ chính không gian xôbôlep $\tilde{\mathring{W}}{}_2^1(\Omega)$, $\mathring{W}{}_2^1(\Omega)$, $\overline{\mathring{W}}{}_2^1(\Omega)$ và các chuẩn tương ứng là tương iệu

$$\tilde{W}_2^2(\Omega) = \mathring{W}_2^1(\Omega) \cap \mathring{W}_2^2(\Omega) \quad (2\text{-}4)$$

ọi $\tilde{\mathscr{K}}_2^2(\Omega)$ là dóng của tập hợp các véc tơ hàm trơn triệt tiêu trên S theo ủa $\overline{W}_2^2(\Omega)$ còn $\tilde{\mathscr{H}}_2^2(\Omega)$ là dóng của tập hợp các véc tơ hàm Xôlênôit, trơn triệt ı biên theo chuẩn của $\overline{W}_2^2(\Omega)$

a đưa vào tích Đề – các

$$\tilde{R}_2(\Omega) = \tilde{\mathscr{H}}_2^2(\Omega) \times \tilde{\mathscr{K}}_2^2(\Omega) \times \tilde{W}_2^2(\Omega) \times L_2^{(1)}(\Omega) \quad (2\text{-}5)$$

đây $L_2^{(1)}(\Omega)$ là không gian mà phần tử của nó là lớp các phần tử từ $W_2^1(\Omega)$ àm suy rộng bậc 1 như nhau [7].

ıc phần tử của $\tilde{R}_2(\Omega)$ có dạng $\eta = (\overline{v}, \overline{w}, u, p)$

ıuẩn trong $\tilde{R}_2(\Omega)$ được xác định như sau:

$$\|\eta\|^2_{\tilde{R}_2(\Omega)} = \|\overline{v}\|^2_{\tilde{\mathscr{H}}_2^2} + \|\overline{W}\|^2_{\tilde{\mathscr{K}}_2^2} + \|u\|^2_{\tilde{W}_2^2} + \|p\|^2_{L_2^{(1)}} \quad (2\text{-}6)$$

ối cùng ta định nghĩa hai không gian

$$\mathscr{L}_2(\Omega) = \overline{L}_2(\Omega) \times \overline{L}_2(\Omega) \times L_2(\Omega) \times L_2(\Omega) \quad (2\text{-}7)$$

$$\tilde{\mathscr{L}}_2(\Omega) = \overline{L}_2(\Omega) \times \overline{L}_2(\Omega) \times L_2(\Omega) \times \{0\} \quad (2\text{-}8)$$

$\overline{L}_2(\ )$ không gian các véc tơ hàm bình phương khả tích, $L_2(\Omega)$ không gian ình phương khả tích, $\{0\}$ phần tử không trong $L_2(\Omega)$.

sử $T_0(x) \in W_2^{1\frac{1}{2}}(S)$ khi đó theo định lý về vết [4] tồn tại thác triển $\frac{2}{2}(\Omega)$ của $T_0(x)$ vào Ω. Mặt khác theo giả thiết biên S hai lần khả vi liên ın tại dãy các hàm « cắt » $\zeta(x, \delta)$ hai lần khả vi liên tục bằng 1 tại các S, bằng 0 tại các điểm cách S một khoảng lớn hơn δ và $|\zeta(x, \delta)| < c$. ıng cho tất cả các $\delta \in (0, \delta_1]$ [5]. Áp dụng phép thế $T(x) = u(x) + \varphi(x)$ $(x) \cdot \zeta(x, \delta))$ vào hệ phương trình (1-1) ÷ (1-5) ta được:

$$-(\mu + k)\Delta\overline{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - (\overline{v}\nabla)\overline{v} - g\beta u\gamma + k\operatorname{rot}\overline{W} + F_1(x) \quad (2\text{-}9)$$

$$-\alpha \operatorname{grad}\operatorname{div}\overline{W} + \sigma \operatorname{rot}\operatorname{rot}\overline{W} = -J_0(\overline{v}\nabla)\overline{W} + k\operatorname{rot}\overline{v} - 2k\overline{W} \quad (2\text{-}10)$$

$$-\chi\Delta u = \overline{v}\nabla u - \overline{v}\nabla\varphi + F_2(x) \quad (2\text{-}11)$$

$$\operatorname{div} \overline{v} = 0 \tag{2-12}$$

$$\overline{v}\,|_s = 0,\ \overline{W}\,|_s = 0,\ u\,|_s = 0 \tag{2-13}$$

$$F_1(x) = f_1(x) - \varepsilon\beta\varphi\overline{\gamma} \tag{2-14}$$

$$F_2(x) = f_2(x)\ \chi\Delta\varphi(x) \tag{2-15}$$

Hệ phương trình (2-10) $\div$ (2-12) trong không gian $\widetilde{R}_2(\Omega)$ có thể viết như sau:

$$\mathcal{A}\overline{\eta} = \mathcal{B}\overline{\eta} + \overline{\xi} \tag{2-16}$$

