

VA CHẠM ĐỌC CỦA HAI THANH ĐÀN HỒI VỚI LỰC CẢN ĐÀN NHỚT

NGUYỄN THỨC AN, KHỔNG DOẢN ĐIỀN

Cơ sở của lý thuyết va chạm đọc của hai thanh đàn hồi đã được phát triển và hoàn thiện gần một trăm năm nay. Các kết quả này đã được nêu trong các tài liệu [1, 2, 3, 4].

Nội dung bài báo này nghiên cứu bài toán về sự va chạm của hai thanh đàn hồi với bộ phận giảm chấn và đầu kia của thanh gặp sức cản đàn nhớt mà ở [4] chưa xét đến.

1. PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG CỦA THANH VÀ CÁC ĐIỀU KIỆN CỦA BÀI TOÁN

Giả sử thanh thứ nhất có chiều dài l_1 chuyển động với vận tốc v_1 và va chạm vào thanh thứ hai đứng yên có chiều dài l_2 qua bộ giảm chấn gắn chặt vào thanh thứ hai có độ cứng K_1 . Giả sử $l_1 < l_2$. Đầu kia của thanh thứ hai chịu lực cản đàn nhớt. Ta chọn gốc tọa độ cố định O_1 trùng với đầu trái thanh thứ nhất trước khi va chạm và trục O_1x_1 hướng dọc theo thanh từ trái sang phải. Gốc tọa độ cố định O_2 trùng với đầu phải của thanh thứ hai và trục O_2x_2 hướng từ phải sang trái. Gốc thời gian kể từ khi hai thanh bắt đầu va chạm. Với giả thiết kích thước thiết diện ngang nhỏ so với chiều dài của thanh. Lý thuyết sóng một chiều được áp dụng vào bài toán này.

Phương trình chuyển động của thanh:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = a_i^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} \quad (1.1)$$

Trong đó:

a_i - Vận tốc truyền sóng đàn hồi trong thanh

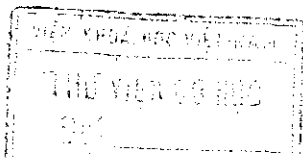
u_i - Dịch chuyển các thiết diện của mỗi thanh; $i = 1, 2$

Nghiệm tổng quát của phương trình (1.1) theo D'alambert là:

$$u_i(t, \frac{x_i}{a_i}) = \varphi_i(t - \frac{x_i}{a_i}) + \psi_i(t + \frac{x_i}{a_i}) \quad (1.2)$$

Điều kiện đầu của bài toán với $t = 0$ ta có:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = v_1, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0. \quad (1.3)$$



Điều kiện biên của bài toán tại thiết diện $x_1 = \ell_1, x_2 = \ell_2$ ta có:

$$E_1 F_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = E_2 F_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -K_1(u_1 - u_2) \quad (1.4)$$

Điều kiện biên của bài toán tại thiết diện $x_2 = 0$ ta có:

$$E_2 F_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = K u_2 + \mu \frac{\partial u_2}{\partial t} \quad (1.5)$$

trong đó K và μ là hệ số cản đàn hồi và cản nhớt ở đầu thanh thứ hai.

Điều kiện biên của bài toán tại $x_1 = 0$ thì

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0 \quad (1.6)$$

2. XÁC ĐỊNH HÀM SÓNG

Để xác định ứng suất, vận tốc ... tại mỗi thiết diện của thanh trong thời gian va chạm, ta phải biết các hàm sóng

$$\varphi_1'(t - \frac{x_1}{a_1}), \quad \psi_1'(t + \frac{x_1}{a_1}), \quad \varphi_2'(t - \frac{x_2}{a_2}), \quad \psi_2'(t + \frac{x_2}{a_2})$$

ở mỗi thiết diện của thanh trong thời gian va chạm. Theo điều kiện đầu (1.3) hiện tượng va chạm chưa xảy ra thì các sóng $\varphi_2'(t - \frac{x_2}{a_2}), \psi_2'(t + \frac{x_2}{a_2})$ còn chưa xảy ra ở trong thanh thứ hai.

