Tạp chí Cơ học T. XI, 1989 số 1 (trang 1 – 6)

VỀ MỘT BÀI TOÁN KHUẾCH TÁN RỐI HỢP CHẤT

TRẦN VĂN CÚC

§1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Khi tìm quy luật phân bố nồng độ hợp chất (phù sa, bụi muối...) trong chất lỏng, các tác giả [1, 2, 3, 4] đều xem quy luật đó thỏa mãn quá trình khuếch tán rối.

Tuy nhiên, khi giải các bài toán cụ thể nhiều tác giả đã thu được nghiệm giải tích dựa trên những giả thiết hạn chế về phương trình khuếch tán và các đặc trưng khác của dòng chảy [2, 3, 4, 6].

Sau đây ta sẽ ứng dụng lý thuyết khuếch tán để tìm quy luật phân bố hợp chất trong miền dòng chảy thích hợp thường gặp trong thực tế.

§2. PHƯƠNG TRÌNH KHUẾCH TÁN VÀ MÔ HÌNH BÀI TOÁN

Xét miền dòng chảy chứa hợp chất mà các đặc trưng khác rất ít với chất lỏng. Dòng chảy giả thiết có chiều sâu không đổi h, chiều dài xác định l. Xét dòng phẳng. Phương trình khuếch tán mà [6] đã thành lập trong trường hợp 2 chiều có dạng:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u\frac{\partial C}{\partial x} + v\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K_x\frac{\partial C}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_y\frac{\partial C}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(\omega C) \qquad (2.1)$$

trong đó: $C = C(x, y, t)$ là nồng độ trung bình của hợp chất, u, v là các thành phần của vận tốc trung bình dòng ngoài. K_x, K_y là các hệ số khuếch tán theo các hướng Ox, Oy, ω là vận tốc rơi (lắng) của hợp chất. Hệ tọa độ Oxy chọn sao cho gốc ở sát đáy, Ox hướng theo dòng.

Vận tốc rơi ω của hợp chất theo [3, 6] là rất bé và xem là không đổi:

$$\omega = \text{const} \qquad (2.2)$$

Hệ số khuếch tán theo chiều thẳng đứng K_y so với K_x cũng rất bé và ta cũng giả thiết là không đổi:

$$K_y = K = \text{const} \qquad (2.3)$$

Hệ số khuếch tán theo chiều dọc K_x, với dòng trong ống, kênh thẳng, theo [8] có dạng:

$$K_x = \beta u_{tb}^2 \qquad (2.4)$$

với u_{tb} là vận tốc trung bình của dòng ngoài chất lỏng. β là hệ số tỉ lệ (với ống bán kính R thì $\beta = R/48\chi$ trong đó χ là hệ số khuếch tán phân tử).

Xét vận tốc trung bình của dòng ngoài (dòng chất lỏng) thỏa mãn qui luật:

$$u = u_0 + ax, \quad v = 0 \qquad (2.5)$$

trong miền đang xét. Với u_0 là vận tốc dòng tại mặt cắt $x = 0$, a là hằng số xác định. Nếu $a > 0$ thì ngược lại, khi $a = 0$ dòng qua mặt cắt sẽ không đổi trong toàn miền đang xét (trường hợp mà [2, 3, 4] đã xét).

Tóm lại, xét qui luật phân bố hợp chất trong dòng chảy mà các đặc trưng thỏa mãn (2.2) ÷ (2.5). Phương trình (2.1) trong trường hợp đó sẽ có dạng :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (u_0 + ax)\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\beta(u_0 + ax)^2 \frac{\partial C}{\partial x}\right] + K\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \omega\frac{\partial C}{\partial y} \qquad (2.6)$$

Đối với nồng độ hợp chất $C(x, y, t)$ ta đưa vào các giả thiết sau :

1. Tại mặt cắt ban đầu $x = 0$, qui luật phân bố nồng độ đã biết

$$C(0, y, t) = f_1(y, t) \qquad (2.7)$$

Trong các bài toán cụ thể, nói chung để tìm phân bố ở mặt cắt ban đầu phải tiến hành đo đạc trực tiếp. Đối với bài toán tìm quy luật phân bố hợp chất trong bể lắng thì nồng độ $C(0, y, t)$ được tính theo nồng độ của dòng vào bể tức là lượng phù sa của kênh, sông khi vào bể.

