Tạp chí Cơ học T. XI, 1989. Số 1 (trang 28 — 32)

VA CHẠM CỦA VẬT RẮN VÀO THANH ĐÀN HỒI CƠ LỰC MA SÁT LỚN Ở MẶT BÊN

NGUYỄN THÚC AN, NGUYỄN ĐĂNG TỘ

§. ĐẶT BÀI TOÁN

Nghiên cứu sự truyền sóng trong thanh vô hạn và bán vô hạn của thanh đàn hồi có kể đến lực ma sát nhớt ở mặt bên của thanh đã được xét ở [3].

Ở đây tác giả nghiên cứu bài toán va chạm của vật rắn vào thanh đàn hồi hữu hạn có kể đến bộ phận giảm chấn ở đầu thanh và ma sát nhớt ở mặt bên với phương pháp biến đổi Laplace.

§1. SỰ TRUYỀN SÓNG TRONG THANH

Khảo sát sự truyền sóng trong thanh hữu hạn tựa trên nền cứng khi có lực ma sát nhớt ở mặt bên, ta đưa về giải bài toán sau:

Tìm dịch chuyển dọc trục $u(x, t)$ thỏa mãn phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \lambda \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.1}$$

với điều kiện đầu:

$$u = 0, \dot{u} = 0 \text{ khi } t = 0, \tag{1.2}$$

điều kiện biên:

$$\left.\begin{array}{l} u = 0 \text{ tại } x = l, \\ \sigma_x = E \dfrac{\partial u}{\partial x} = -f(t) \text{ tại } x = 0. \end{array}\right\} \tag{1.3}$$

Dùng phép biến đổi Laplace $u_o(p, x) = \int_0^\infty u(x, t)e^{-pt}dt$, ta dẫn đến bài toán xác định hàm ảnh $u_o(p, x)$ thỏa mãn phương trình sau:

$$\frac{d^2 u_o}{dx^2} - \frac{p^2 + \lambda p}{a^2} u_o = 0 \tag{1.4}$$

và các điều kiện:

$$\left.\begin{array}{l} u_o(p, l) = 0 \text{ tại } x = l, \\ \dfrac{du_o}{dx} = -\dfrac{1}{E} f_o(p) \text{ tại } x = 0. \end{array}\right\} \tag{1.5}$$

Nghiệm của (1.4) có dạng:

$$u_o(p, x) = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x}, \tag{1.6}$$

trong đó

$$\beta = \sqrt{p^2 + \lambda p}\,/a.$$

Dựa vào điều kiện biên (1.5) ta xác định được các hệ số

$$C_1 = -\frac{f_o(p)}{E} \cdot \frac{1}{\beta(1 + e^{2\beta l})} \; ; \; C_2 = \frac{f_o(p)}{E} \cdot \frac{e^{2\beta l}}{\beta(1 + e^{2\beta l})}$$

Vậy

$$u_o(p, x) = \frac{f_o(p)}{E} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-\beta(x+2nl)}}{\beta} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-\beta[2(n+1)-x]}}{\beta} \right\} \quad (1.7)$$

Hay

$$u_o(p, x) = \frac{f_o(p)}{E} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n V_n(p, x) - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n W_n(p, x) \right\} \quad (1.8)$$

Hàm u(x, t) được xác định khi biết hàm gốc của $V_n(p, x)$ và $W_n(p, x)$

Ta có

$$V_n(p, x) = \frac{a \exp[-\sqrt{(p + \lambda/2)^2 - \lambda^2/4}\,(x + 2nl)/a]}{\sqrt{(p + \lambda/2)^2 - \lambda^2/4}} = aH_n\left(p + \frac{\lambda}{2}, x\right) \quad (1.9)$$

Theo [1] trang 226 công thức (26) và dựa vào định lý dịch chuyển ta có:

$$V_n(p, x) \div v_n(t, x) = ae^{-\frac{\lambda}{2}t} I_o\left[\frac{\lambda}{2}\sqrt{t^2 - \left(\frac{x + 2nl}{a}\right)^2}\right] \eta\left(t - \frac{x + 2nl}{a}\right) \quad (1.10)$$

Thực hiện tương tự ta có:

$$W_n(p, x) \div w_n(t, x) = ae^{-\frac{\lambda}{2}t} I_o\left[\frac{\lambda}{2}\sqrt{t^2 - \left[\frac{2(n+1)l - x}{a}\right]^2}\right] \eta\left(t - \frac{2(n+1)l - x}{a}\right)$$