Ở trong thanh thứ nhất ta có:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \varphi_1'(-\frac{x_1}{a_1}) + \psi_1'(\frac{x_1}{a_1}) = v_1 \quad (a)$$

Mặt khác

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{1}{a_1} \left[-\varphi_1'(-\frac{x_1}{a_1}) + \psi_1'(\frac{x_1}{a_1}) \right] = 0$$

Hay

$$\varphi_1'(-\frac{x_1}{a_1}) = \psi_1'(\frac{x_1}{a_1}) \quad (b)$$

Từ (a) và (b) ta có

$$\varphi_1'(-\frac{x_1}{a_1}) = \psi_1'(\frac{x_1}{a_1}) = \frac{v_1}{2} \quad (c)$$

Lý luận tương tự đối với thanh thứ hai ta có:

$$\varphi_2'(-\frac{x_2}{a_2}) + \psi_2'(\frac{x_2}{a_2}) = 0 \quad (d)$$

Từ (c) và (d) ta có:

$$\varphi_1'(Z_1) = \frac{v_1}{2}, \quad \varphi_2'(Z_2) = 0. \quad (2.1)$$

Với

$$-\frac{\ell_1}{a_1} < Z_1 < \frac{\ell_1}{a_1}; \quad -\frac{\ell_2}{a_2} < Z_2 < \frac{\ell_2}{a_2}$$

Khi thanh thứ nhất va chạm vào thanh thứ hai thì sóng $\psi_2'(t + \frac{x_2}{a_2})$ xuất hiện tại đầu thanh thứ hai và sóng $\psi_1'(t + \frac{\ell_1}{a_1})$ tại đầu ($x_1 = \ell_1$) của thanh thứ nhất cũng sẽ khác với nó trước khi va chạm.

Từ điều kiện (1.4) ta sẽ có:

$$\psi_1'(t + \frac{\ell_1}{a_1}) = \varphi_1(t - \frac{\ell_1}{a_1}) + C_2 \left[-\varphi_2'(t - \frac{\ell_2}{a_2}) + \psi_2(t + \frac{\ell_2}{a_2}) \right], \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \psi_2''(t + \frac{\ell_2}{a_2}) + (1 + C_2)C_1\psi_2'(t + \frac{\ell_2}{a_2}) &= 2C_1\varphi_1'(t - \frac{\ell_1}{a_1}) - \\ &- C_1(1 + C_2)\varphi_2'(t - \frac{\ell_2}{a_2}) + \varphi_2''(t - \frac{\ell_2}{a_2}). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Trong đó $C_1 = -\frac{a_2 K_1}{E_2 F_2}$; $C_2 = \frac{a_1 E_2 F_2}{a_2 E_1 F_1}$; E_1, F_1, E_2, F_2 là môđun đàn hồi và diện tích thiết diện ngang của thanh thứ nhất và thanh thứ hai.

Thay $t + \frac{\ell_2}{a_2} = Z_2$ và $C_1(1 - C_2) = \alpha$ vào (2.3) ta có phương trình sau:

$$\psi_2''(Z_2) + \alpha\psi_2'(Z_2) = 2C_1\varphi_1'(Z_2 - \frac{\ell_1}{a_1} - \frac{\ell_2}{a_2}) - C_1(1 + C_2)\varphi_2'(Z_2 - \frac{2\ell_2}{a_2}) + \varphi_2''(Z_2 - \frac{2\ell_2}{a_2}). \quad (2.4)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình có dạng:

$$\begin{aligned} \psi_2'(Z_2) &= C_i e^{-\alpha Z_2} + \\ &+ e^{-\alpha Z_2} \int e^{\alpha Z_2} \left[2C_1\varphi_1'(Z_2 - \frac{\ell_1}{a_1} - \frac{\ell_2}{a_2}) - C_1(1 + C_2)\varphi_2'(Z_2 - \frac{2\ell_2}{a_2}) + \varphi_2''(Z_2 - \frac{2\ell_2}{a_2}) \right] dZ_2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Trong đó C_i là các hằng số được xác định dựa vào tính liên tục của sóng $\psi_2'(Z_2)$ ở các thời điểm $t = \frac{2n\ell_1}{a_1}$ với điều kiện $T_1 = \frac{2\ell_1}{a_1} < T_2 = \frac{2\ell_2}{a_2}$ n là số tự nhiên.