Đối với bài toán phân bố muối trong sông (bài toán xâm nhập mặn) (phương trình (2.1) nếu $\omega = 0$ thì có thể xem đó là phương trình cân bằng muối 2 chiều) với bài toán 1 chiều theo [5] tại mặt cắt ban đầu phân bố muối có dạng :

$$C(0, t) = \frac{\int_{t_0}^{t} Q dt}{\int_{t_0}^{t_2} Q dt}(C_2 - C_1) + C_1 \qquad (2.8)$$

với Q là lưu lượng, C_1 là nồng độ ứng với nước triều dừng, C_2 là nồng độ khi triều dừng ở thời điểm nước lớn. t_2 ứng với thời điểm nước lớn.

Với bài toán phân bố muối hai chiều, ta có thể xây dựng hàm phân bố $C(0, y, t)$ dưới dạng :

$$C(0, y, t) = C(0, t)\, g(y) \qquad (2.9)$$

với $C(o, t)$ xác định theo (2.8) còn $g(y)$ là một hàm có thể xấp xỉ được dưới dạng một đa thức theo y :

$$g(y) = a^{(0)} + a^{(1)}y + a^{(2)}y^2 + a^{(3)}y^3 + \ldots \qquad (2.10)$$

Các hệ số $a^{(i)}$ phải chọn sao cho $g(y)$ đơn điệu giảm và thỏa mãn những điều kiện thích hợp ở đáy $y = 0$ và trên mặt thoáng $y = h$. Nếu dừng lại ở đa thức bậc 3 thì hàm $g(y)$ có thể chọn :

$$g(y) \approx \frac{1}{2}h^3 - \frac{3}{2}hy^2 + y^3 \qquad (2.11)$$

Nếu miền dòng chảy đang xét là miền sau hạ lưu các đập lớn thì trước khi mở đập hợp chất ở phía thượng lưu bị lắng vì vậy trong trường hợp đó có thể giả thiết $C(0, y, t) = 0$. (Nước qua hạ lưu luôn luôn trong).

2, Trên đáy, giả thiết hợp chất không thấm qua :

$$\frac{\partial C}{\partial y} = 0 \quad \text{với } y = 0 \qquad (2.12)$$

3, Trên mặt thoáng, hợp chất thỏa mãn điều kiện khuếch tán cân bằng với trọng lực :

$$K\frac{\partial C}{\partial y} + \omega C = 0 \quad \text{với } y = h \qquad (2.13)$$

4. Tại mặt cắt cuối $x = l$ của miền dòng chảy đang xét, nếu nó đủ xa mặt cắt ban đầu, kích động ở đó đã suy giảm, phân bố hợp chất có xu thế trở lại ổn định, không phụ thuộc theo chiều dài dòng chảy, vì thế có thể giả thiết rằng :

$$\frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad \text{tại } x = l \qquad (2.14)$$

với một số bài toán, chẳng hạn bài toán phân bố hợp chất trong bể lắng thì ở mặt cắt $x = l$, có thể xác định được nồng độ hợp chất ở đó. Khi xét sự xâm nhập mặn vào sông, nếu mặt cắt cuối đủ xa cửa sông thì theo [5] có thể giả thiết nồng độ muối ở đó không có. Tóm lại, tại $x = l$ giả sử ta đã biết phân bố hợp chất thỏa mãn điều kiện

$$C(l, y, t) = f_2(y, t) \tag{2.15}$$

Trong đó $f_2(y, t)$ là hàm đã biết.

5. Tại thời điểm ban đầu $t = 0$. Giả sử trong miền đang xét ta đã biết được quy luật phân bố hợp chất dạng :

$$C(x, y, 0) = f(x, y) \tag{2.16}$$

Nếu trong miền đang xét tại thời điểm ban đầu chưa có một kích động nào (miền hạ lưu sau các đập lớn khi chưa mở đập chẳng hạn) thì có thể sử dụng phân bố ban đầu theo dạng của [6]

$$C(x, y, 0) = C_o \exp\left(-\frac{\omega}{K}\, y\right) \tag{2.17}$$

với C_o là hằng số thực nghiệm.

Đối với bài toán xâm nhập mặn, có thể xem nồng độ muối ban đầu là không đổi hoặc bằng không.

