MỘT PHƯƠNG PHÁP TÍNH ĐỘ TIN CẬY CỦA HỆ CƠ HỌC

LÊ NHƯ DƯƠNG

§1. MỞ ĐẦU

Như ta đã biết, cơ sở lý thuyết và phương pháp tính độ tin cậy đã được bàn đến trong nhiều tài liệu [1 ; 6]. Chẳng hạn theo V. V. Bolotin hàm độ tin cậy được xác định :

$$P(t) = P[\vec{V}(\vec{r}, \tau) \in \Omega ; 0 < \tau \leqslant t, \vec{r} \in G] \tag{1.1}$$

Ở đây P[A] là xác suất có mặt của sự kiện ngẫu nhiên A. $\vec{V}(\vec{r}, \tau)$ là véctơ chất lượng trong không gian chất lượng Ω ; G là thể tích của hệ. Để tính P(t) người ta phải dùng nhiều thông tin và giả thiết chặt chẽ.

Trong [7] tác giả đưa ra một phương pháp tính độ tin cậy bằng cách đưa bài toán tính độ tin cậy về bài toán qui hoạch ngẫu nhiên dạng :

$$\begin{cases} P\{ \varphi_k(\vec{r}, \tau, \theta) \leqslant C_k \} \rightarrow \max \\ \text{Với các điều kiện} \begin{cases} P\{ \varphi_i(\vec{r}, \tau, \theta) \leqslant C_i \} \geqslant P_i, \; i = 1, n \; ; \; i \neq k \\ \forall \vec{r} \in G, \; \forall \tau \in [0, t] \end{cases} \end{cases} \tag{1.2}$$

Việc đưa bài toán tìm độ tin cậy về bài toán dạng (1.2) có ưu điểm trong việc tính toán cụ thể trên máy tính và chỉ cần thông tin về tải trọng ngoài.

Trong bài này chúng tôi sử dụng lý thuyết quá trình ngẫu nhiên để giải bài toán dạng (1.2). Trong tất cả các trường hợp được xét dưới đây thông tin cần thiết chỉ là thông tin về tải trọng ngoài.

§2. PHƯƠNG PHÁP TÍNH ĐỘ TIN CẬY

Ta xét một hệ thống có mối liên hệ sau :

$$\begin{cases} L\vec{u} = \vec{q} \\ M\vec{u} = \vec{V} \end{cases} \tag{2.1}$$

Trong đó $\vec{u} \in G$ là véctơ trạng thái ; $\vec{V}$ là vectơ chất lượng ; $\vec{q} = \vec{q}(\vec{x}, t, \theta)$ là véctơ tác dụng ngoài, nói chung $\vec{q}$ là véctơ trường ngẫu nhiên. L, M là các toán tử vi phân. Bài toán xét khi M, L là các toán tử tuyến tính. Do L, M là các toán tử tuyến tính nên ta có thể áp dụng nguyên lý cộng tác dụng. Như vậy, để đơn giản khi tính toán ta có thể xem $q(\vec{x}, t, \theta)$ là trường ngẫu nhiên số.

Theo [2 ; 3] do $D = G \times [0, t]$ bị chặn nên nếu tồn tại hàm tương quan $B(\vec{x}, \vec{x}, t)$ và

$$\int_D B(\vec{x}, \vec{x}, \tau) d\vec{x} \cdot d\tau < \infty \tag{2.2}$$

Khi đó tồn tại dãy hàm trực giao đầy đủ $\varphi_k(\vec{x}, t)$ trên D để $q(\vec{x}, t)$ có thể biểu diễn dưới dạng :

$$q(\vec{x}, t) = a(\vec{x}, t) + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \varphi_k(\vec{x}, t) \tag{2.3}$$

Trong đó ξ_k là các đại lượng ngẫu nhiên không tương quan, $M\xi_k = 0$, $D\xi_k = \lambda_k$ và :

$$\lambda_k \cdot \varphi_k(\vec{x}, t) = \int_D B(\vec{x}, \vec{y}, t, \tau)\, \varphi(\vec{y}, \tau)\, d\vec{y} d\tau$$

$$\lambda_k \geqslant 0, \; \xi_k = \int_D q(\vec{x}, t) \varphi_k(\vec{x}, t)\, d\vec{x} dt \tag{2.4}$$

