Tạp chí CƠ HỌC, tập XII, 1990, số 4 (16 — 21)

TỰ CHẤN CỦA DÂY CÓ MỘT BỘ TẮT CHẤN ĐỘNG LỰC

NGUYỄN VĂN ĐÌNH

ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong [1,2] đã khảo sát các bộ tắt chấn động lực mạnh và yếu đặt vào dây chịu kích động tự chấn yếu. Hàm Đirắc được dùng để thể hiện tác dụng của bộ tắt chấn vào dây ; dạng dao động riêng của hệ dây - bộ tắt chấn được khai triển thành cấp vô hạn theo các dạng dao động riêng của dây. Bài báo này xét bộ tắt chấn động lực mạnh, dạng dao động riêng của hệ được tìm ở dạng giới nội, phương pháp trung bình tỏ ra thuận lợi nếu hạn chế ở xấp xỉ thứ nhất không hoàn chỉnh nhờ một điều chỉnh nhỏ khi đổi biến.

1. HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN DAO ĐỘNG

Khảo sát dây mềm đồng chất $OA = \ell$, khối lượng đơn vị dài μ, nằm ngang với sức căng k và chịu kích động yếu phân bố trên dây và tác dụng theo phương thẳng đứng. Tại B cách O đoạn OB = b có đặt bộ tắt chấn động lực là khối lượng m treo ở đầu lò so độ cứng c, hệ số cản nhớt λ, hệ phương trình vi phân dao động là:

$$\mu\frac{\partial^2 y^{(1)}}{\partial t^2} - k\frac{\partial^2 y^{(1)}}{\partial x^2} = \varepsilon R\Big(\frac{\partial y^{(1)}}{\partial t}\Big), \qquad o \le x \le b \tag{1.1}$$

$$\mu\frac{\partial^2 y^{(2)}}{\partial t^2} - k\frac{\partial^2 y^{(2)}}{\partial x^2} = \varepsilon R\Big(\frac{\partial y^{(2)}}{\partial t}\Big), \qquad b \le x \le \ell \tag{1.2}$$

$$m\ddot{z} + c\big(z - y(b,t)\big) = -\varepsilon\lambda\Big(\dot{z} - \frac{\partial y(b,t)}{\partial t}\Big) \tag{1.3}$$

thỏa mãn điều kiện biên:

$$y^{(1)}(0,t) = \frac{\partial^2 y^{(1)}(0,t)}{\partial x^2} = y^{(2)}(\ell,t) = \frac{\partial^2 y^{(1)}(\ell,t)}{\partial x^2} = 0 \tag{1.4}$$

và điều kiện liên hợp tại nút B gồm điều kiện liên tục:

$$y^{(1)}(b,t) = y^{(2)}(b,t) = y(b,t) \tag{1.5}$$

cùng với điều kiện cân bằng tại từng thời điểm tại nút đó (giữa hai sức căng của hai nhánh dây và tổng hai lực đàn hồi và cản nhớt ở bộ tắt chấn):

$$c\big(z - y(b,t)\big) + \varepsilon\lambda\Big(\dot{z} - \frac{\partial y(b,t)}{\partial t}\Big) = k\Big(\frac{\partial y^{(1)}(b,t)}{\partial x} - \frac{\partial y^{(2)}(b,t)}{\partial x}\Big) \tag{1.6}$$

trong đó x, hoành độ chạy trên dây $(0 \le x \le \ell)$, $y^{(1)}$, $y^{(2)}$ hai hàm của hai biến (x,t) liên tục cùng với các đạo hàm riêng của chúng theo t và theo x tương ứng trong các khoảng $(0 \le x \le b)$ và $(b \le x \le \ell)$; $y(b,t)$, $\dfrac{\partial y(b,t)}{\partial t}$ - giá trị chung tại thời điểm t và tại $x = b$ của hai hàm $y^{(1)}$, $y^{(2)}$ và các đạo hàm riêng bậc nhất của chúng theo t; $\dfrac{\partial y^{(1)}(b,t)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial y^{(2)}(b,t)}{\partial x}$ - giá trị tại thời điểm t và tại $x = b$ của các đạo hàm riêng bậc nhất theo x của hai hàm $y^{(1)}$, $y^{(2)}$; z, $\dot{z}$, $\ddot{z}$ - hàm $z(t)$ và các đạo hàm cấp một và hai của nó theo t; ε ký hiệu để chỉ các đại lượng bé; $R(\dfrac{\partial y}{\partial t})$ - hàm kích động tự chấn dạng:

$$R\Big(\frac{\partial y}{\partial t}\Big) = h_1\Big(\frac{\partial y}{\partial t}\Big) - h_3\Big(\frac{\partial y}{\partial t}\Big)^3 \tag{1.7}$$

h_1, h_3 hai hằng số dương.