(1.11)

Thay (1.10) và (1.11) vào (1.8) và dùng định lý nhân ta có:

$$u_o(p, x) \div u(x, t) = \frac{a}{E} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \eta\left(t - \frac{x + 2nl}{a}\right) \int_{(x+2nl)/a}^{t} f(t - \tau)e^{-\frac{\lambda}{2}t} \times$$

$$\times I_o\left[\frac{\lambda}{2}\sqrt{\tau^2 - \left(\frac{x + 2nl}{a}\right)^2}\right] d\tau$$

$$- \frac{a}{E} \sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n \eta\left(t - \frac{2(n+1)l - x}{a}\right) \int_{[2(n+1)l - x]/a}^{t} f(t - \tau)e^{-\frac{\lambda}{e}\tau} \times$$

$$\times I_o\left[\frac{\lambda}{2}\sqrt{\tau^2 - \left[\frac{2(n+1)l - x}{a}\right]^2}\right] d\tau \quad (1.12)$$

Nếu gọi n_1 là phần nguyên của $(at - x)/2l$ và n_2 là phần nguyên của $(at + x)/2l$ thì (1.12) được viết

$$u(t, x) = \frac{a}{E} \left\{ \sum_{n=o}^{n_1} (-1)^n \int_{(x+2nl)/a}^{t} f(t - \tau)e^{-\frac{\lambda}{2}\tau} I_o\left[\frac{\lambda}{2}\sqrt{\tau^2 - \left(\frac{x + 2nl}{a}\right)^2}\right] d\tau + \right.$$

$$+\sum_{n=1}^{n_2}(-1)^n\int_{(2nl-x)/a}^{t} f(t-\tau)e^{-\frac{\lambda}{2}\tau} I_0\left[\frac{\lambda}{2}\sqrt{\tau^2-\left(\frac{2nl-x}{a}\right)^2}\right]d\tau\Bigg\} \quad (1.13)$$

(1.13) là nghiệm của bài toán (1.1), (1.2), (1.3).

§2. VA CHẠM CỦA VẬT RẮN VÀO THANH

Theo kết quả của [2] khi xét va chạm của vật rắn vào thanh đàn hồi có đặt đệm giảm chấn, ta đưa về bài toán xác định lực f(t) như sau:

Tìm f(t) thỏa mãn phương trình:

$$\ddot{f}(t)+\frac{K}{M}f(t)+\frac{K}{F}\ddot{u}(o,t)=0 \quad (2.1)$$

với điều kiện đầu:

$$f(0)=0, \quad (2.2)$$

$$\dot{f}(0)=Kv_0/F, \quad (2.3)$$

trong đó K — độ cứng của đệm, F — thiết diện ngang, vo — vận tốc ban đầu của vật khi va chạm vào thanh.

Trong (2.1) hàm $\ddot{u}(o,t)$ còn phụ thuộc vào f(t), ta phải thực hiện các bước sau

Từ (1.13) ta có

$$u(o,t)=\frac{a}{E}\Bigg\{\int_0^t f(t-\tau)e^{-\frac{\lambda}{2}\tau} I_0\left(\frac{\lambda}{2}\tau\right)d\tau+$$

$$+2\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\int_{2nl/a}^{t} f(t-\tau)e^{-\frac{\lambda}{2}\tau} I_0\left[\frac{\lambda}{2}\sqrt{\tau^2-\left(\frac{2nl}{a}\right)^2}\right]d\tau\Bigg\} \quad (2.4)$$

trong đó: $N=n_1=n_2$ tại thiết diện $x=0$

Thực hiện đạo hàm (2.4) hai lần theo t ta có:

$$\ddot{u}(o,t)=\frac{a}{E}\Bigg\{\dot{f}(t)-\frac{a\lambda}{2E}f(t)+\frac{a\lambda^2}{4}\int_0^t g(t-\xi)f(\xi)d\xi+$$

$$2\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\left[e^{-\frac{\lambda nl}{a}}f\left(t-\frac{2nl}{a}\right)+\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\lambda nl}{2a}-1\right)f\left(t-\frac{2nl}{a}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda}{2}\int_0^{t-2nl/a} g_n(t-\xi)f(\xi)d\xi\right\}$$