Chuỗi (2.3) hội tụ theo nghĩa bình phương trung bình :

$$\lim_{N \to \infty} \int_D M \left| q(\vec{x}, t) - a(\vec{x}, t) - \sum_{k=1}^{N} \xi_k \varphi_k(\vec{x}, t) \right|^2 d\vec{x} dt = 0$$

Để giải bài toán ta sử dụng định lý giới hạn trung tâm : Giả sử $\xi_1, \xi_2, \ldots$ là các đại lượng ngẫu nhiên độc lập với :

$$F_k(x) = P\{\xi_k < x\}, \; E\xi_k = 0, \; D\xi_k = \sigma_k^2 < \infty. \text{ Đặt } B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$$

Nếu với mọi $\varepsilon > 0$ ta có :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{B} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x| \geqslant \varepsilon B_n} x^2 dF_k(x) = 0 \tag{2.5}$$

Thì

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{Sup} \left| P\left\{ \frac{S_n}{B_n} < x \right\} - \Phi(x) \right| = 0$$

Ở đây $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$; $\Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$ là hàm phân phối chuẩn.

Điều kiện (2.5) được thực hiện nếu $\xi_1, \xi_2, \ldots$ là các đại lượng ngẫu nhiên độc lập có cùng phân phối. Các điều kiện tương đương với (2.5) được xét trong [6]. Chẳng hạn :

$$\frac{1}{B_n^{1+\delta/2}} \sum_{k=1}^{n} E(X_k - EX_k)^{2+\delta} \to 0 \text{ với } \delta > 0 \text{ nào đó} \tag{2.6}$$

Trở lại bài toán ta giả sử rằng các đại lượng $\xi_1, \xi_2, \ldots$ trong khai triển của $\vec{q}(x, t)$ ở dạng (2.3) là độc lập. Như trong phần ví dụ sau bài này ta sẽ thấy giả thiết này đúng với một lớp lớn các bài toán cơ học. Bài toán (1.2) được giải bằng cách đưa về bài toán qui hoạch tiền định tương đương, hoặc được tính trực tiếp theo (1.1) trong các trường hợp đặc biệt.

Thay (2.3) vào (2.1) ta được:

$$L\vec{u} = a(\vec{x}, t) + \sum \xi_k \vec{\varphi}_k(x, t) \tag{2.7}$$

Nghiệm $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ được tìm dưới dạng

$$u_i = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k u_{ki}(\vec{x}, t) \tag{2.8}$$

Các hàm tiền định u_{ki} thỏa mãn phương trình tiền định dạng (2.1). L, M là các toán tử tuyến tính do đó theo [7] bài toán độ tin cậy đưa về bài toán qui hoạch ngẫu nhiên sau:

$$\begin{cases} P\left\{ v_{o1} + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k v_{k1}(\vec{x}, \tau) \leqslant C_1 \right\} \to \max \\ \text{với các điều kiện} \begin{cases} P\left\{ v_{oj} + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k v_{kj} \leqslant C_j \right\} \geqslant P_j \\ j = \overline{2, n}\,;\ \vec{x} \in G,\ \tau \in [0, t] \end{cases} \end{cases} \tag{2.9}$$

Trong đó $v_{ki}(\vec{x}, t)$ tính theo $u_{ki}(\vec{x}, t)$ bằng hệ phương trình tiền định dạng (2-1)
Trong thực tế ta sẽ giải bài toán với chỉ số k đủ lớn tức là bài toán qui hoạch sau:

$$\begin{cases} P\left\{ v_{o1} + \sum_{k=1}^{N} \xi_k v_{k1}(\vec{x}, \tau) \leqslant C_1 \right\} \to \max \\ \text{Với các điều kiện} \begin{cases} P\left\{ v_{oj} + \sum_{k=1}^{N} \xi_k v_{kj} \leqslant C_j \right\} \geqslant P_j \\ j = \overline{2, n} \quad \vec{x} \in G,\ \tau \in [0, t] \end{cases} \end{cases} \tag{2.10}$$

Đặt: $$f_j(\vec{x}, \theta, \tau) = v_{oj} + \sum_{k=1}^{N} \xi_k v_{kj}(\vec{x}, \tau) \tag{2.11}$$

Suy ra $Ef_j = v_{oj}$. Xét hàm $q_j(\theta) = \dfrac{f_j - v_{oj}}{\sqrt{Df_j}}$ (2.12)