2. DAO ĐỘNG RIÊNG

Cho $\varepsilon = 0$ hệ (1.1) - (1.6) suy biến thành hệ mô tả dao động riêng của hệ dây - bộ tắt chấn:

$$\mu\frac{\partial^2 y_0^{(1)}}{\partial t^2} - k\frac{\partial^2 y_0^{(1)}}{\partial x^2} = 0, \qquad 0 \le x \le b \tag{2.1}$$

$$\mu\frac{\partial^2 y_0^{(2)}}{\partial t^2} - k\frac{\partial^2 y_0^{(2)}}{\partial x^2} = 0, \qquad b \le x \le \ell \tag{2.2}$$

$$m\ddot{z}_0 + c\big(z_0 - y_0(b,t)\big) = 0 \tag{2.3}$$

$$y_0^{(1)}(0,t) = \frac{\partial^2 y_0^{(1)}(0,t)}{\partial x^2} = y_0^{(2)}(b,t) = \frac{\partial^2 y_0^{(2)}(\ell,t)}{\partial x^2} = 0 \tag{2.4}$$

$$y_0^{(1)}(b,t) = y_0^{(2)}(b,t) = y_0(b,t) \tag{2.5}$$

$$c\big(z_0 - y_0(b,t)\big) = k\Big(\frac{\partial y_0^{(1)}(b,t)}{\partial x} - \frac{\partial y_0^{(2)}(b,t)}{\partial x}\Big) \tag{2.6}$$

trong đó chỉ số 0 dùng để phân biệt các hàm mô tả dao động riêng với các hàm mô tả dao động ở hệ kích động.

Theo phương pháp phân ly biến [3], đặt:

$$y_0^{(1)}(x,t) = Y^{(1)}(x)\cos\omega t, \qquad 0 \le x \le b \tag{2.7}$$

$$y_0^{(2)}(x,t) = Y^{(2)}(x)\cos\omega t, \qquad b \le x \le \ell \tag{2.8}$$

$$z_0(t) = Z\cos\omega t \tag{2.9}$$

trong đó ω tần số riêng, $Y^{(1)}(x)$, $Y^{(2)}(x)$ và Z - hai hàm của x (liên tục cùng với các đạo hàm của chúng trong các khoảng đã biết) và hệ số hằng xác định dạng dao động riêng.

Thay (2.7) - (2.9) vào (2.1) - (2.6) thì được:

$$\mu\omega^2 Y^{(1)} + k\frac{d^2Y^{(1)}}{dx^2} = 0, \qquad 0 \le x \le b \tag{2.10}$$

$$\mu\omega^2 Y^{(2)} + k\frac{d^2Y^{(2)}}{dx^2} = 0, \qquad b \le x \le \ell \tag{2.11}$$

$$Z(c - m\omega^2) = cY(b) \tag{2.12}$$

$$Y^{(1)}(0) = \frac{d^2Y^{(1)}(0)}{dx^2} = Y^{(2)}(b) = \frac{d^2Y^{(2)}(b)}{dx^2} = 0 \tag{2.13}$$

$$Y^{(1)}(b) = Y^{(2)}(b) = Y(b) \tag{2.14}$$

$$c\big(Z - Y(b)\big) = k\Big(\frac{dY^{(1)}(b)}{dx} - \frac{dY^{(2)}(b)}{dx}\Big) \tag{2.15}$$