với

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho}\nabla \\ 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} -B_{11} & kB_{12} & -\varepsilon\beta B_{13} & 0 \\ kB_{21} & -B_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_1\overline{v} = -(\mu + k)\Delta\overline{v},\ A_2\overline{W} = -\alpha\operatorname{graddiv}\overline{W} + \sigma\operatorname{rotrot}\overline{W},\ A_3u = -\chi\Delta u;$$

$$B_{11}\overline{v} = (\overline{v}\nabla)\overline{v},\ B_{12}\overline{W} = \operatorname{rot}\overline{W},\ B_{13}u = u\,\overline{\gamma},\ B_{21}\overline{v} = \operatorname{rot}\overline{v},$$

$$B_{22}\overline{W} = J_o(\overline{v}\nabla)\,\overline{W} + 2k\,\overline{W},\ B_{33}u = \overline{v}\nabla u + \overline{v}\nabla\varphi;$$

$$\xi = (F_1(x), o, F_2(x), o)$$

Ta gọi phần tử $\eta \in \widetilde{R}_2(\Omega)$ là nghiệm suy rộng của hệ (1.1) $\div$ (1.5) nếu nó thỏa mãn (2.16) với $F_1(x) \in \overline{L}_2(\Omega)$, $F_2(x) \in L_2(\Omega)$

§ 3. MỘT SỐ BỔ ĐỀ BỔ TRỢ

Bổ đề 1. Toán tử tuyến tính $\mathcal{A}$ tác dụng từ $\widetilde{R}_2(\Omega)$ vào $\widetilde{\mathcal{L}}_2(\Omega)$ giới nội và thỏa mãn bất đẳng thức

$$\|\mathcal{A}\eta\|_{\mathcal{L}_2(\Omega)} \geqslant C_1\,\|\eta\|_{\widetilde{R}_2(\Omega)} \tag{3.1}$$

Ở đây C_1 là hằng số dương, không phụ thuộc vào η.

Chứng minh. Dễ thấy rằng bổ đề này được suy ra trực tiếp từ bổ đề 1 trong [6] và bổ đề sau:

Bổ đề 2. Với mọi véc tơ hàm $\overline{W} \in \widetilde{\mathcal{K}}_2^2(\Omega)$ chuẩn $\|\overline{W}\|_{\overline{W}_2^2(\Omega)}$ và chuẩn $\|\alpha\operatorname{graddiv}\overline{W} - \sigma\operatorname{rotrot}\overline{W}\|_o$ là tương đương.

(Ký hiệu $\|\cdot\|_o$ là chuẩn trong $\overline{L}_2(\Omega)$ hoặc $L_2(\Omega)$).

Chứng minh: Ta chứng minh khẳng định trên cho các véc tơ hàm có giá compact sau đó chuyển qua giới hạn sẽ được kết quả cho mọi $\overline{W} \in \widetilde{\mathcal{K}}_2^2(\Omega)$

Ta có $\|\alpha\operatorname{graddiv}\overline{W} - \sigma\operatorname{rotrot}\overline{W}\|_o^2 =$

$$= \int_\Omega \left|\alpha\frac{\partial^2 W_1}{\partial x_1^2} + \sigma\frac{\partial^2 W_1}{\partial x_2^2} + \sigma\frac{\partial^2 W_1}{\partial x_3^2} + (\alpha - \sigma)\frac{\partial^2 W_2}{\partial x_1\partial x_2} + (\alpha - \sigma)\frac{\partial^2 W_3}{\partial x_1\partial x_3}\right|^2 d\Omega +$$

$$+\int_\Omega \left|\sigma \frac{\partial^2 W_2}{\partial x_1^2} + \alpha \frac{\partial^2 W_2}{\partial x_2^2} + \sigma \frac{\partial^2 W_2}{\partial x_3^2} + (\alpha - \sigma) \frac{\partial^2 W_1}{\partial x_1 \partial x_2} + (\alpha - \sigma) \frac{\partial^2 W_3}{\partial x_1 \partial x_3}\right|^2 d\Omega +$$

$$+\int_\Omega \left|\sigma \frac{\partial^2 W_3}{\partial x_1^2} + \sigma \frac{\partial^2 W_3}{\partial x_2^2} + \alpha \frac{\partial^2 W_3}{\partial x_3^2} + (\alpha - \sigma) \frac{\partial^2 W_1}{\partial x_1 \partial x_3} + (\alpha - \sigma) \frac{\partial^2 W_2}{\partial x_2 \partial x_3}\right|^2 d\Omega. \qquad (3.2)$$

Từ đẳng thức trên dễ thấy rằng tồn tại hằng số dương C_2 sao cho $\|\overline{W}\|_{\overline{W}_2^2(\Omega)} \geqslant$

$$\geqslant C_2 \|\alpha \text{garddiv}\, \overline{W} - \sigma \text{rotrot}\, \overline{W}\|_0 \qquad (3.3)$$

Theo các kết quả cổ điển của Agmôn-Douglish-Nirenberg [3] ta có thể chứng minh rằng nếu $\overline{W} = (W_1, W_2, W_3) \in \overline{W}_2^2(\Omega)$ có giá compact trong Ω thì

$$\int_\Omega \left\{\left|\frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 W_i}{\partial x_2^2}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 W_i}{\partial x_3^2}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 W_i}{\partial x_1 \partial x_2}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 W_i}{\partial x_1 \partial x_3}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 W_i}{\partial x_2 \partial x_3}\right|^2\right\} d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant C_3 \|\alpha \text{graddiv}\, \overline{W} - \sigma \text{rotrot}\, \overline{W}\|_0^2 \qquad (3.4)$$

Với $i = 1, 2, 3$; C_3 là hằng số dương.

