Tạp chí Cơ học T.XI, 1989 số 4 (trang 19—23)

# PHƯƠNG PHÁP BAO HÌNH MÀI MÒN LIÊN TỤC

BÙI XUÂN LIÊM

## §. MỞ ĐẦU

Một trong những công trình đầu tiên về vấn đề xác định độ mòn của truyền động bánh răng tiếp xúc đường là [1]. Trong công trình này chỉ dừng lại ở xác định độ mòn của bánh răng phẳng. Trong công trình [2], dùng phương pháp số để tính độ mòn của bánh răng phẳng tiếp xúc đường. Xác định độ mòn trong trường hợp tổng quát, trường hợp tiếp xúc enlip, của ăn khớp không gian được trình bày trong [3]. Trong bài báo này, sẽ đề xuất một phương pháp để giải bài toán phân tích bộ truyền bánh răng trong quá trình làm việc có kể đến độ mòn.

Trong trường hợp tổng quát, hình bao của họ mặt một thông số được xác định bởi phương trình :

$$r = r(u, \theta, \varphi), \qquad f(u, \theta, \varphi) = 0 \tag{0.1}$$

Ở đây $\varphi$ là thông số của họ ; $u$, $\theta$ là thông số của bề mặt ;

Chúng ta qui ước mỗi giá trị của $\varphi$ tương ứng với một và chỉ một mặt của họ và trên mặt không có các điểm đặc biệt.

Phương trình 2 của (0.1) được thành lập từ điều kiện đồng phẳng của những tiếp tuyến với đường đi qua điểm tiếp xúc trên hình bao và bề mặt tương ứng của họ :

$$f(u, \theta, \varphi) = [\bar{r}_u, \bar{r}_\theta, \bar{r}_\varphi] = 0 \tag{0.2}$$

ở đây $\qquad \bar{r}_u = \dfrac{\partial r}{\partial u}; \quad \bar{r}_\theta = \dfrac{\partial r}{\partial \theta}, \quad \bar{r}_\varphi = \dfrac{\partial r}{\partial \varphi}$

Phương trình đường tiếp xúc được xác định bằng (0.1) với điều kiện $\varphi$ = const

## §1. MÔ HÌNH HÓA BỀ MẶT MÀI MÒN THEO NGUYÊN TẮC BAO HÌNH MÀI MÒN LIÊN TỤC (BML)

Giả sử cho trước mặt $\Sigma_o$ tại thời điểm bánh răng chưa bị mòn. Theo lý thuyết ăn khớp, có thể xác định các thông số hình học, động học tại mỗi thời điểm tiếp xúc của các mặt. Vị trí của điểm tiếp xúc của $\Sigma_o$ với mặt răng đối tiếp phụ thuộc vào thông số góc quay $\varphi$.

Dùng phương pháp trình bày trong [3], tại mỗi điểm của đường làm việc, có thể xác định độ mòn tuyến tính $h_i$ phụ thuộc vào $\varphi$ :

$$h_i = h_i(\varphi) \tag{1.1}$$

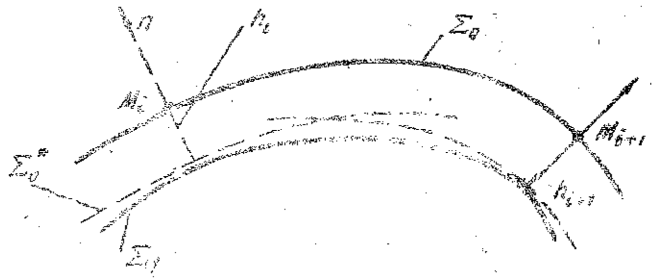
Quan sát một mảnh mặt $\Sigma_o$ ở lân cận điểm tiếp xúc $M_i$ (hình 1)

Kết quả của mài mòn ở bước mòn đầu tiên [1] mảnh bề mặt dịch chuyển theo hướng pháp tuyến một khoảng $h_i$. Vị trí bề mặt mới $\Sigma_o^*$ được xác định bởi phương trình :

$$r_o^* = T_{10} r_o \tag{1.2}$$

Ma trận dịch chuyển từ $\Sigma_o$ đến $\Sigma_o^*$

$$T_{0i} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & h_i e_x \\ 0 & 0 & 0 & h_i e_y \\ 0 & 0 & 0 & h_i e_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \tag{1.3}$$