Tóm lại cần xác định qui luật phân bố hợp chất thỏa mãn phương trình (2.6) với các điều kiện biên (2.7), (2.12), (2.13), (2.14) hoặc (2.15) và điều kiện dần (2.16) trong miền

$$\Omega_{l,h} = \{0 < x < l,\ 0 < y < h,\ \tau > 0\}$$

trong đó các hàm $f(x, y)$, $f_1(y, t)$, $f_2(y, t)$ giả thiết thỏa mãn các điều kiện đòi hỏi của bài toán.

§ 3. GIẢI BÀI TOÁN

Trước hết dùng phép đổi biến sau :

$$\xi = \frac{\sqrt{K}}{2a\sqrt{B}\, u_o h} \ln\left(\frac{ux + u_o}{u_o}\right)^2 ; \quad \eta = \frac{y}{h} ; \quad \tau = \frac{K}{h^2}\, t \tag{3.1}$$

Ta xem $u = u_o + ax > 0 \quad \forall x : 0 < x < l$

Phép đổi biến (3.1) đơn trị, xác định. Với phép đổi biến (3.1) phương trình (2.6) sẽ có dạng :

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial \eta^2} - 2a_1 \frac{\partial C}{\partial \xi} + 2b_1 \frac{\partial C}{\partial \eta} \tag{3.2}$$

trong đó $$C = C(\xi, \eta, \tau),\ a_1 = \frac{h(1 - a\beta)}{2\sqrt{\beta K}},\ b_1 = \frac{\omega h}{2K} \tag{3.3}$$

còn các điều kiện biên sẽ trở thành :

$$C(0, \eta, \tau) = f_1(\eta, \tau) \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial C}{\partial \eta} = 0 \quad \text{với } \eta = 0. \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial C}{\partial \eta} + 2b_1 C = 0 \quad \text{với } \eta = 1 \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial C}{\partial \xi} = 0 \quad \text{với } \xi = l_o \tag{3.7}$$

hoặc $$C(l_o, \eta, \tau) = f_2(\eta, \tau) \tag{3.8}$$

với $$l_o = \frac{\sqrt{K}}{2au_oh\sqrt{\beta}} \ln\left(\frac{\mu_o l + u_o}{u_o}\right)^2 \quad (3.9)$$

điều kiện đầu tương ứng : $$C(\xi, \eta, 0) = f(\xi, \eta) \quad (3.10)$$

Trong biến (3.1) miền $\Omega_{l,h}$ trở thành miền

$$\Omega_{l_o,1} = \{0 < \xi < l_o, 0 < \eta < 1, \tau > 0\}$$

Đặt $$C(\xi, \eta, \tau) = \exp(a_1\xi - b_1\eta - c_1\tau)\theta(\xi, \eta, \tau) \quad (3.11)$$

trong đó : $\theta(\xi, \eta, \tau)$ là hàm mới phải tìm $c_1 = a_1^2 + b^2$.

Thay (3.11) vào (3.2) và các điều kiện (3.3), (3.4), (3.5), (3.6), (3.7), (3.8) và (3.10). ta có :

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial\eta^2} \quad (3.12)$$

$$\theta(0, \eta, \tau) = \exp(b_1\eta + c_1\tau)f_1(\eta, \tau) \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\eta} - b_1\theta = 0 \quad \text{với } \eta = 0 \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\eta} + b_1\theta = 0 \quad \text{với } \eta = 1 \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\xi} + a_1\theta = 0 \quad \text{với } \xi = l_o \quad (3.16)$$

hoặc

$$\theta(l_o, \eta, \tau) = \exp(-a_1 l_o + b_1\eta + c_1\tau) f_2(\eta, \tau) \quad (3.17)$$

$$\theta(\xi, \eta, 0) = \exp(-a_1\xi + b_1\eta) f(\xi, \eta) \quad (3.18)$$

Nghiệm của bài toán (3.12), (3.13), (3.14), (3.15) (3.16), (3.18) theo [2] có dạng

$$\theta(\xi, \eta, \tau) = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn}\Big\{\int_0^1\int_0^{l_o} \exp(-a_1x + b_1y)\, f(x, y)\, \varphi_m(x)\, \psi_n(y)\, dxdy +$$

$$+ \alpha_m \int_0^{\tau}\int_0^1 e^{b_1y} f_1(y, t)\, \psi_n(y) e^{\lambda_{mn}t} dydt\Big\} \exp(c_1 - \lambda_{mn})\, \tau\varphi_m(\xi)\, \psi_n(\eta) \quad (3.19)$$

trong đó : $A_{mn} = \dfrac{4\beta_n^2(a_1^2 + \alpha_m^2)}{(2b_1 + b_1^2 + \beta_n^2)\,[a_1 + l_o(a_1^2 + \alpha_m^2)]}$, $\lambda_{mn} = c_1^2 + \alpha_m^2 + \beta_n^2$,