Hệ phương trình (2.10), (2.11) và các điều kiện (2.13) thỏa mãn bởi các hàm:

$$Y^{(1)}(x) = \alpha\sin\nu x, \qquad Y^{(2)}(x) = \beta\sin\nu(\ell - x) \tag{2.16}$$

trong đó α, β các hệ số chưa xác định; $\nu = \omega\sqrt{\mu/k}$

Thay (2.16) vào (2.12), (2.14), (2.15) chúng ta được hệ phương trình đại số bậc nhất đẳng cấp đối với α, β, Z

$$\begin{aligned} \alpha\sin\nu b - \beta\sin\nu(\ell - b) &= 0 \\ c\alpha\sin\nu b - Z(c - m\omega^2) &= 0 \\ (k\nu\cos\nu b + c\sin\nu b)\alpha + k\nu b\cos\nu(\ell - b) - cZ &= 0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Điều kiện để hệ này có nghiệm không tầm thường là:

$$\begin{vmatrix} \sin\nu b & -\sin\nu(\ell - b) & 0 \\ c\sin\nu b & 0 & m\omega^2 - c \\ c\sin\nu b + k\nu\cos\nu b & k\nu\cos\nu(\ell - b) & -c \end{vmatrix} = 0 \tag{2.18}$$

hay

$$(c - m\omega^2)\sqrt{\mu k}\sin\omega\ell\sqrt{\mu/k} = cm\omega\sin\omega b\sqrt{\mu/k}\sin\omega(\ell - b)\sqrt{\mu/k} \tag{2.19}$$

Đó là phương trình tần số riêng cho một dãy vô hạn tần số riêng ω_n $(n = 1, 2, \dots)$

Chú ý rằng dao động riêng có điểm góc tại B vì tại đó các đạo hàm $\dfrac{dY_r^{(1)}(b)}{dx}$ và $\dfrac{dY_r^{(1)}(b)}{dx}$ không cùng giá trị.

Mặt khác, tần số riêng của hệ (dây - bộ tắt chấn) có thể trùng với tần số riêng của bộ tắt chấn hoặc của dây (không tắt chấn).

Thực vậy, giả thiết b và ℓ khả ước, (ℓ/s) là đoạn ước chung lớn nhất của hai đoạn b và $\ell - b$. Khi đó, các tần số riêng thứ $r \cdot s$ $(r = 1, 2 \dots)$ của dây (không tắt chấn) cũng là tần số riêng của hệ dây - bộ tắt chấn và trong dao động riêng, điểm treo B là nút, bộ tắt chấn đứng im. Nếu tần số riêng của bộ tắt chấn lại trùng với tần số riêng thứ $r \cdot s$ của dây thì tần số đó là tần số kép của hệ; ngoài dạng dao động riêng vừa nói, còn dạng khác độc lập cùng tần số trong đó đoạn BA (OB) đứng im, đoạn OB (BA) dao động cùng bộ tắt chấn.

Tần số riêng của bộ tắt chấn còn là tần số riêng của hệ khi nó cũng là tần số riêng của đoạn dây OB (hoặc BA); trong dao động riêng, đoạn OB (BA) dao động cùng bộ tắt chấn, đoạn BA (OB) đứng im.

Chú ý rằng tính trực giao của các dạng dao động riêng cho bởi hệ thức:

$$\int_0^b \mu Y_r^{(1)} Y_s^{(1)} dx + \int_b^\ell Y_r^{(2)} Y_s^{'(2)} dx + m Z_r Z_s = \begin{cases} 0 & \text{khi} \quad r \neq s \\ M_s & " \quad r = s \end{cases} \tag{2.20}$$

Hệ thức trực giao vẫn đúng với tần số kép bằng cách chọn dạng dao động thích hợp.

3. TỰ CHẤN ĐƠN TẦN

Trở lại hệ kích động (1.1) - (1.6), chúng ta thành lập hệ phương trình trung bình cho chế độ tự chấn đơn tần gần một tần số riêng - ký hiệu ω_1 mà chúng ta giả thiết là đơn và không có cộng hưởng với các tần số khác của hệ.

Nếu dừng lại ở xấp xỉ thứ nhất không hoàn chỉnh, có thể đặt:

$$y^{(1)}(x,t) = Y_1^{(1)}(x) \cdot T_1(t), \qquad 0 \leq x \leq b \tag{3.1}$$

$$y^{(2)}(x,t) = Y_1^{(2)}(x) \cdot T_1(t), \qquad b \leq x \leq \ell \tag{3.2}$$

$$z(t) = Z_1 \cdot T_1(t) - \varepsilon \frac{\lambda}{c} \big(Z_1 - Y_1(b)\big) \dot{T}_1(t) \tag{3.3}$$

trong đó T_1, $\dot{T}_1$, $\ddot{T}_1$ là hàm cần xác định theo thời gian và các đạo hàm của nó.

Các điều kiện (1.4), (1.5) được thỏa mãn còn điều kiện (1.6) thỏa mãn sai kém $0(\varepsilon^2)$.