Hình 1

Như vậy, chúng ta sẽ nhận được họ mặt $\Sigma_o^*$ với thông số của họ $\varphi$ :

$$r_o^* = r_o^*(u, \theta, \varphi) \tag{1.4}$$

Ở vùng lân cận điểm tiếp xúc, hình bao của họ mặt $\Sigma_o^*$ là mặt răng bị mài mòn trong bước mòn thứ nhất.

Quá trình trên có thể tiếp tục cho đến bước mòn thứ n. $\Sigma_n$ là mặt răng nhận được sau n bước mòn nhờ phương pháp bao hình mài mòn liên tục, nếu mỗi bề mặt $\Sigma_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) là hình bao của họ mặt $\Sigma_{k-1}^*$ ở bước mòn thứ k.

Ký hiệu $\varphi_k$ là thông số của họ mặt $\Sigma_{k-1}^*$ ở bước thứ k của quá trình BML. Sẽ chứng minh rằng bề mặt sau n bước mòn có phương trình.

$$r_n = r_n(u, \theta, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, h_1, h_2, \ldots, h_n);$$
$$f_j = [\bar{r}_\theta, \bar{r}_u, \bar{r}_\varphi] = 0 \; ; \; j = 1, 2, \ldots, n$$
$$\Phi_k(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, h_1, \ldots, h_n) = 0 \; ; \; k = 1, 2, \ldots, n \tag{1.5}$$

Trong ngoặc vuông là tích hỗn hợp 3 vectơ. Phương trình thứ 3 trong (1.5) chỉ mối liên hệ giữa độ mòn tuyến tính dọc theo đường làm việc ở mỗi bước mòn và thông số của họ $\varphi$ (góc quay ở thời điểm đầu tiên của mỗi bước mòn). Phương trình này có dạng (1.1).

Để chứng minh, dùng phương pháp qui nạp toán học. Khi $n = 1$, mặt $\Sigma_1$ là họ bao hình 1 thông số của mặt $\Sigma_o^*$, bề mặt này có được sau khi biến đổi mặt $\Sigma_o$ nhờ ma trận (1.3). Do vậy hệ thống (1.5) đúng đối với $n = 1$.

Giả sử phương trình mặt $\Sigma_{n-1}$ có dạng :

$$r_{n-1} = r_{n-1}(u, \theta, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}, h_1, \ldots, h_{n-1}),$$
$$f_i(u, \theta, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}, h_1, \ldots, h_{n-1}) = 0, \; i = 1, \ldots, n-1$$
$$\Phi_k(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}, h_1, \ldots, h_{n-1}) = 0, \; k = \ldots, 1, n-1 \tag{1.6}$$

Giải hệ phương trình thứ 3 của (1.6) đối với $h_j$:

$$h_j = h_j(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}); \quad j = 1, 2, \ldots, n-1$$

và thay vào hệ phương trình còn lại, sẽ nhận được phương trình mặt $\Sigma_{n-1}$

$$r_{n-1} = r_{n-1}(u, \theta, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}); \quad f_i(u, \theta, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) = 0$$

Như vậy họ bề mặt $\Sigma_{n-1}$ với thông số $\varphi_n$ có phương trình:

$$r_n = r_n(u, \theta, \varphi_1, \ldots, \varphi_n); \quad f_i(u, \theta, \varphi_1, \ldots, \varphi_n) = 0 \tag{1.7}$$

Hệ phương trình này, lúc cho $\varphi_n = \varphi_n^*$ xác định một trong những bề mặt $\Sigma_{n-1}: \Sigma_\varphi$.