Từ điều kiện biên (1.5) ta có:

$$-\varphi_2'(t) + \psi_2'(t) = K_2[\varphi_2(t) + \psi_2(t)] + \mu_1[\varphi_2'(t) + \psi_2'(t)] \quad (a)$$

Trong đó

$$K_2 = \frac{K}{E_2 F_2}, \quad \mu_1 = \frac{\mu}{E_2 F_2}$$

Phương trình (a) được viết

$$\varphi_2'(t) + \lambda\varphi_2(t) = \chi\psi_2'(t) - \lambda\psi_2(t) \quad (b)$$

Trong đó

$$\lambda = \frac{K_2}{1 + \mu_1}, \quad \chi = \frac{1 - \mu_1}{1 + \mu_1}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (b) là:

$$\varphi_2(t) = C_j e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} \int e^{\lambda t} [\chi \psi_2'(t) - \lambda \psi_2(t)] dt \quad (2.6)$$

Trong đó các hằng số C_j được xác định dựa vào tính liên tục của hàm sóng $\varphi_2(t)$ tại đầu thanh thứ hai với $x_2 = 0$, với các thời điểm:

$$\frac{\ell_2}{a_2} < t < \frac{2n\ell_1}{a_1} + \frac{\ell_2}{a_2} \dots$$

Sóng $\varphi_2(t - \frac{\ell_2}{a_2})$ sẽ được xác định ở trong thanh thứ hai.

Dựa vào điều kiện (1.6) ta có:

$$\varphi_1'(t) = \psi_1'(t) \quad (2.7)$$

Hàm sóng $\psi_1'(t + \frac{x_1}{a_1})$ được xác định từ điều kiện biên (1.4) hay (2.2), cho nên ta xác định được sóng $\psi_1'(t + \frac{x_1}{a_1})$ tại mọi thiết diện của thanh thứ nhất, do đó sẽ xác định được sóng $\psi_1'(t)$ tại đầu thanh thứ nhất ở thiết diện $x_1 = 0$. Từ hệ thức (2.7) ta xác định được sóng $\varphi_1'(t)$ tại đầu thanh thứ nhất ở thiết diện $x_1 = 0$ từ đó ta xác định được sóng $\varphi_1'(t - \frac{x_1}{a_1})$ ở mỗi thiết diện của thanh thứ nhất.

Sau khi xác định được các hàm sóng $\varphi_1'(t - \frac{x_1}{a_1})$, $\psi_1'(t + \frac{x_1}{a_1})$ và $\varphi_2'(t - \frac{x_2}{a_2})$, $\psi_2'(t + \frac{x_2}{a_2})$ tại mỗi thiết diện của hai thanh, sẽ tìm được ứng suất, biến dạng, vận tốc ở trong mỗi thanh, thời gian va chạm của hai thanh.

3. TÍNH TOÁN

Giả sử thời gian va chạm t_v ở trong khoảng $(2\frac{\ell_2}{a_2}, 4\frac{\ell_2}{a_2})$ với gốc thời gian va chạm kể từ khi hai thanh bắt đầu va chạm.