Đem (3.1) - (3.3) thay vào (1.1) - (1.3) chúng ta được

$$\mu Y_1^{(1)} \ddot{T}_1 - k \frac{d^2 Y_1^{(1)}}{dx^2} T_1 = \varepsilon R_1, \qquad 0 \leq x \leq b \tag{3.4}$$

$$\mu Y_1^{(2)} \ddot{T}_1 - k \frac{d^2 Y_1^{(2)}}{dx^2} T_1 = \varepsilon R_2, \qquad 0 \leq x \leq b \tag{3.5}$$

$$m Z_1 \ddot{T}_1 + c\big(Z_1 - Y_1(b)\big) T_1 = \varepsilon g \tag{3.6}$$

trong đó R_1, R_2 - các hàm $R\Big(\dfrac{\partial y^{(1)}}{\partial t}\Big)$, $R\Big(\dfrac{\partial y^{(2)}}{\partial t}\Big)$ sau khi thay $\dfrac{\partial y^{(1)}}{\partial t}$, $\dfrac{\partial y^{(2)}}{\partial t}$ bởi biểu thức của chúng suy từ (3.1), (3.2) và

$$g = \frac{\lambda m}{c} \big(Z_1 - Y_1(b)\big) \ddot{T}_1 \tag{3.7}$$

Tương ứng nhân (3.4), (3.5), (3.6) với $Y_1^{(1)}$, $Y_1^{(2)} Z_1$, rồi cộng lại, chú ý đến hệ thức (2.20) khi $r = s = 1$, chúng ta được:

$$\ddot{T}_1 + \omega_1^2 T_1 = \frac{\varepsilon}{M_1} f_1 \tag{3.8}$$

trong đó:

$$f_1 = \int_0^b R_1 Y_1^{(1)} dx + \int_b^\ell R_2 Y_1^{(2)} dx + g Z_1 \tag{3.9}$$

Đến đây như bình thường đặt:

$$T_1 = a_1 \cos \psi_1, \qquad \dot{T}_1 = -a_1 \omega_1 \sin \psi_1 \tag{3.10}$$

Hệ phương trình trung bình là:

$$\begin{aligned}
\dot{a}_1 &= \frac{-\varepsilon}{M_1\omega_1}\langle f_1 \sin\psi_1\rangle = \frac{\varepsilon a_1}{2M_1}\left\{h_1^* - \lambda\big(Z_1 - Y_1(b)\big)^2 - \frac{3}{4}h_3^* a_1^2\omega_1^2\right\} \\
\dot{\psi}_1 &= \omega_1 - \frac{\varepsilon}{M_1\omega_1 a_1}\langle f_1 \cos\psi_1\rangle = \omega_1
\end{aligned} \tag{3.11}$$

trong đó $\langle\ \ \rangle$ là ký hiệu trung bình và:

$$h_1^* = h_1\Big[\int_0^b Y_1^{(1)^2}dx + \int_b^\ell Y_1^{(2)^2}dx\Big], \quad h_3^* = h_3\Big[\int_0^b Y_1^{(1)^4}dx + \int_b^\ell Y_1^{(2)^4}dx\Big] \tag{3.12}$$

Đó là những phương trình và biểu thức đã thu được trong [2].

Bây giờ giả thiết tần số riêng ω_1 là kép nhưng không xẩy ra cộng hưởng với các tần số riêng khác. Ký hiệu $Y_\xi^{(j)}$ $(\xi = 1, 2)$ - hai dạng dao động riêng cùng tương ứng với ω_1 được chọn sao cho các hệ thức trực giao (2.20) được thỏa mãn.

Đặt :

$$y^{(1)}(x,t) = \sum_{\xi=1}^{2} Y_\xi^{(1)}(x)T_\xi(t), \qquad 0 \le x \le b \tag{3.13}$$

$$y^{(2)}(x,t) = \sum_{\xi=1}^{2} Y_\xi^{(2)}(x)T_\xi(t), \qquad b \le x \le \ell \tag{3.14}$$

$$z(t) = \sum_{\xi=1}^{2}\Big\{Z_\xi T_\xi(t) - \varepsilon\frac{\lambda}{c}\big(Z_\xi - Y_\xi(b)\big)\dot{T}_\xi(t)\Big\} \tag{3.15}$$

trong đó $T_1(t)$, $T_2(t)$ là những hàm theo thời gian cần xác định.