Giải hệ phương trình 2 của (1.7) đối với $\varphi$, thay vào các phương trình còn lại của (1.7), nhận được:

$$r_n = r_n(u, \theta, \varphi_1(u, \theta), \ldots, \varphi_{n-1}(u, \theta), \varphi_n). \tag{1.8}$$

Nếu biết được liên hệ $u = u(\theta, \varphi_n)$ thì phương trình này cùng với (1.8) xác định bao hình E của họ mặt (1.7). Mặt E xác định bởi 2 thông số độc lập $\theta$ và $\varphi_n$.

Để tìm phương trình nội tại của bao hình, phương trình $u = u(\theta, \varphi_n)$, dùng điều kiện $\Sigma_\varphi$ và E có tiếp diện chung:

Tiếp diện của E xác định bởi vecto:

$$\frac{\partial r_n}{\partial \theta} + \frac{\partial r_n}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \theta}; \quad \frac{\partial r_n}{\partial \varphi_n} + \frac{\partial r_n}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \varphi_n} \tag{1.9}$$

Tiếp diện của $\Sigma_\varphi$:

$$\frac{\partial r_n}{\partial \theta}; \quad \frac{\partial r_n}{\partial u} \tag{1.10}$$

Vecto đầu tiên của (1.9) nằm trong mặt phẳng (1.10). Để sao cho vecto thứ 2 của (1.9) nằm trong (1.10), ba vecto: $\frac{\partial r_n}{\partial \theta}, \frac{\partial r_n}{\partial u}, \frac{\partial r_n}{\partial \varphi_n}$ phải đồng phẳng.

Từ đó:

$$\left[\frac{\partial r_n}{\partial \theta}, \frac{\partial r_n}{\partial u}, \frac{\partial r_n}{\partial \varphi_n}\right] = 0 \tag{1.11}$$

Như vậy, hệ (1.7) cùng với (1.11) cần phải được thỏa mãn đối với tất cả những điểm trên $\Sigma_n$. Đó là điều cần phải chứng minh.

## § 2. ÁP DỤNG PHƯƠNG PHÁP BML ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN PHÂN TÍCH TRUYỀN ĐỘNG BÁNH RĂNG CÓ TÍNH ĐẾN ĐỘ MÒN

Chúng ta sẽ tìm chuyển động tương đối của các mặt tiếp xúc có tính đến độ mòn. Sẽ chứng minh hai hệ quả sau.

**Hệ quả 1.** Theo nguyên tắc BML, mặt $\Sigma_n$ là hình bao của họ mặt $\Sigma_o$ trong chuyển động nào đó.

Để chứng minh hệ quả, dùng kết quả của phần trên. Phương trình mặt $\Sigma_n$ có dạng (1.5). Gắn hệ tọa độ $S_j$ và $S_{j-1}$ cho các mặt $\Sigma_j$ và $\Sigma_{j-1}$ ($j = 1, \ldots, n$). Hệ tọa độ $S_{j-1,j}$ được gắn với mặt chuyển tiếp $\Sigma_{j-1}^*$.

Hàm vecto (1.5) có dạng: $r_n = M_{no} r_o$,

ở đây,

$$M_{no} = M_n \cdot M_{n-1,n-2} \ldots M_{j,j-1} \ldots M_{1,0};$$

$$M_{j,j-1} = T_j M_{j-1}. \tag{2.1}$$

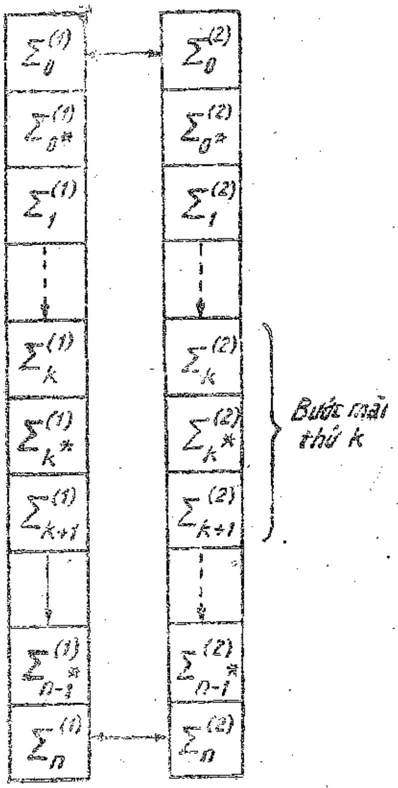
Ma trận $M_{j,j-1}$ mô tả chuyển động tương đối của mặt $\Sigma_{j-1}$ đối với $\Sigma_j$ với thông số $\varphi_j$ ở bước mài mòn thứ j. Ma trận $M_{no}$ mô tả chuyển động tương đối của $\Sigma_n$ và $\Sigma_o$. Đó là điều phải chứng minh.