Rõ ràng $Eq_j(\theta) = 0$ và $Dq_j(\theta) = 1$ (2.13)

Giả sử các đại lượng ngẫu nhiên $\xi_k v_{kj}$ thỏa mãn điều kiện của định lý giới hạn trung tâm dạng (2.5), (2.6) khi đó $q_j(\theta)$ dần về phân phối chuẩn. Kết hợp với điều kiện (2.13) ta suy ra $q_j(\theta)$ không phụ thuộc vào $\vec{x}$ và t. Ta có:

$$F_j(\vec{x}, \tau) = P\{f_j - C_j \leqslant 0\} = P\left\{\frac{f_j - C_{oj}}{\sqrt{Df_j}} + \frac{v_{oj}}{\sqrt{Df_j}} - \frac{C_j}{\sqrt{Df_j}} \leqslant 0\right\}$$

$$= P\left\{\frac{v_{oj} - C_j}{\sqrt{Df_j}} \leqslant -q_j(\theta)\right\} = P\{g_j(\vec{x}, \tau) \leqslant -q_j(\theta)\}$$

Đặt $$H_j(z) = P\{-q_j(\theta) \leqslant z\} \tag{2.14}$$

Khi đó bài toán (2.10) tương đương với bài toán:

$$\begin{cases} F_1(\vec{x}, \tau) = 1 - H_1(g_1(\vec{x}, \tau)) \to \max \\ \text{Với các điều kiện} \begin{cases} F_j(\vec{x}, \tau) = 1 - H_j(g_j(\vec{x}, \tau)) \geqslant P_j \\ j = \overline{2, n}\ ;\ x \in G,\ \tau \in [0, t] \end{cases} \end{cases} \tag{2.15}$$

Do hàm $H_j(Z)$ là hàm tăng nên (2.15) chuyển về bài toán:

$$\begin{cases} g_1(\vec{x}, \tau) \to \min \\ \text{Với các điều kiện} \begin{cases} g_j(\vec{x}, \tau) \leqslant \beta_j \\ j = \overline{2, n}\ ;\ \tau \in [0, t] \end{cases} \end{cases} \tag{2.16}$$

Trong đó β_j là số lớn nhất thỏa mãn điều kiện:

$$1 - P_j \geqslant H_j(\beta)$$

Bài toán (2.15) là bài toán qui hoạch phi tuyến, thuật giải bài toán này đã được nhiều tài liệu đề cập đến [5].

* *Trường hợp đặc biệt:* Nếu ξ_k trong khai triển của $q(\vec{x}, t)$ là các đại lượng ngẫu nhiên Gauss:

Ta thấy rằng trong các bài toán cơ học, bằng cách bao miền Ω bằng miền hình hộp (thay cho $\vec{v} \in \Omega$ ta xét $\vec{v_i} \in [a_i, b_i]$) ta có thể tính

$$P(t) \approx P\{a_1 \leqslant v_1 \leqslant b_1\ ;\ a_2 \leqslant v_2 \leqslant b_2\ ;\ \ldots\ ;\ a_n \leqslant v_n \leqslant b_n\} \tag{2.17}$$

Trong đó a_i, b_i là các giá trị thực ta chọn tùy theo miền Ω.
Theo phương pháp tìm nghiệm (2.8) ta có thể viết

$$V_i = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_{ki} U_{ki} \tag{2.18}$$

Ta tính P(t) với chỉ số k = N đủ lớn. Khi đó

$$P(t) \approx P\left\{a_1 \leqslant \sum_{k=1}^{N} \xi_{k1} U_{k1} \leqslant b_1, \ldots, a_n \leqslant \sum_{k=1}^{N} \xi_{kn} U_{kn} \leqslant b_n\right\} \tag{2.19}$$

Với phép biến đổi tuyến tính của các đại lượng ngẫu nhiên Gauss cho ta các đại lượng ngẫu nhiên Gauss [2]. Vậy khi đó ta tính trực tiếp P(t) theo (2.19) theo công thức hàm phân phối chuẩn n chiều [8].

§ 3. VÍ DỤ

Xét thiết bị giảm chấn. Giả sử Vật có khối lượng M, liên hệ đàn hồi với độ cứng C, và liên hệ nhớt với hệ số k với nền. Vật dao động với gia tốc truyền $a_o(t)$.