Thay kết quả này vào (2.1) ta có:

$$\ddot{f}(t)+\frac{Ka}{EF}\dot{f}(t)+\left(\frac{K}{M}-\frac{Ka\lambda}{2EF}\right)f(t)+\frac{Ka\lambda^2}{4}\int_t^0 g(t-\xi)f(\xi)d\xi+$$

$$+\frac{2aK}{EF}\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\left[e^{-\frac{\lambda_n l}{a}}\dot{f}\left(t-\frac{2nl}{a}\right)+\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\lambda_n l}{2n}-1\right)\times\right.$$

$$\left.\times\ f\left(t-\frac{2nl}{a}\right)+\frac{\lambda}{2}\int_0^{t-2nl/a}g_n(t-\xi)\,f(\xi)d\xi\right]=0 \qquad (2.5)$$

(2.5) là phương trình vi tính phân có độ chậm, ta có thể giải nó trong từng khoảng thời gian.

a) Khi $0 < t < 2l/a$, khi đó $N = 0$; (2.5) có dạng:

$$\ddot{f}(t)+\frac{Ka}{EF}\dot{f}(t)+\left(\frac{K}{M}-\frac{Ka\lambda}{2EF}\right)f(t)+\frac{Ka\lambda^2}{4F}\int_0^t g(t-\xi)f(\xi)\,d\xi=0 \qquad (2.6)$$

Đây là phương trình vi tích phân thông thường, để giải nó ta chứng minh (2.6) và các điều kiện (2.2), (2.3) sẽ tương đương với phương trình Volter sau:

$$f(t)+\int_0^t K_o(t,\tau)\,f(\tau)\,d\tau=\frac{K}{F}V_o t \qquad (2.7)$$

trong đó

$$K_o(t,\tau)=\frac{Ka}{EF}+\int_\tau^t\left[\left(\frac{K}{M}-\frac{Ka\lambda}{2EF}\right)+\int_\tau^\theta\frac{Ka\lambda^2}{4F}g(\xi-\tau)\,d\xi\right]d\theta \qquad (2.8)$$

Thật vậy từ (2.7) theo t ta có $f(o)=0$ thỏa mãn (2.2).

Đạo hàm (2.7) theo t ta có:

$$\dot{f}(t)+K_o(t,\tau)f(t)+\int_0^t K'_{ot}(t,\tau)f(\tau)d\tau=\frac{K}{F}V_o \qquad (2.9)$$

Từ (2.8) ta có $\qquad K_o(t,t)=Ka/EF,$

$$K'_{ot}(t,\tau)=\frac{K}{M}-\frac{Ka\lambda}{2EF}+\int_\tau^t\frac{Ka\lambda^2}{4F}g(\xi-\tau)d\xi.$$

Từ (2.9) khi $t=0$ ta có: $\dot{f}(0)=\frac{K}{F}V_o$ thỏa mãn (2.3)

Đạo hàm (2.9) theo t một lần nữa ta có:

$$\ddot{f}(t)+\frac{Ka}{EF}\dot{f}(t)+K^o{}_t(t,\tau)f(\tau)\Big|_{\tau=t}+\int_0^t K''_{ot^2}(t,\tau)f(\tau)d\tau=0$$

Hay

$$\ddot{f}(t)+\frac{Ka}{EF}\dot{f}(t)+K^o{}_t(t,t)f(t)+\frac{Ka\lambda^2}{4F}\int_0^t g(t-\tau)f(\tau)d\tau=0$$

Đây chính là phương trình (2.6)

Giải (2.6) có nhiều phương pháp như: lặp nghiệm, lặp nhân, hay biểu diễn nghiệm qua hàm cho phép...

Ta có thể tìm nghiệm dưới dạng gần đúng liên tiếp:

$$f_o(t) = (K/F)V_o t,$$

$$f_1(t) = \frac{K}{F} V_o t - \int_0^t K_o(t,\tau) f_o(\tau)\, d\tau,$$

$$\ldots\ldots\ldots \tag{2.10}$$

$$f_n(t) = \frac{K}{F} V_o t - \int_0^t K_o(t,\tau) f_{n-1}(\tau) d\tau,$$

khi đó $\{f_n(t)\} \to f(t)$

b) Khi $2l/a < t < 4l/a$ thì $N = 1$, khi đó (2.5) có dạng:

$$\ddot{f}(t) + \frac{Ka}{EF}\dot{f}(t) + \left(\frac{K}{M} - \frac{Ka\lambda}{2EF}\right) f(t) + \frac{Ka\lambda^2}{4F}\int_{2l/a}^{t} g(t - \xi) f(\xi) d\xi +$$