α_m là dãy nghiệm dương của phương trình : $\mathrm{tg}\, l_o\alpha_m = -\alpha_m/a_1$ $(m = 1, 2, \ldots)$; β_n là dãy nghiệm dương của phương trình :

$\mathrm{tg}\beta_n = \beta_n/b_1$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$; $\varphi_m(\xi) = \sin\alpha_m\xi$, $\psi_n(\eta) = \cos\beta_n\eta + \dfrac{\beta_1}{\beta_n}\sin\beta_n\eta$.

Thay (3.19) vào (3.11), ta có nghiệm bài toán tương ứng

$$C(\xi, \eta, \tau) = \exp(a_1\xi - b_1\eta) \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn}\Big\{\int_0^1\int_0^{l_o} \exp(-a_1x + b_1y)\, f(x, y)\, \varphi_m(x)\, \psi_n(y) dxdy +$$

$$+ \alpha_m \int_0^{\tau}\int_0^1 e^{b_1y} f_1(y, t) e^{\lambda_{mn}t} \psi_n(y) dydt\Big\}\, e^{-\lambda_{mn}\tau} \varphi_m(\xi)\psi_n(\eta) \quad (3.20)$$

Còn nghiệm của bài toán (3.2), (3.4), (3.5), (3.6), (3.8) và (3.10) cũng theo phương pháp của [2, 3] sẽ có dạng :

$$C(\xi, \eta, \tau) = \exp(a_1\xi - b_1\eta) \sum_{m,n=1}^{\infty} B_n \left\{ \int_0^1 \int_0^{l_o} \exp(-a_1x + b_1y) f(x, y) \varphi_m^{(1)}(x) \Psi_n(y) dx dy + \right.$$

$$\left. + \frac{l_o}{\pi m} \int_0^{\tau} \int_0^1 [f_1(y, t) - (-1)^m e^{-a_1 l_o} f_2(y, t)] e^{b_1 y} e^{\lambda_{mn}^{(o)} t} \psi_n(y) dy dt \right\} \times$$

$$\times e^{-\lambda_{mn}^{(o)}\tau} \varphi_m^{(1)}(\xi) \psi_n(\eta) \qquad (3.21)$$

trong đó

$$B_n = \frac{4\beta_n^2}{l_o(2b_1 + b_\tau^2 + \beta_n^2)}, \quad \lambda_{mn}^{(o)} = \beta_n^2 + \left(\frac{m\pi}{l_o}\right)^2 + C_1, \quad \varphi_m^{(1)}(\xi) = \sin\frac{m\pi}{l_o}\xi$$

Nếu trong (3.20), (3.21), thay (ξ, η, τ) bởi (x, y, t) từ (3.1) ta hoàn toàn tìm được qui luật phân bố hợp chất thỏa mãn các điều kiện của bài toán đặt ra trong miền $\Omega_{l,h}$

§ 4. NHẬN XÉT

Từ phép biến đổi (3.1), suy ra : nếu $a \to 0$ thì :

$$\xi = \frac{1}{u_o}\sqrt{\frac{K}{\beta}}\frac{x}{h}, \quad \eta = \frac{y}{h}, \quad \tau = \frac{K}{h^2}t \qquad (4.1)$$

và từ (3.3), (3.9) nếu $a \to 0$ thì :

$$a_1 = \frac{h}{2\sqrt{K\beta}}, \quad l_o = \sqrt{\frac{K}{\beta}}\frac{l}{u_o h} \qquad (4.2)$$

Ngoài ra trong trường hợp $a \to 0$ thì $K_x = \beta u_o^2$ (4.3)

Vậy nếu thay (ξ, η, τ) bởi (x, y, t) từ (3.1) vào (3.20) sau đó cho $a \to 0$ ta sẽ thu được nghiệm của bài toán tương ứng trong trường hợp $u = u_o = \text{const}$, $K_x = \beta u_o^2 = \text{const}$ mà [2] đã xét. Từ đó nếu cho $l_o \to \infty$ $(l \to \infty)$ thì kết quả thu được sẽ trở về trường hợp của [2, 3, 4].