Mặt khác theo bất đẳng thức Ladujenskaia [5] và bất đẳng thức Phridrikcta có:

$$\int_\Omega u^2(x) d\Omega \leqslant \text{const} \int_\Omega \text{grad}^2 u d\Omega,$$

$$\int_\Omega \text{grad}^2 u d\Omega \leqslant \text{const} \int_\Omega (\Delta u)^2 d\Omega, \quad \forall u \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_1^2(\Omega)$$

do đó
$$\int_\Omega (u^2 + \text{grad}^2 u) d\Omega \leqslant \text{const} \int_\Omega (\Delta u)^2 d\Omega \qquad (3.5)$$

Từ các bất đẳng thức (3.4) và (3.5) suy ra tồn tại hằng số dương C_4 sao cho với mọi $\overline{W}$ trơn, có giá compắc trong Ω bất đẳng thức sau luôn đúng

$$\|\overline{W}\|^2_{\overline{W}_2^2(\Omega)} \leqslant C_4 \|\alpha \text{graddiv}\, \overline{W} - \sigma \text{rotrot}\, \overline{W}\|_0^2 \qquad (3.6)$$

Chuyển qua giới hạn ta được bất đẳng thức (3.6) đúng với mọi $\overline{W} \in \overline{\mathcal{K}}_2^2(\Omega)$. Điều này cùng bất đẳng thức (3.3) chứng tỏ khẳng định của bổ đề.

Bổ đề 3. Nếu $\eta \in \tilde{R}(\Omega)$ là nghiệm suy rộng của hệ phương trình (1.1) ÷ 1.5) thì

$$\|\overline{v}\|_{\overline{W}_2^1(\Omega)} + \|\overline{W}\|_{\overline{W}_2^1(\Omega)} + \|u\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C_5 \qquad (3.7)$$

Trong đó C_5 là hằng số dương chỉ phụ thuộc vào μ, k, α, σ, χ, J_0, $F_1(x)$, $F_2(x)$ và miền Ω.

Chứng minh: Từ các phương trình (2.9), (2.10), (2.11) ta có:

$$(\mu + k)\|\overline{v}\|^2_{\mathcal{H}_1} \leqslant g\beta \|u\|_0 \|\overline{v}\|_0 + k\|\text{rot}\overline{v}\|_0 \|\overline{W}\|_0 + \|F_1\|_0 \|\overline{v}\|_0 \qquad (3.8)$$

$$\mathcal{X}\|\overline{W}\|^2_{\mathcal{H}_3} \leqslant k\|\text{rot}\overline{v}\|_0 \|\overline{W}\|_0 - 2k\|\overline{W}\|_0^2 \qquad (3.9)$$

$$\chi \| u \|^2_{\mathscr{H}_2} \leqslant \| \bar{v} \|_{L_4} \cdot \| u \|_{\mathscr{H}_2} \; \| \varphi \|_{L_4} + \| F_2 \|_o \cdot \| u \|_o \tag{3.10}$$
$$(\mathscr{X} = \min(\alpha, \sigma))$$

Từ bất đẳng thức (3.9), (3.10), bất đẳng thức Honder và định lý nhúng xôbôlev ta suy ra (Ta quy ước từ đây về sau các hệ số xuất hiện do áp dụng định lý nhúng đều ký hiệu bằng chữ C)

$$\left\| \overline{W} \right\|_o \leqslant \frac{1}{2} \left\| \operatorname{rot} \bar{v} \right\|_o, \tag{3.11}$$

$$\| u \|_{\mathscr{H}_2} \leqslant \chi^{-1} C \| \varphi \|_{L_4} \cdot \| \bar{v} \|_{\mathscr{H}_1} + \chi^{-1} C \| F_2 \|_o. \tag{3.12}$$

Từ (3.8), (3.11), (3.12) nhận được

$$\left(\mu + \frac{k}{2} - C^2 g \beta \chi^{-1} \| \varphi \|_{L_4}\right) \| \bar{v} \|_{\mathscr{H}_1} \leqslant (C^2 g \beta \chi^{-1} \| F_2 \|_o + C \| F_1 \|_o)$$

Theo cách xây dựng hàm số $\varphi(x)$ ta có thể giả thiết rằng $C^2 g \beta \chi^{-1} \| \varphi \|_{L_4} \leqslant \mu/2$ khi đó $\| \bar{v} \|_{\mathscr{H}_1} \leqslant C_v$ (3.13)

với
$$C_v = [2(C \| F_1 \|_o + C^2 g \beta \chi^{-1} \| F_2 \|_o)]/(\mu + k) \tag{3.14}$$