Xét trong khoảng thời gian $0 \leq t \leq 2\frac{\ell_1}{a_1}$ nếu ta đặt $Z_1 = t + \frac{\ell_1}{a_1}$, $Z_2 = t + \frac{\ell_2}{a_2}$ thì hệ thức (2.1) có dạng

$$\varphi_1'(Z_1 - 2\frac{\ell_1}{a_1}) = \frac{V_1}{2}, \quad \varphi_2'(Z_2 - 2\frac{\ell_2}{a_2}) = 0, \quad (3.1)$$

với

$$-\frac{\ell_1}{a_1} < Z_1 - 2\frac{\ell_1}{a_1} < \frac{\ell_1}{a_1}; \quad -\frac{\ell_2}{a_2} Z_2 - 2\frac{\ell_2}{a_2} < \frac{\ell_2}{a_2}$$

Theo (3.1) thì

$$\varphi_2'(Z_2 - 2\frac{\ell_2}{a_2}) = 0, \quad \varphi_1'(Z_1 - 2\frac{\ell_1}{a_1}) = \frac{v_1}{2}$$

Ta có sóng $\psi_2'(t + \frac{x_2}{a_2})$ trong miền 1 và 2 ở thanh thứ hai là:

$$\psi_2'(t + \frac{x_2}{a_2}) = -\frac{C_1 V_1}{2} \left[e^{-\alpha(t + \frac{x_2 - \ell_2}{a_2})} - 1 \right]. \quad (3.2)$$

Vậy sóng $\psi_1'(t + \frac{x_1}{a_1})$ ở miền 2 và 3 trong thanh 1 là:

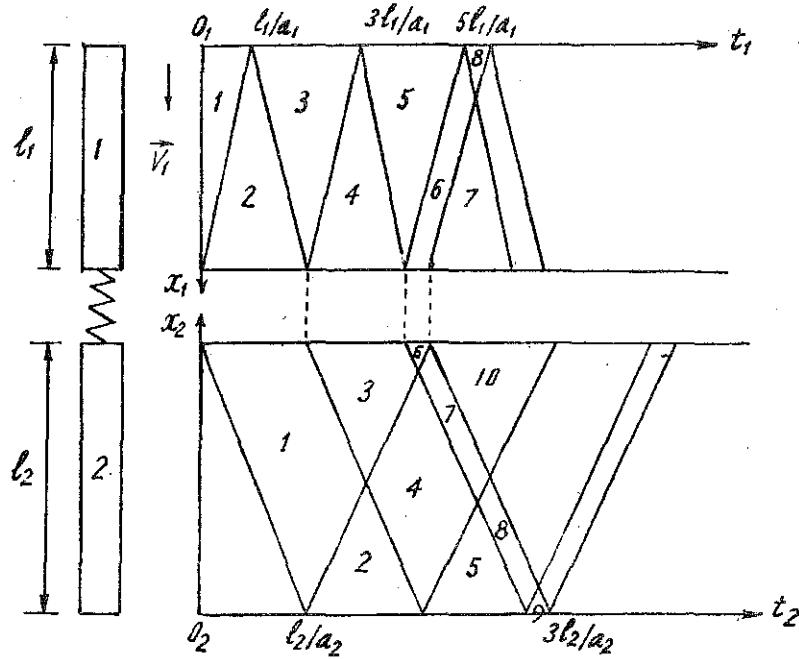
$$\psi_1'(t + \frac{x_1}{a_1}) = \frac{V_1}{2} - \frac{C_1 C_2 V_1}{\alpha} \left[e^{-\alpha(t + \frac{x_1}{a_1})} - 1 \right]$$

Sóng $\varphi_1'(t - \frac{x_1}{a_1})$ ở miền 3 và 4 trong thanh thứ nhất là:

$$\varphi_1'(t - \frac{x_1}{a_1}) = \frac{V_1}{2}$$

Vậy sóng $\varphi_1'(t - \frac{x_1}{a_1})$ ở miền 3 và 4 trong thanh thứ nhất là:

$$\varphi_1'(t - \frac{x_1}{a_1}) = \frac{V_1}{2} - \frac{C_1 C_2 V_1}{\alpha} \left[e^{-\alpha(t - \frac{x_1}{a_1})} - 1 \right]$$



Hình 1

Tại thiết diện $x_2 = \ell_2$ của thanh thứ hai với giả thiết sóng $\varphi_2'(t - \frac{x_2}{a_2})$ chưa xuất hiện tại thiết diện này.