**Hệ quả 2.** Nếu khi tạo thành mặt $\Sigma_n$ theo BML từ mặt $\Sigma_o$, mỗi mặt $\Sigma_j$ và $\Sigma_{j-}$ là bao hình mài mòn của nhau ở bước mài mòn thứ j với thông số $\varphi_j$, thì mặt $\Sigma_n$ và $\Sigma_o$ cũng sẽ là bao hình mài mòn của nhau trong chuyển động tương đối theo điều kiện của hệ quả 1.

Lấy $\Sigma_n$ làm mặt nguyên thủy. Dùng nguyên tắc BML, theo hệ quả 2, sẽ nhận được $\Sigma_o$. Mỗi một Ma trận trong tích các ma trận $M_{no}$ của (2.1) có Ma trận ngược, cho nên $M_{no}$ cũng là Ma trận ngược của $M_{on}$. Hệ quả đã được chứng minh.

Hai hệ quả trên dùng để tìm chuyển động tương đối của 2 mặt $\Sigma_n$ và $\Sigma_o$, nếu 1 trong 2 mặt là mặt nguyên thủy của mặt kia theo nguyên tắc BML và biết chuyển động tương đối của các mặt trung gian ở các bước mài mòn, tức là biết độ mòn tuyến tính và chuyển động tương đối của bước mài mòn trước.

Giả sử tại thời điểm đầu tiên, hai mặt răng $\Sigma_o^{(1)}$ và $\Sigma_o^{(2)}$ tiếp xúc với nhau. Trong quá trình ăn khớp, hai mặt răng tiếp xúc theo đường làm việc nguyên thủy (chưa bị mòn). Theo lý thuyết ăn khớp, có thể tìm được chuyển động tương đối giữa chúng.




Hình 2

Sau một thời gian làm việc, các mặt răng bị mài mòn và trở thành $\Sigma_n^{(1)}$ và $\Sigma_n^{(2)}$. Sơ đồ tạo thành các mặt trình bày trên hình 2. Theo hệ quả 1, về nguyên tắc, có thể tìm được chuyển động tương đối giữa $\Sigma_n^{(1)}$ và $\Sigma_n^{(2)}$ phương trình của các mặt sau khi bị mòn :

$$r_n^{(1)} = M_{no}^{(1)} r_o^{(1)},$$

$$r_n^{(2)} = M_{no}^{(2)} r_o^{(2)} \text{ hay } r_o^{(2)} = M_{on}^{(2)} r_n^{(2)} \tag{2.2}$$

Ở thời điểm đầu tiên :

$$r_o^{(1)} = M_o^{(12)} r_o^{(2)}$$

Từ đó chúng ta có :

$$r_n^{(1)} = M_n^{(12)} r_n^{(2)} \tag{2.3}$$

Ở đây,

$$M_n^{(12)} = M_{no}^{(1)} M_o^{(12)} M_{on}^{(2)}$$

Việc giải bài toán trên sẽ đơn giản hơn, nếu chỉ một mặt răng bị mòn, còn mặt răng kia không bị mòn. Giả thuyết này đúng trong truyền động trục vít. Trong thực tế, khi làm việc, độ mòn của răng bánh vít lớn hơn răng trục vít 3 – 5 lần. Ma trận $M_n^{(12)}$ sẽ đơn giản hơn :