Từ (3.9) và định lý nhúng ta nhận được

$$\| \overline{W} \|_{\mathscr{H}_3} \leqslant kC\chi^{-1} \| \bar{v} \|_{\mathscr{H}_1} \quad \text{hay} \quad \| \overline{W} \|_{\mathscr{H}_3} \leqslant C_W \tag{3.15}$$

với
$$C_W = [2C^2 k(\| F_1 \|_o + C g \beta \chi^{-1} \| F_2 \|_o)] / \chi(\mu + k) \tag{3.16}$$

Từ bất đẳng thức (3.12) và (3.14) ta có

$$\| u \|_{\mathscr{H}_2} \leqslant C_u \tag{3.17}$$

với $C_u = \{[2C \chi^{-1} \| \varphi \|_{L_4} (\| F_1 \|_o + C g \beta \chi^{-1} \| F_2 \|_o)] / (\mu + k)\} + \chi^{-1} C \| F_2 \|_o$ (3.18)

Cuối cùng ta có

$$\| \bar{v} \|_{\overline{W}^1_2(\Omega)} + \| \overline{W} \|_{\overline{W}^1_2(\Omega)} + \| u \|_{W^1_2(\Omega)} \leqslant C_5 \tag{3.19}$$

với
$$C_5 = C_v + C_w + C_u =$$
$$\frac{2C}{\mu + k}(1 + kC\chi^{-1} + C\chi^{-1} \| \varphi \|_{L_4})(\| F_1 \|_o + C g \beta \chi^{-1} \| F_2 \|_o) + C\chi^{-1} \| F_2 \|_o.$$

Bổ đề 4. Toán tử $\mathscr{B}$ tác dụng từ $\tilde{R}_2(\Omega)$ vào $\tilde{\mathscr{L}}_2(\Omega)$ là hoàn toàn liên tục.

Chứng minh: Giả sử dãy $\{\eta_n\} \in \tilde{R}_2$ hội tụ yếu (h. t. y) đến phần tử $\eta_o \in \tilde{R}_2(\Omega)$. Ta cần chứng minh dãy $\{\mathscr{B}\eta_n\}$ hội tụ mạnh đến $\mathscr{B}\eta_o \in \tilde{\mathscr{L}}_2(\Omega)$

Vì
$$\eta_n = (\bar{v}_n, \overline{W}_n, u_n, p_n) \xrightarrow{\text{h. t. y}} \eta_o(\bar{v}_o, \overline{W}_o, u_o, p_o) \quad \text{trong } \tilde{R}_2(\Omega)$$

nên
$$\bar{v}_n \xrightarrow{\text{h. t. y}} \bar{v}_o \quad \text{trong } \tilde{\mathscr{H}}^2_2(\Omega), \quad \overline{W}_n \xrightarrow{\text{h. t. y}} \overline{W}_o \quad \text{trong } \tilde{\mathscr{K}}^2_2(\Omega)$$

và
$$u_n \xrightarrow{\text{h. t. y}} u_o \quad \text{trong } \tilde{W}^2_2(\Omega).$$

không khó khăn ta có thể tính được

$$\| \mathscr{B}\eta_n - \mathscr{B}\eta_o \|_{\mathscr{L}_2(\Omega)} = \| -(\bar{v}_n \nabla)\bar{v}_n + (\bar{v}_o \nabla)\bar{v}_o + k\operatorname{rot}(\overline{W}_n - \overline{W}_o) - g\beta(u_n - u_o)\bar{\gamma} \|_o +$$
$$+ \| k\operatorname{rot}(\bar{v}_n - \bar{v}_o) - [J_o(\bar{v}_n \nabla)\overline{W}_n - J_o(\bar{v}_o \nabla)\overline{W}_o + 2k(\overline{W}_n - \overline{W}_o)] \|_o +$$
$$+ \| (\bar{v}_n - \bar{v}_o)\nabla\varphi \|_o + \| \bar{v}_n \nabla u_n - \bar{v}_o \nabla u_o \|_o.$$

Qua một số biến đổi ta nhận được

$$\| \mathcal{B}\eta_n - \mathcal{B}\eta_o \|_{\mathcal{L}_2(\Omega)} \leqslant \| (\overline{v}_n\nabla)\overline{v}_n - (\overline{v}_o\nabla)\overline{v}_o \|_o + k \| \mathrm{rot}(\overline{W}_n - \overline{W}_o) \|_o +$$

$$+ g\beta \| u_n - u_o \|_o + k \| \mathrm{rot}(\overline{v}_n - \overline{v}_o) \|_o + J_o \| (\overline{v}_n\nabla)\overline{W}_n - (\overline{v}_o\nabla)\overline{W}_o \|_o + 2k \| \overline{W}_n - \overline{W}_o \|_o +$$

$$+ \| \overline{v}_o\nabla(u_n - u_o) \|_o + \| (\overline{v}_n - \overline{v}_o)\nabla\varphi \|_o + \| (\overline{v}_n - \overline{v}_o)\nabla u_n \|_o \tag{3.20}$$