Ta xác định được sóng $\psi_2'(t + \frac{x_2}{a_2})$ ở miền 3, 4 và 5 trong thanh thứ hai là:

$$\begin{aligned} \psi_2'(t + \frac{x_2}{a_2}) = & -\frac{C_1 V_1}{\alpha} e^{\alpha \frac{\ell_2}{a_2}} \left[1 - e^{2\alpha \frac{\ell_1}{a_1}} \right] e^{-\alpha(t + \frac{x_2}{a_2})} - \\ & - e^{-(t + \frac{x_2}{a_2} - 2\frac{\ell_1}{a_1} - \frac{\ell_2}{a_2})} \left[\frac{2C_1^2 C_2 V_1}{\alpha} e^{-\alpha \frac{\ell_2}{a_2}} \left(t + \frac{x_2}{a_2} - 2\frac{\ell_1}{a_1} - \frac{\ell_2}{a_2} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{C_1 V_1}{\alpha} \left(1 - \frac{2C_1}{C_2 - 1} \right) \right] + \frac{C_1 V_1}{\alpha} \left(1 - \frac{2C_1}{C_2 - 1} \right). \end{aligned}$$

Vây sóng $\psi'(t + \frac{x_1}{a_1})$ ở miền 4 và 5 trong thanh thứ nhất là:

$$\psi'_1(t + \frac{x_1}{a_1}) = \frac{V_1}{\alpha} \left\{ \left[\frac{\alpha}{2} + 2C_1C_2(C_1^2 + 1) \right] - C_1C_2 \left[e^{-\alpha(t + \frac{x_1}{a_1} - \frac{t_1}{a_1})} + (1 + 2C_1C_2) \left(t + \frac{x_1}{a_1} - 3\frac{t_1}{a_1} \right) e^{-\alpha(t + \frac{x_1}{a_1} - 2\frac{t_1}{a_1})} \right] - \frac{2C_1}{C_2 - 1} e^{-\alpha(t + \frac{x_1}{a_1} - 3\frac{t_1}{a_1})} \right\}.$$

Dựa vào điều kiện (1.6) ta có:

Sóng $\varphi'_1(t - \frac{x_1}{a_1})$ ở miền 5 và 6 trong thanh 1 là:

$$\varphi'_1(t - \frac{x_1}{a_1}) = \frac{V_1}{\alpha} \left\{ \left[\frac{\alpha}{2} + 2C_1C_2(C_1^2 + 1) \right] - C_1C_2 \left[e^{-\alpha(t - \frac{x_1}{a_1} - \frac{t_1}{a_1})} + (1 + 2C_1C_2) \left(t - \frac{x_1}{a_1} - 3\frac{t_1}{a_1} \right) e^{-\alpha(t - \frac{x_1}{a_1} - 2\frac{t_1}{a_1})} \right] - \frac{2C_1}{C_2 - 1} e^{-\alpha(t - \frac{x_1}{a_1} - 3\frac{t_1}{a_1})} \right\}.$$

Từ (3.2) ta có sóng $\psi'_2(t + \frac{x_2}{a_2})$ ở miền 1 và 2 trong thanh thứ hai

$$\psi'_2(t + \frac{x_2}{a_2}) = -\frac{C_1V_1}{\alpha} \left[e^{-\alpha(t + \frac{x_2 - a_2}{a_2})} - 1 \right]$$

Từ (2.6) ta có: Sóng $\varphi'_2(t - \frac{x_2}{a_2})$ ở các miền 2, 4, 7, 10 trong thanh thứ hai là

$$\begin{aligned} \varphi'_2(t - \frac{x_2}{a_2}) &= \frac{C_1V_1(\chi\alpha a_2 + \alpha^2\lambda a_2 + \lambda\alpha\ell_2)}{\alpha^2 a_2} e^{-\lambda(t - \frac{x_2}{a_2} - \frac{t_2}{a_2})} - \\ &- \frac{(\chi\alpha^2 + \lambda^2)C_1V_1}{\lambda\alpha^2(\lambda - \alpha)} \left[\lambda e^{-\lambda(t - \frac{x_2}{a_2} - \frac{t_2}{a_2})} - \alpha e^{-\alpha(t - \frac{x_2}{a_2} - \frac{t_2}{a_2})} \right] - \\ &- C_1V_1 \left[1 + \frac{\lambda\ell_2}{a_2} e^{-\lambda(t - \frac{x_2}{a_2} - \frac{t_2}{a_2})} \right]. \end{aligned}$$