$$+ \frac{Ka\lambda^2}{4F}\int_0^{2l/a} g(t-\xi) f(\xi) d\xi - \frac{2aK}{EF}\left[e^{-\frac{\lambda l}{a}} \dot{f}\left(t - \frac{2l}{a}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda}{2}\left(\frac{\lambda l}{2a} - 1\right) f\left(t - \frac{2l}{a}\right) + \frac{\lambda}{2}\int_0^{t-2l/a} g_1(t-\xi) f(\xi) d\xi \right] = 0 \tag{2.11}$$

$$\text{Đặt } m_1(t) = \frac{Ka\lambda^2}{4F}\int_0^{2l/a} g(t-\xi) f(\xi) d\xi - \frac{2aK}{EF}\left[e^{-\frac{\lambda l}{a}} \dot{f}\left(t - \frac{2l}{a}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda}{2}\left(\frac{\lambda l}{2a} - 1\right) f\left(t - \frac{2l}{a}\right) + \frac{\lambda}{2}\int_0^{t-2l/a} g_1(t-\xi) f(\xi) d\xi \right.$$

$$\text{trong đó: } g(y) = \left[I_1'\left(\frac{\lambda}{2}y\right) - 2I_1\left(\frac{\lambda}{2}y\right) + I_o\left(\frac{\lambda}{2}y\right)\right] e^{-\frac{\lambda}{2}y},$$

$$g_n(\tau) = \left\{ e^{-\frac{\lambda}{2}\tau} \left[\frac{\tau I_1\left(\frac{\lambda}{2}\sqrt{\tau^2 - \left(\frac{2nl}{a}\right)^2}\right)}{\sqrt{\tau^2 - \left(\frac{2nl}{a}\right)^2}} - I_o\left(\frac{\lambda}{2}\sqrt{\tau^2 - \left(\frac{2nl}{a}\right)^2}\right) \right] \right\}'_\tau,$$

$m_1(t)$ là hàm đã biết, vì sau khi giải (2.7) ta đã xác định được giá trị hàm $f(t)$ trong khoảng $t \in (0, 2l/a)$; khi $t \in [2l/a, 4l/a]$ thì $(t - 2l/a) \in [0, 2l/a)$, do đó $f(t - 2l/a)$ và $\dot{f}(t - 2l/a)$ là hàm đã biết, vậy (2.11) được viết:

$$\ddot{f} + \frac{Ka}{EF}\dot{f}(t) + \left(\frac{K}{M} - \frac{Ka\lambda}{2EF}\right) f(t) + \frac{Ka\lambda^2}{4F}\int_{2l/a}^{t} g(t-\xi) f(\xi) d\xi + m_1(t) = 0 \tag{2.12}$$

(2.12) là phương trình vi tích phân. Tương tự như trên, ta sẽ chứng minh được (2.12) có thể đưa về phương trình Volter sau :

$$f(t) + \int_{2l/a}^{t} K_o(t, \tau)f(\tau)d\tau = X_1(t) + f\left(\frac{2l}{a}\right) + \left[\dot{f}\left(\frac{2l}{a}\right) + \frac{Ka}{EF} f\left(\frac{2l}{a}\right)\right]\left(t - \frac{2l}{a}\right) \tag{2.13}$$

trong đó : $K_o(t, \tau)$ được xác định từ (2.8)

$$X_1(t) = -\int_{2l/a}^{t} d\theta \int_{2l/a}^{\theta} m_1(\xi)d\xi$$

Ta giải (2.13) bằng phương pháp lặp nghiệm $\{f_n(t) \to f(t)\}$

$$\text{Đặt } X_1(t) + f\left(\frac{2l}{a}\right) + \left[f\left(\frac{2l}{a}\right) + \frac{Ka}{EF} f\left(\frac{2l}{a}\right)\right]\left(t - \frac{2l}{a}\right) = \zeta(t)$$

khi đó :

$$f_o(t) = \zeta(t),$$

$$f_1(t) = \zeta(t) - \int_{2l/a}^{t} K_o(t, \tau)f_o(\tau)d\tau,$$

. . . . . .