Vậy có thể xem bài toán trên đây là một trường hợp mở rộng của bài toán mà [2, 3, 4] đã xét.

§ 5. VÍ DỤ

Xét trường hợp

$$\omega = 0, \quad f(x, y) = 0, \quad f_2(y, t) = 0, \quad f_1(y, t) = c_o\left(\frac{1}{2}h^3 - \frac{3}{2}hy^2 + y^3\right).$$

$u_o = 2{,}16$ (m/s), $a = 0{,}1$, $h = 12$ (m), $l_o = 35$, $K = 10^{-4}$

Kết quả tính toán trên máy Mocintosh (tính theo công thức (3.21))

ξ	1,8450	2,7320	2,8990	3,4260	5,0070	7,1150
C/C_o	1,1613	0,8660	0,8493	0,7286	0,6740	0,5450
	$\eta = 0{,}1667$			$\tau = 0{,}6940$		

η	0,1669	0,3333	0,5000	0,6667	0,8333	1,0000
C/C_0	0,1613	0,1531	0,1429	0,1330	0,1255	0,1226
	$\xi = 1,8450$			$\tau = 0,0694$		

τ	0,0000	0,6940	1,3880	2,0830	2,7780	3,4720
C/C_0	0,0000	1,1613	1,1827	2,2281	2,5080	2,7096
	$\xi = 1,8450$			$\eta = 0,1667$		

§6. KẾT LUẬN

Nếu vận tốc dòng ngoài thay đổi theo quy luật (2.5), hệ số khuếch tán thỏa mãn quy luật (2.3), (2.4) thì phân bố nồng độ hợp chất trong miền dòng chảy đang xét có thể tính theo công thức (3.20) hoặc (3.21) và từ đó có thể xét cho dòng chảy là nửa giải vô hạn [2, 3, 4].

Các phân bố đã tìm được có thể sử dụng để tìm quy luật phân bố hợp chất trong các bể lắng, phù sa, muối trong sông, kênh.

Qua ví dụ đã xét ta thấy kết quả đã thu được phù hợp với quy luật phân bố hợp chất trong dòng chảy tự nhiên : tại một mặt cắt ở độ sâu xác định nồng độ tăng theo thời gian. Tại một thời điểm xác định ở một mặt cắt nào đó phân bố hợp chất tăng dần theo chiều sâu. Tại một độ sâu và thời điểm xác định, phân bố giảm theo chiều dài dòng chảy.

Địa chỉ
Trường đại học Tổng hợp HN

Nhận ngày 21-3-1987

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. LƯU CÔNG ĐÀO, TRẦN VĂN CÚC. Bài toán khuếch tán rối hợp chất trong kênh có mực nước thay đổi. Tạp chí KHKT số 11 + 12, 1985.
2. TRẦN VĂN CÚC. Về một bài toán khuếch tán rối hợp chất. Tạp chí Cơ học số 1, 1987.
3. TRẦN VĂN CÚC. Về một bài toán khuếch tán rối hợp chất. Tạp chí KHKT trường đại học tổng hợp Hà nội (đã nhận đăng).
4. NGUYEN VAN GIA. Turbulent diffusion of suspended sediment in open channel flow. Boundary value problem, solution and experimental date Disertation, Warsawa, 1983.
5. Salivity intrusion in the Chao phya and mae Klong rivers. Prepared by Asian institute of technology Bangkok. March 1978.
6. МАККАВЕЕВ В. М. Гидравлика. Москва, 1940.
7. КОЛЯКОВ Н.С., ГАЙНЕР Э.Б., СМИРНОВ М.М.Основы дифференциальные уравнения математической физики. Москва, 1962.
8. МОНИН А.С., ЯГЛОМ А. М. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Москаа, 1965.

RÉSUMÉ

SUR UN PROBLÈME DE LA DIFFUSION TURBULENT DES COMPOSITIONS

La solution du problème qu'on a posé est apte pour compter la concentration des compositions dans lès fleuves et canaux. En cas particulier on recoit des résultats que certains auteurs ont obtenus.