Các điều kiện (1.4), (1.5) thỏa mãn, các điều kiện (1.6) thỏa mãn sai kém $0(\varepsilon^2)$, hệ phương trình (1.1) - (1.3) trở thành:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\xi=1}^{2}\Big\{\mu Y_\xi^{(1)}\ddot{T}_\xi - k\frac{d^2Y_\xi^{(1)}}{dx^2}T_\xi\Big\} = \varepsilon R_1, \qquad 0 \le x \le b \\
&\sum_{\xi=1}^{2}\Big\{\mu Y_\xi^{(2)}\ddot{T}_\xi - k\frac{d^2Y_\xi^{(2)}}{dx^2}T_\xi\Big\} = \varepsilon R_2, \qquad b \le x \le \ell \\
&\sum_{\xi=1}^{2}\Big\{mZ_\xi\ddot{T}_\xi + c\big(Z_\xi - Y_\xi(b)\big)T_\xi\Big\} = \varepsilon g
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Với hệ thức trực giao, hệ (3.16) biến đổi thành:

$$\ddot{T}_1 + \omega_1^2 T_1 = \frac{\varepsilon}{M_1}f_1, \quad \ddot{T}_2 + \omega_1^2 T_2 = \frac{\varepsilon}{M_2}f_2 \tag{3.17}$$

trong đó

$$g = \frac{\lambda m}{c}\sum_{\xi=1}^{2}\big(Z_\xi - Y_\xi(b)\big)\dddot{T}_\xi, \quad f_\xi = \int_0^b R_1 Y_\xi^{(1)}dx + \int_b^\ell R_2 Y_\xi^{(2)}dx + gZ_\xi \tag{3.18}$$

Đến đây như bình thường đặt:

$$\begin{aligned} T_1 &= a_1 \cos\psi_1, & \dot{T}_1 &= -a_1\omega_1 \sin\psi_1 \\ T_2 &= a_2 \cos\psi_2, & \dot{T}_2 &= -a_2\omega_1 \sin\psi_2 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Theo các biến a_1, a_2, ψ_1, ψ_2, hệ phương trình (3.17) thành:

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= -\frac{\varepsilon}{M_1\omega_1}\langle f_1 \sin\psi_1\rangle, & \dot{\psi}_1 &= \omega_1 - \frac{\varepsilon}{M_1\omega_1 a_1}\langle f_1 \cos\psi_1\rangle \\ \dot{a}_2 &= -\frac{\varepsilon}{M_2\omega_1}\langle f_2 \sin\psi_2\rangle, & \dot{\varphi} &= -\frac{\varepsilon}{M_1\omega_1 a_1}\langle f_1 \cos\psi_1\rangle + \frac{\varepsilon}{M_2\omega_1 a_2}\langle f_2 \cos\psi_2\rangle \end{aligned} \tag{3.20}$$

trong đó $\varphi = \psi_1 - \psi_2$

Biểu thức cuối cùng và việc phân tích hệ (3.20) khá phức tạp nên chúng tôi dừng lại ở việc thiết lập hệ đó.

KẾT LUẬN

Qua nội dung được trình bày, có thể thấy việc biểu diễn dạng dao động riêng bởi hàm liên tục khả vi từng khúc cho phép thấy rõ điểm góc trong dao động ngay trong xấp xỉ thứ nhất và với một điều chỉnh nhỏ trong việc đổi biến, phương pháp trung bình vẫn tỏ ra thuận lợi.

Địa chỉ:
Viện Cơ Viện KHVN

Nhận ngày 3/8/1990

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Văn Đạo. Bộ tắt chấn động lực ở hệ tự chấn với tham số phân bố. Tạp chí Cơ học, số 4, 1985.
2. Nguyễn Văn Đạo, Nguyễn Văn Đình. Dynamic absorber for systems with distributed parameters. Proceedings of NCSR Vietnam, vol. 2, 1990.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. Государственное издательство, М., 1972.

РЕЗЮМЕ

АВТОКОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ С ОДНИМ ДИНАМИЧЕСКИМ ГАСИТЕЛЕМ

Рассматриваны автоколебания струны с одним динамическим гасителем. Предположены собственны формы в виде непрерывных кусочно-дифференцированных функций в каждых промежутках. Для того, чтобы был использован усредненый метод, в данной статье, предложены некоторые изменения в формулах преобразования переменных.