$$f_n(t) = \zeta(t) - \int_{2l/a}^{t} K_o(t, \tau)f_{n-1}(\tau)d\tau.$$

Lý luận tương tự sẽ xác định được f(t) ở các khoảng thời gian tiếp theo Chẳng hạn khi $2jl/a < t < 2(j+1)l/a$, lúc đó N = j phương trình (2.5) có dạng :

$$\ddot{f}(t) + \frac{Ka}{EF}\dot{f}(t) + \left(\frac{K}{M} - \frac{Ka\lambda}{2EF}\right)f(t) + \frac{Ka\lambda^2}{4F}\int_{2jl/a}^{t} g(t-\xi)f(\xi)d\xi + m_j(t) = 0 \tag{2.14}$$

trong đó

$$m_j(t) = \frac{Ka\lambda^2}{4F}\int_{0}^{2jl/a} g(t-\xi)f(\xi)d\xi + \frac{2aK}{FF}\sum_{n=1}^{j}(-1)^n\left[e^{-\frac{\lambda nl}{a}}\dot{f}\left(t - \frac{2nl}{a}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda}{2}\left(\frac{\lambda nl}{2a} - 1\right) f\left(t - \frac{2nl}{a}\right) + \frac{\lambda}{2}\int_{0}^{t-2nl/a} g_n(t-\xi)f(\xi)d\xi \right] \text{ là hàm đã biết của t.}$$

Lý luận tương tự như trên có thể đưa (2.14) về dạng tương đương với phương trình Volter :

$$f(t) + \int_{2jl/a}^{t} K_o(t, \tau)f(\tau)d\tau = X_j(t) + f\left(\frac{2jl}{a}\right) + \left[\dot{f}\left(\frac{2jl}{a}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{Ka}{EF} f\left(\frac{2jl}{a}\right)\right]\left(t - \frac{2jl}{a}\right) \tag{2.15}$$

trong đo
$$X_j(t) = \int_{2jl/a}^{t} d\theta \int_{2jl/a}^{\theta} m_j(\xi)d\xi.$$

Giải (2.15) ta có thể tìm được dãy các nghiệm gần đúng hội tụ đều đến nghiệm cần tìm.
$$\{ f_n(t) \} \to f(t)$$
với
$$f_o(t) = \zeta_j(t),$$
$$f_1(t) = \zeta_j(t) - \int_{2jl/a}^{t} K_o(t, \tau)f_o(t)d\tau,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$f_n(t) = \zeta_j(t) - \int_{2jl/a}^{t} K_o(t, \tau)f_{n-1}(\tau)d\tau,$$
trong đó
$$\zeta_j(t) = X_j(t) + f\left(\frac{2jl}{a}\right) + \left[\dot{f}\left(\frac{2jl}{a}\right) + \frac{Ka}{EF} f\left(\frac{2jl}{a}\right)\right]\left(t - \frac{2jl}{a}\right)$$

Sau khi xác định được $f(t)$ thay vào (1.13) ta sẽ xác định được dịch chuyển, từ đó tìm được ứng suất, biến dạng tại mỗi thiết diện của thanh.

Bài toán va chạm coi như được giải quyết trọn vẹn.

§3. KẾT LUẬN

Bài toán đặt ra đã được giải quyết trọn vẹn, về mặt kỹ thuật — đây là mô hình bài toán về sự va chạm của búa vào cọc đàn hồi tựa trên nền cứng, mặt bên cọc chịu ma sát nhớt và có kể đến đệm ở đầu cọc.

Địa chỉ
Trường Đại học Thủy lợi

Nhận ngày 24-11-1988

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. БЕЙТМЕН Г., ЭРДЕЙН А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. 2, Москва « Наука » 1969.
2. БИДЕРМАН В. И., МАЛЮКОВА Р. П. Усилия и деформация при продольном ударе. Сб. « Расчёты на прочность Вып. Изд-во Машиностроение ». М. 1964.
3. ШЕХТЕР О. Я. Исследование распространения волн от нагрузки, приложенной к верхнему концу бесконочно длинного стержня. Основания и фундаменты №53, М., 1963.

РЕЗЮМЕ

ПРОДОЛЬНЫЙ УДАР ТВЕРДОГО ТЕЛА ОБ УПРУГИЙ СТЕРЖЕНЬ С УЧЕТОМ БОКОВЫХ ДЕМПФИРУЮЩИХ РЕАКЦИЙ

В этой работе изучается продольный удар твердого тела об упругий стержень с учетом боковых демпфирующих реакций, при этом другой конец опирается на твердый фундамент. В технико это есть задача об ударе Молота о свою.

ISSN 0866 — 7136
Chỉ số : **12.666** In tại nhà máy in Sách Khoa học Kỹ thuật Giá : **250đ00**