Ta đưa vào các công thức (2.2), (2.3), (2.6) và điều kiện (1.6) cùng với các kết quả tính toán ở trên có, sẽ xác định được biểu thức cụ thể của các hàm sóng $\varphi'_1(t - \frac{x_1}{a_1})$, $\psi'_1(t + \frac{x_1}{a_1})$, $\varphi'_2(t - \frac{x_2}{a_2})$ và $\psi'_2(t + \frac{x_2}{a_2})$ ở các miền tiếp theo trong mỗi thanh.

Từ đó có thể xác định được biểu thức cụ thể của biến dạng, ứng suất và vận tốc ở tại mỗi thiết diện của các thanh, đồng thời cũng xác định được dịch chuyển $u_1(t, x_1)$, $u_2(t, x_2)$ tại mỗi thiết diện các thanh và thời gian va chạm của hai thanh với $P = K_1[u_1(t, l_1) - u_2(t, l_2)] = 0$.

4. KẾT LUẬN

Bài toán đặt ra được giải quyết trọn vẹn, mô hình bài toán này tổng quát hơn so với mô hình các bài toán đã được một số tác giả quan tâm [1, 2] và nó sát với mô hình bài toán về sự va chạm của búa đi ê zen vào cọc tựa trên nền đàn nhớt có kể đến bộ phận giảm chấn.

Địa chỉ:

Trường Đại học Thủy Lợi HN

Nhận ngày 25/5/1990

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Беляев Ю. В. Применение теории удара стержней к анализу работы машин ударного действия. Труды семинара по вибрационной технике 1964.
2. Иносов В. Л. Определение напряжения в сваях при ударном погружении на основе волновой теории.
3. Кильчевский Н. А. Динамическое контакное сжатие твердых тел удара.
4. Nguyễn, Thúc An, Vũ Văn Nguyễn. Va chạm của hai thanh đàn hồi. Tạp chí Cơ học số 1, 1983.

РЕЗЮМЕ

ПРОДОЛЬНЫЙ УДАР ДВУХ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ СО СОПРОТИВЛЕНИЕМ ВЯЗКО - УПРУГОСТИ

В этой работе изучается вопрос о продольном ударе двух упругих стержней со сопротивлением вязко - упругости в конце второго стержня. Были определены напряжения, скорости, перемещения в каждом сечении стержней и время удара.

Xêmina CƠ HỌC VẬT RẮN BIẾN DẠNG

Thời gian: Tiến hành thường kỳ vào sáng thứ bảy tuần thứ tư hàng tháng

Địa điểm thường trực: 23 Phan Bội Châu

Ban chủ trì: GSTS Nguyễn Hoa Thịnh (HVKTQS),
GSTS Đào Huy Bích (ĐHTHHN),
GSPTS Nguyễn Văn Vương (ĐHBKHN).

Các báo cáo đã thực hiện

Tháng 9/1990:

1. Một số vấn đề cơ học trong các máy nông nghiệp. PTS Phan Lê (Viện NCMN)
2. Thông báo về việc sử dụng máy vi tính trong giảng dạy sức bền vật liệu. PTS Bùi Đình Nghi (ĐHGTVT)

Tháng 10/1990:

Sử dụng phương pháp phần tử biên để xác định tải trọng lên vật thể có kích thước lớn. PTS Lê Đức Hòa (HVKTQS)

Tháng 11/1990:

Một số vấn đề mới trong giáo trình Cơ học kết cấu của A. Chirax. PTS Nguyễn Văn Phó (ĐHXDHN)

Tháng 12/1990:

Phương pháp phần tử hữu hạn ngẫu nhiên. GSTS Phạm Hồng Giang (ĐHTLHN)