Ta sẽ lần lượt đánh giá từng số hạng của biểu thức trên. Sử dụng **bất đẳng thức Hônđer** và định lý nhúng ta có :

$$\| (\overline{v}_n\nabla)\overline{v}_n - (\overline{v}_o\nabla)\overline{v}_o \|_o \leqslant \| \overline{v}_n - \overline{v}_o \|_{L_4} \cdot \| \overline{v}_n \|_{W_4^1} + \| \overline{v}_o \|_{L_4} \cdot \| \overline{v}_n - \overline{v}_o \|_{W_4^1} \tag{3.21}$$

$$\| (\overline{v}_n\nabla)\overline{W}_n - (\overline{v}_o\nabla)\overline{W}_o \|_o \leqslant \| \overline{v}_n - \overline{v}_o \|_{L_4} \cdot \| \overline{W}_n \|_{W_4^1} + \| \overline{v}_o \|_{L_4} \cdot \| \overline{W}_n - \overline{W}_o \|_{W_4^1} \tag{3.22}$$

$$\| \overline{v}_o \Delta(u_n - u_o) \|_o \leqslant \| \overline{v}_o \|_{L_4} \cdot \| u_n - u_o \|_{W_4^1} \tag{3.23}$$

$$\| (\overline{v}_n - \overline{v}_o)\nabla u_n \|_o \leqslant \| \overline{v}_n - \overline{v}_o \|_{L_4} \cdot \| u_n \|_{W_4^1} \tag{3.24}$$

$$\| (\overline{v}_n - \overline{v}_o)\nabla\varphi \|_o \leqslant \| \overline{v}_n - \overline{v}_o \|_{L_4} \cdot \| \varphi \|_{W_4^1} \tag{3.25}$$

Số hạng $\| \mathrm{rot}(\overline{v}_n - \overline{v}_o) \|_o$ ta đánh giá như sau :

$$\| \mathrm{rot}(\overline{v}_n - \overline{v}_o) \|_o^2 = \int_\Omega \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,(\overline{v}_n - \overline{v}_o)(\overline{v}_n - \overline{v}_o) d\Omega$$

$$\leqslant \int_\Omega | \Delta(\overline{v}_n - \overline{v}_o) | \cdot | \overline{v}_n - \overline{v}_o | \, d\Omega \leqslant \| \Delta(\overline{v}_n - \overline{v}_o) \|_o \cdot \| \overline{v}_n - \overline{v}_o \|_o .$$

Sử dụng bổ đề 2 ta được

$$\| \Delta(\overline{v}_n - \overline{v}_o) \|_o \| \overline{v}_n - \overline{v}_o \|_o \leqslant C \| \overline{v}_n - \overline{v}_o \|_{W_2^2(\Omega)} \cdot \| \overline{v}_n - \overline{v}_o \|_o .$$

Như vậy

$$\| \mathrm{rot}(\overline{v}_n - \overline{v}_o) \|_o \leqslant C \| \overline{v}_n - \overline{v}_o \|_{W_2^2}^{1/2} \cdot \| \overline{v}_n - \overline{v}_o \|_o . \tag{3.26}$$

Cuối cùng còn lại số hạng $\| \mathrm{rot}(\overline{W}_n - \overline{W}_o) \|_o$. Dễ thấy rằng

$$\| \mathrm{rot}(\overline{W}_n - \overline{W}_o) \|_o^2 \leqslant k_1 \| \overline{W}_n - \overline{W}_o \|_{W_2^1(\Omega)}^2$$

mà

$$\| \overline{W}_n - \overline{W}_o \|_{W_2^1(\Omega)}^2 \leqslant k_2 \left(\int_\Omega [\mathrm{div}^2(\overline{W}_n - \overline{W}_o) + \mathrm{rot}^2(\overline{W}_n - \overline{W}_o)] \, d\Omega \right)$$

$$\leqslant k_3 (A_2(\overline{W}_n - \overline{W}_o), (\overline{W}_n - \overline{W}_o))_o \leqslant k_3 \| A_2(\overline{W}_n - \overline{W}_o) \|_o \cdot \| \overline{W}_n - \overline{W}_o \|_o$$

Kết hợp với bổ đề 2 ta được : $\| \overline{W}_n - \overline{W}_o \|_{W_2^1}^2 \leqslant k_4 \| \overline{W}_n - \overline{W}_o \|_{W_2^1} \cdot \| \overline{W}_n - \overline{W}_o \|_o .$

Như vậy : $\| \mathrm{rot}(\overline{W}_n - \overline{W}_o) \|_o \leqslant k_5 \| \overline{W}_n - \overline{W}_o \|_{W_2^1}^{1/2} \cdot \| \overline{W}_n - \overline{W}_o \|_o^{1/2}$ (3.27)

(Ở đây k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 là các hằng số dương nào đó)

Sử dụng tính hoàn toàn liên tục của toán tử nhúng không gian $W_2^1(\Omega)$, $W_2^2(\Omega)$ vào các không gian L_p ($1 < p < 6$) và các bất đẳng thức (3.20) ÷ (3.27) ta suy ra :

$$\| \mathcal{B}\eta_n - \mathcal{B}\eta_o \|_{\mathcal{L}_2} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \tag{3.28}$$

Điều này chứng tỏ toán tử $\mathcal{B}$ là hoàn toàn liên tục.