$$M_n^{(12)} = M_o^{(12)} M_{on}^{(2)} \tag{2.4}$$

Để xác định vận tốc của chuyển động tương đối, sẽ tạo hàm (2.3) theo thời gian

$$v_n^{(21)} = \frac{dM_n^{(12)}}{dt} r_n^{(2)}$$

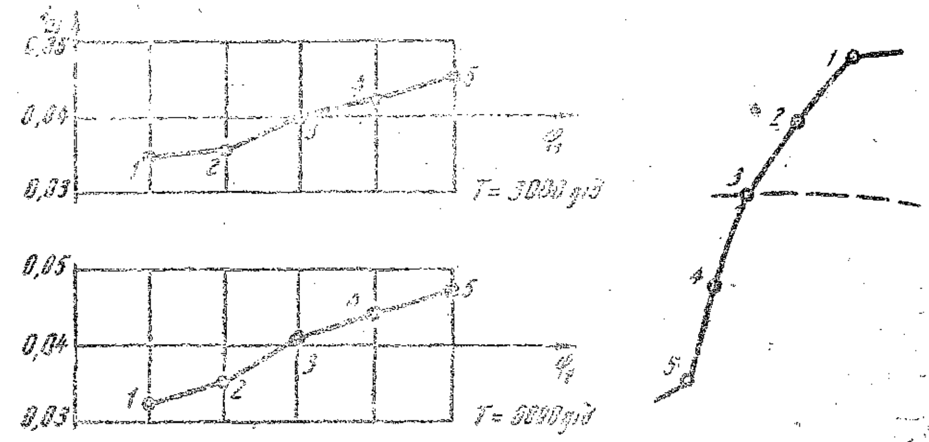
Viết các thành phần vận tốc trong hệ $S_n^{(2)}$ :

$$v_n^{(12)} = M_n^{(21)} v_n^{(21)} = M_n^{(21)} \frac{dM_n^{(12)}}{dt} r_n^{(2)} \tag{2.5}$$

Do đó, để xác định vận tốc tương đối cần lập ma trận $M_n^{(21)}$, đạo hàm và tìm tích hai ma trận $M_n^{(12)}$, $\dot{M}_n^{(12)}$.

Đạo hàm (2.5), sẽ tìm được gia tốc trong chuyển động tương đối giữa 2 khâu.

Phương pháp BML được dùng để xác định sự thay đổi của độ chính xác động học của bộ truyền trục vít hình trụ trong quá trình sử dụng. Kết quả được trình bày trên hình 3. Tính toán áp dụng cho trục vít với các thông số sau: A = 150 mm, $i_{12}$ = 1/25, m = 8 mm, p = 4, $Z_1$ = 1; đường kính dao phay bánh vít lớn hơn trục vít 5%, các thông số khác lấy trong [3].




Hình 3

## §3. KẾT LUẬN

Dùng phương pháp bao hình mài mòn liên tục có thể:

— Xác định chuyển động tương đối giữa những mặt răng bị mài mòn ở bất kỳ thời điểm nào trong quá trình sử dụng, đường làm việc, vị trí vết tiếp xúc, tỷ số truyền động, gia tốc.

— Đánh giá đặc tính tiếp xúc của bề mặt răng trong quá trình sử dụng, không cần giải hệ phương trình siêu việt.

*Địa chỉ:*
*Trường đại học Sư phạm kỹ thuật*
*TP. Hồ Chí Minh*

*Nhận ngày 10-12-1989*

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. ДРОЗДОВ Ю. Н. К расчёту зубчатых передач на износ. Машиноведение № 2, 1968.
2. ГРИБ В. В. Расчёт износа высших кинематических пар с учётом формоизменения при изнашивании. Теория и практика расчётов деталей машин на износ, Наука, 1983.
3. БУЙ СУАН ЛИЕМ. К определению износа в пространственных зубчатых зацеплениях. Деп. в НИИ маш, №179 мш, 5-1985.

РЕЗЮМЕ

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ОГИБАНО — ИЗНАШИВАНИЯ

Рассмотрено образование изношенных поверхностей по принципу последовательного огибано — изнашивания. Получены уравнения для геометрических характеристик таких поверхностей. Предложен метод последовательного огибано — изнашивания для решения задачи анализа зубчатых передач в процессе работел.