Ta xem hệ có một bậc tự do.

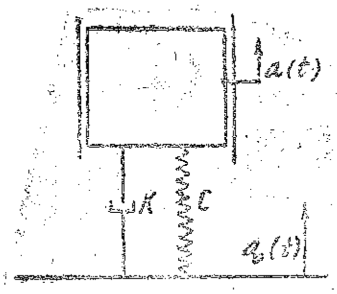
Miền giá trị của tham biến chất lượng của hệ là Ω :

$$\Omega : |u(t)| < u_* ; \; |a(t)| < a_* \qquad (3.1)$$

$u(t)$ là chuyển dịch so với nền, $a(t)$ là gia tốc của vật. Chuyển dịch $u(t)$ thỏa mãn phương trình :

$$\ddot{u}(t) + 2\varepsilon \dot{u}(t) + \omega_o^2 u = -a_o(t) \qquad (3.2)$$

$$\varepsilon = k/2M, \; \omega_o = c/M.$$



Hình 1

Gia tốc $a(t)$ được xác định từ phương trình :

$$a(t) = a(t) + \ddot{u}(t) \qquad (3.3$$

Điều kiện ban đầu của hệ là :

$$u(t)\Big|_{t=0} = 0, \qquad \dot{u}(t)\Big|_{t=0} = 0 \qquad (3.4)$$

Ta tính $P(t) = P\{-u_* < u(t) < u_* ; \; -a_* < a(t) < a_*\}$ (3.5)

Giả thiết $a_o(t)$ là quá trình chuyển động BROWN trên $[o, a]$.

Sử dụng khai triển (2.3) cho $a_o(t)$ ta được

$$a_o(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \varphi_k(\vec{x}, t) \qquad (3.6)$$

Sau một số phép tính đơn giản ta được :

$$a_o(t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n \frac{\sin (n + 1/2) \frac{\pi t}{a}}{\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{a}} \qquad (3.7)$$

Trong đó ξ_n là các đại lượng ngẫu nhiên Gauss độc lập $N(0, 1)$. Với t cố định chuỗi (3.7) hội tụ theo xác suất 1.

Ta tìm nghiệm $u = \sqrt{\frac{2}{a}} \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n u_n(t), \; v = \sqrt{\frac{2}{a}} \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n v_n(t)$ (3.8)

Sau khi tính toán bằng cách thay (3.8), (3.7) vào (3.2) và (3.3) ta được

$$u_n(t) = e^{-\varepsilon t}(A_n \sin\omega_\varepsilon t + B_n \cos\omega_\varepsilon t) + M_n \sin a_n t - B_n \cos a_n t.$$

$$v_n(t) = e^{-\varepsilon t}\{[A_n(\varepsilon^2 - \omega_\varepsilon^2) + 2B_n\omega_\varepsilon \cdot \varepsilon]\sin \omega_\varepsilon t + [B_n(\varepsilon^2 - \omega_\varepsilon^2) - 2A\omega_\varepsilon \cdot \varepsilon] \times$$

$$\times \cos\omega_\varepsilon t\} - M_n a_n^2 \sin a_n t + B_n a_n^2 \cos a_n t + \frac{1}{a_n} \sin a_n t.$$

Trong đó $$a_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{a}, \quad \omega_s = \sqrt{\omega_0^2 - \varepsilon^2},$$

$$A_n = \frac{\varepsilon B_n - a_n M_n}{a_n}, \quad M_n = \frac{a_n^2 - \omega_0^2}{a_n \cdot H_n}, \quad B_n = \frac{-2}{H_n},$$

$$H_n = (a_n^2 - \omega_0)^2 + 4a_n^2\varepsilon^2.$$

Ta thấy $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 0$

do đó các chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(t)$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n(t)$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(t)v_n(t)$ với mỗi t cố định là các chuỗi hội tụ. Do ξ_n là đại lượng ngẫu nhiên Gauss N(0, 1) nên $X = \sqrt{\frac{2}{a}}\sum\limits_{n=0}^{N} \xi_n u_n(t)$, $Y = \sqrt{\frac{2}{a}}\sum\limits_{n=0}^{N} \xi_n v_n(t)$ là các đại lượng Gauss. Vậy

$$\varphi_{x,y}(x, y) = \exp\left\{-\frac{1}{2}(x, y)\begin{pmatrix} \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2}{a}u_n^2, & \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2}{a}u_n v_n \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2}{a}u_n v_n, & \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2}{a}v_n^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}\right\} \tag{3.9}$$