§4. ĐỊNH LÝ TỒN TẠI VÀ ĐIỀU KIỆN DUY NHẤT NGHIỆM

Theo bổ đề 1 toán tử $\mathcal{A} : \widetilde{R}_2(\Omega) \to \widetilde{\mathcal{L}}_2(\Omega)$ có toán tử ngược giới nội $\mathcal{A}^{-1}$, vì vậy ta có thể viết phương trình (2.13) ở dạng tương đương như sau :

$$\eta = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}\eta + \mathcal{A}^{-1}\xi \tag{4.1}$$

với toán tử $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B} : \widetilde{R}_2(\Omega) \to \widetilde{R}_2(\Omega)$ là hoàn toàn liên tục.

Định lý 1 ; Với mọi $f_1(x) \in \overline{L}_2(\Omega)$, $f_2(x) \in L_2(\Omega)$, $T_o(x) \in W_2^{1\frac{1}{2}}(S)$ tồn tại ít nhất một nghiệm suy rộng của bài toán (1.1) ÷ (1.5)

Chứng minh: Để chứng minh định lý này ta sử dụng nguyên lý Lere-Sauder [9]

Xét phương trình $\qquad \eta = \lambda[\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}\eta + \mathcal{A}^{-1}\xi]$, với $\lambda \in [0, 1]$ $\hfill$ (4.2)

Ta chứng minh rằng tất cả các nghiệm có thể có của phương trình (4.1) đều giới nội theo chuẩn của không gian $\widetilde{R}_2(\Omega)$

Ta đánh giá vế phải của phương trình (4.2)

$$\|\eta\|_{\widetilde{R}_2(\Omega)} \leqslant \|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}_2 \to \widetilde{R}_2}\big[\,\|(\overline{v}\nabla)\overline{v}\|_o + k\|\mathrm{rot}\,\overline{W}\|_o + g\beta\|u\|_o + k\|\mathrm{rot}\,\overline{v}\|_o + J_o\|(\overline{v}\nabla)\overline{W}\|_o + 2k\|\overline{W}\|_o + \|\overline{v}\nabla u\|_o + \|\overline{v}\nabla\varphi\|_o + \|\xi\|_o\big] \tag{4.3}$$

Sau một vài biến đổi ta có ; $\|\eta\|_{\widetilde{R}_2(\Omega)} \leqslant \|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}_2 \to \widetilde{R}_2}[\,\|\overline{v}\|_{L_4} \cdot \|\overline{v}\|_{W_4^1} +$

$$+ J_o\|\overline{v}\|_{L_4} \cdot \|\overline{W}\|_{W_4^1} + cg\beta\|u\|_{W_4^1} + 3kc\|\overline{W}\|_{W_4^1} + C\|\overline{v}\|_{L_4} \cdot \|\varphi\|_{W_4^1} + \|\xi\|_o] \tag{4.4}$$

Áp dụng bất đẳng thức đa nhân tính cho các không gian $W_4^1(\Omega)$, $W_2^1(\Omega)$, $L_2(\Omega)$ và sử dụng bất đẳng thức (3.19) ta có

$$\|\eta\|_{\widetilde{R}_2(\Omega)} \leqslant \|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}_2 \to \widetilde{R}_2} \cdot C\{\,\|\overline{v}\|^{\tau}_{W_2^2} \cdot \|\overline{v}\|_o^{1-\tau} + J_o\|\overline{W}\|^{\tau}_{W_2^2} \cdot \|\overline{W}\|_o^{1-\tau} + \|u\|^{\tau}_{W_2^2} \cdot \|u\|_o^{1-\tau} + \|\varphi\|_{W_4^1} + \|\xi\|_o\} \tag{4.5}$$

Ở đây τ là hằng số dương thỏa mãn $0 < \tau < 1$.

Một lần nữa sử dụng bất đẳng thức (3.19) ta được

$$\|\eta\|_{\widetilde{R}_2(\Omega)} \leqslant C(\|\eta\|^{\tau}_{\widetilde{R}_2} + \|\varphi\|_{W_4^1} + \|\xi\|_o) \tag{4.6}$$

Bất đẳng thức này chứng tỏ tính giới nội đều của lời giải phương trình (4.2)
Như vậy theo nguyên lý Lere-Sauder phương trình (4.1) có ít nhất 1 nghiệm. Định lý chứng minh xong

Bây giờ ta tìm điều kiện để lời giải phương trình (4.1) là duy nhất.
Giả sử $\eta_1(\overline{v}_1, \overline{w}_1, u_1, p_1)$ và $\eta_2(\overline{v}_2, \overline{w}_2, u_2, p_2)$ là các nghiệm của phương trình (4.1).

Ta đặt $\quad \eta(\widehat{v}, \widehat{w}, \widehat{u}, \widehat{p}) = \eta_1 - \eta_2 \hfill$ (4.7)

Vì η_1, η_2 là nghiệm của (4.1) nên ta dễ dàng nhận được

$$-(\mu + k)\Delta(\overline{v}_1 - \overline{v}_2) = -\frac{1}{\rho}\nabla(p_1 - p_2) - [(\overline{v}_1\nabla)\overline{v}_1 - (\overline{v}_2\nabla)\overline{v}_2] - g\beta(u_1 - u_2)\overline{\gamma} + k\,\mathrm{rot}(\overline{W}_1 - \overline{W}_2) \tag{4.8}$$

$$-\alpha\,\mathrm{grad\,div}(\overline{W}_1 - \overline{W}_2) + \sigma\,\mathrm{rot\,rot}(\overline{W}_1 - \overline{W}_2) = -J_o[(\overline{v}_1\nabla)\overline{W}_1 - (\overline{v}_2\nabla)\overline{W}_2] + k\,\mathrm{rot}(\overline{v}_1 - \overline{v}_2) - 2k(\overline{W}_1 - \overline{W}_2) \tag{4.9}$$

$$-\chi\Delta(u_1 - u_2) = -(\overline{v}_1\nabla u_1 - \overline{v}_2\nabla u_2) - (\overline{v}_1 - \overline{v}_2)\nabla\varphi \tag{4.10}$$

Lần lượt nhân cả hai vế của (4.8), (4.9), (4.10) với $\hat{v}$, $\hat{W}$, $\hat{u}$ và lấy tích phân trên toàn miền Ω ta được

$$(\mu + k)\|\hat{v}\|^2_{\mathcal{H}_1} = -\int_\Omega (\hat{v}\nabla)\overline{v}_2 \cdot \hat{v}d\Omega - g\beta\int_\Omega \hat{u}\cdot\overline{\gamma}\cdot\hat{v}d\Omega + k\int_\Omega \mathrm{rot}\hat{v}\cdot\hat{W}d\Omega \tag{4.11}$$

$$\alpha\|\mathrm{div}\hat{W}\|^2_0 + \sigma\|\mathrm{rot}\hat{W}\|^2_0 = -J_o\int_\Omega (\hat{v}\nabla)\overline{W}_2\cdot\hat{W}d\Omega + k\int_\Omega \mathrm{rot}\hat{v}\cdot\hat{W}d\Omega - 2k\int_\Omega \hat{W}^2 d\Omega \tag{4.12}$$

$$\chi\|\hat{u}\|^2_{\mathcal{H}_2} = -\int_\Omega \hat{v}\nabla u_2\cdot\hat{u}d\Omega - \int_\Omega \hat{v}\nabla\varphi\cdot\hat{u}d\Omega \tag{4.13}$$

Qua một vài đánh giá đơn giản ta nhận được

$$(\mu + k)\|\hat{v}\|^2_{\mathcal{H}_1} \leqslant \|\overline{v}_2\|_{\mathcal{H}_1}\cdot\|\hat{v}\|^2_{\mathcal{H}_1} + g\beta\|\hat{u}\|_{\mathcal{H}_2}\cdot\|\hat{v}\|_{\mathcal{H}_1} + k\|\hat{W}\|_{\mathcal{H}_3}\cdot\|\hat{v}\|_{\mathcal{H}_1} \tag{4.14}$$

$$\chi\|\hat{W}\|^2_{\mathcal{H}_3} \leqslant J_o\|\hat{v}\|_{\mathcal{H}_1}\cdot\|\overline{W}_2\|_{\mathcal{H}_3}\cdot\|\hat{W}\|_{\mathcal{H}_3} + k\|\hat{v}\|_{\mathcal{H}_1}\cdot\|\hat{W}\|_0 - 2k\|\hat{W}\|^2_0 \tag{4.15}$$

$$\chi\|\hat{u}\|^2_{\mathcal{H}_2} \leqslant u_2\|_{\mathcal{H}_2}\cdot\|\hat{v}\|_{\mathcal{H}_1}\cdot\|\hat{u}\|_{\mathcal{H}_2} + \|\varphi\|_{L_4}\cdot\|\hat{v}\|_{\mathcal{H}_1}\cdot\|\hat{u}\|_{\mathcal{H}_2} \tag{4.16}$$