Do tính hội tụ của các chuỗi trong (3.9) nên

$$\varphi_{u,v}(x, y) = \exp\left\{-\frac{1}{2}(x, y)\begin{pmatrix} \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2}{a}u_n^2, & \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2}{a}u_n v_n \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2}{a}u_n v_n, & \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2}{a}v_n^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}\right\} \tag{3.10}$$

Tức là phân phối đồng thời của u(t) và v(t) là chuẩn.
Khi đó :

$$F_{u,v}(m, n) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{m}\int_{-\infty}^{n}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{x_1^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{x_1x_2}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{x_2^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}dx_1dx_2 \tag{3.11}$$

Ở đây : $$\sigma_1^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{a}u_n^2(t), \quad \sigma_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{a}v_n^2(t),$$

$$\rho = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\, v_n(t) \Big/ \left\{ SQR \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2(t) \sum_{n=0}^{\infty} v_n^2(t) \right) \right\}$$

Cuối cùng ta tính được :

$$P(t) = P\{|u| < u_*, |v| < v_*\} =$$

$$= F_{u,v}(u_*, v_*) - F_{u,v}(-u_*, v_*) - F_{u,v}(u_*, -v_*) + F_{u,v}(-u_*, v_*).$$

Sau đây là kết quả tính toán với số liệu cụ thể :

Với $\omega_0 = 10 \left(\frac{1}{S}\right)$, $\varepsilon = 0{,}5 \left(\frac{1}{S}\right)$, $u_* = 8(cm)$, $v_* = 1 \left(\frac{cm}{s^2}\right)$

Chương trình viết bằng ngôn ngữ BASIC trên máy Apple II. Kết quả cho ta P(t) ứng với từng phút trong thời gian 1 giờ. Thuật tính toán tích phân (3.11) có thể lấy theo [8].

Kết quả cho thấy trong 8 phút đầu P(t) = 1, P(t) thấp nhất ở phút thứ 9 P(t) = 0,9875517 sau đó P(t) tăng dần và ở phút thứ 60 ta được P(t) = 0,9930576.

KẾT LUẬN

Bài báo đã nêu một phương pháp tính độ tin cậy P(t) của cơ hệ dựa trên các kiến thức của quá trình ngẫu nhiên.

Áp dụng phương pháp nêu ra, bài toán xác định độ tin cậy của thiết bị giảm chấn đã được giải đến kết quả cuối cùng.

Địa chỉ
Trường đại học Tổng hợp HN

Nhận ngày 15-10-1987

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. БОЛОТИН В.В. Методы теорий вероятностей и теории надежности в расчётах сооружений. Стройиздат, Москва, 1982.
2. ГИХМАН И.И., СКОРОХОД А.В. Введение в теорию случайных процессов Наука, Москва, 1977.
3. КОРОЛЮК В.С., ПОРТЕНКО Н.И. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. Наукова Думка, Киев, 1978.
4. СВЕГЛИЦКИЙ В.А. Случайные колебания механических систем. Машиностроение, Москва, 1976.
5. ЕРМОЛЬЕВ Ю.М, Методы стохастического программирования. Наука, Москва, 1976
6. ПЕТРОВ В.В. Суммы независимых случайных величин Наука, Москва, 1972.
7. NGUYỄN VĂN PHÓ. Về một mô hình toán học của lý thuyết độ tin cậy. Tạp chí Cơ học số 2, 1985.
8. OWEN D. W. Handbook of statistical tables. London. Paris, 1975.

RÉSUMÉ

SUR UNE METHODE DE CALCULER LA FIABILITE DES SYSTEMES MECANIQUES

Dans cet article, la théorie des processus alétoires est appliquée dans la résolution du problème de fiabilité sous forme d'un problème de programmation stochastique.

Cette méthode a l'avantage d'etre convenable à la résolution du problème sur les ordinateurs, d' autre, part, pour la résolution sur la charge extérieure.

Dans l' article, est aussi donné un exemple concret sur le calcul d'un amortisseur sous l'action d'un charge aléatoire.