(Ở đây ta bỏ qua các hệ số xuất hiện do phép nhúng chúng)
Đặt $\mathcal{C} = \min(\mu + h, \mathcal{X}, \chi)$ sử dụng bất đẳng thức (3.19)
Từ (4.14) ÷ (4.16) ta nhận được:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(\|\hat{v}\|^2_{\mathcal{H}_1} + \|\hat{W}\|^2_{\mathcal{H}_3} + \|\hat{u}\|^2_{\mathcal{H}_2}) &\leqslant C_5\|\hat{v}\|^2_{\mathcal{H}_1} + \frac{g\beta}{2}\|\hat{u}\|^2_{\mathcal{H}_2} + \\ &+ \frac{g\beta}{2}\|\hat{v}\|^2_{\mathcal{H}_2} + \frac{k}{2}\|\hat{W}\|^2_{\mathcal{H}_3} + \frac{k}{2}\|\hat{v}\|^2_{\mathcal{H}_1} + \frac{1}{2}J_oC_5\|\hat{v}\|^2_{\mathcal{H}_1} + \\ &+ \frac{1}{2}J_oC_5\|\hat{W}\|^2_{\mathcal{H}_3} + \frac{k}{2}\|\hat{v}\|^2_{\mathcal{H}_1} + \frac{k}{2}\|\hat{W}\|^2_{\mathcal{H}_3} + \frac{1}{2}C_5\|\hat{v}\|^2_{\mathcal{H}_1} + \\ &+ \frac{1}{2}C_5\|\hat{u}\|^2_{\mathcal{H}_2} + \frac{1}{2}\|\varphi\|_{L_4}\cdot\|\hat{v}\|^2_{\mathcal{H}_1} + \frac{1}{2}\|\varphi\|_{L_4}\cdot\|\hat{u}\|^2_{\mathcal{H}_2}\end{aligned} \tag{4.17}$$

(hằng số C_5 là vế phải của bất đẳng thức (3.19))
Từ (4.17) ta nhận được

$$\left[\mathcal{C} - \frac{1}{2}(3 + J_o)C_5 + g\beta + 2k + \|\varphi\|_{L_4}\right](\|\hat{v}\|^2_{\mathcal{H}_1} + \|\hat{W}\|^2_{\mathcal{H}_3} + \|\hat{u}\|^2_{\mathcal{H}_2} \leqslant 0 \tag{4.18}$$

Như vậy nếu $\mathcal{C}$ đủ lớn để $\mathcal{C} - \frac{1}{2}((3 + J_o)C_5 + g\beta + 2k + \|\varphi\|_{L_4}) > 0$

thì $\|\hat{v}\|^2_{\mathcal{H}_1} + \|\hat{W}\|^2_{\mathcal{H}_3} + \|\hat{u}\|^2_{\mathcal{H}_2} = 0$ hay tương đương với $\hat{v} = 0$, $\hat{W} = 0$, $\hat{u} = 0$.

Điều này chứng tỏ $\overline{v_1} = \overline{v_2}$, $\overline{W_1} = \overline{W_2}$, $\overline{u_1} = \overline{u_2}$, và P_1, P_2 chỉ sai khác nhau một hằng số.

Ta có định lý như sau :

Định lý 2. Nếu các hệ số $(\mu + k)$, α, σ, χ đủ lớn và các hàm $f_1(x)$, $f_2(x)$ đủ nhỏ sao cho :

$$\min((\mu + k), \alpha, \sigma, \chi) > \frac{1}{2}\left[(3 + J_o)C_5 + g\beta + 2k + \|\varphi\|_{L_4}\right] \qquad (4.19)$$

ở đây :

$$F_1(x) = f_1(x) - g\beta\varphi\overline{\gamma}, \quad F_2(x) = f_2(x) + \chi\Delta\varphi(x)$$

thì nghiệm suy rộng của bài toán (1.1) ÷ (1.5) là duy nhất.

NHẬN XÉT

Mặc dù cả hai vế bất đẳng thức (4.19) đều chứa các hệ số k, χ nhưng ta có thể dễ dàng chỉ ra miền những giá trị của μ, k, α, σ, χ để bất đẳng thức (4.19) đúng.

Ví dụ khi $\min(\mu, \alpha, \sigma, \chi)$ đủ lớn còn k đủ nhỏ.

Tác giả chân thành cảm ơn Tiến sĩ Ngô Huy Cẩn đã cho những chỉ dẫn quí báu và thảo luận các kết quả của bài này.

Địa chỉ :
Trường Đại học Tổng hợp, Hà nội.

Nhận ngày 25-12-1987

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. NGUYỄN VĂN ĐIỆP. Quelques problems de l'hydrodynamique des liquides structurels. Thèse de candidats, Voronej, URSS. 1968 (en russe).

2. NGÔ HUY CẦN, NGUYỄN XUÂN HUY. Sur la convection thermique des fluides micropolaires. Acta mathematica Vietnamica. Vol II, N°2 ; p. 1 3 – 203, 1986.

3. AGMON S., DOUGLISH A., NIRENBERG L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, II, Comm. Pure Appl. Math. 35 – 92, 17, 1964.

4. МАДЖЕНЕС Э. Интерполяционные пространства и уравнения частных производных. Успехи матема. 21, вып.2 1966.

5. ЛАДЫЖЕНСКАЯ О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. Физматгиз, М., 1961.

6. ЗАРУБИН А Г. Задача о нестационарной свободной конвекции ЖВМ и МФ, Том 8, №6, 1968.

7. СОБОЛЕВ С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Издательство ЛГУ. 1950.

8. УХОВСКИЙ М. Р, ЮДОВИЧ В.И. Об уравнениях стационарной конвекции. ПММ Том 27, №2, 1963.

SUMMARY

ON THE STEADY OF HEATED MICROPOLAR FLUID

In this paper the steady motion of heated micropolar fluid is considered. The theorem of the existence of solution is proved and the conditions of its uniqueness are indicated.