

PHƯƠNG PHÁP WHITHAM KHAI TRIỂN GẦN MẶT SÓNG ĐỐI VỚI DÒNG CHẢY TRÊN SÔNG CÓ ĐÁY BIẾN ĐỔI

PHẠM HÙNG

Trong bài này, chúng tôi sử dụng phương pháp Whitham khai triển gần mặt sóng đối với dòng chảy trên sông có đáy biến đổi. Trong trường hợp chung, đã thu nhận phương trình mô tả sự biến thiên của độ sâu, vận tốc và đáy phía sau mặt sóng. Đã chỉ ra ảnh hưởng của bùn cát lên các sóng truyền cùng chiều và ngược chiều dòng chảy. Ngoài ra, đã chỉ ra rằng sự biến thiên của sóng cắt là biến đổi chậm. Trong trường hợp sông có đáy cứng, phẳng, đã thu nhận các kết quả đã biết của Whitham.

1. TRƯỜNG HỢP CHUNG

Dòng chảy của chất lỏng nhớt, không nén được, có tính đến độ nghiêng của đáy và ảnh hưởng của lực trọng trường trên sông có thiết diện hình chữ nhật, đáy biến đổi, được mô tả bởi hệ phương trình sau (xem [1], [2], [3]).

$$\begin{aligned} h_t + v h_x + h v_x &= 0, \\ v_t + v v_x + g'(h + \phi)_x &= g' \cdot S - C_f \frac{v^2}{h}, \\ \phi_t + \beta q_h \cdot h_x + \beta q_v \cdot v_x &= 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

trong đó h độ sâu, v vận tốc trung bình theo thiết diện, $g' = g \cdot \cos \alpha$, g gia tốc trọng trường, α góc nghiêng giữa trục Ox và phương nằm ngang (xem Hình 1).

$S = \operatorname{tg} \alpha$, C_f hệ số không thứ nguyên đặc trưng cho ma sát đáy, ϕ mặt đáy sông, $q = q(v, h)$ lưu lượng bùn cát đáy, giả thiết là một hàm đã biết của v và h , β là tham số không thứ nguyên. Hệ (1.1) được viết dưới dạng thứ nguyên, để tiện so sánh với kết quả đã biết của Whitham [3].

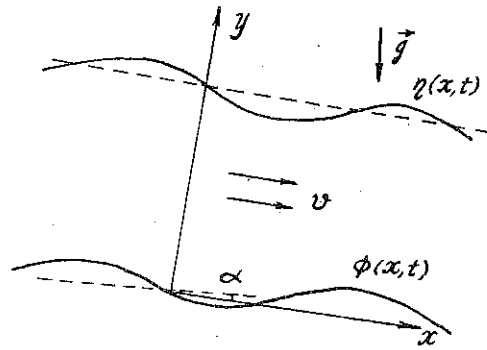
Hệ (1.1) có nghiệm dừng:

$$h = h_0 = \text{const}, \quad v = v_0 = \sqrt{\frac{g' S h_0}{C_f}}, \quad \phi = \phi_0 = 0. \tag{1.2}$$

Ta đưa vào biến $\xi = x - Ct$, C cần phải xác định, như vậy $\xi = 0$ ứng với các đường đặc trưng. Giả sử rằng các đạo hàm bậc nhất theo x và t của các ẩn số của (1.1) có gián đoạn trong khi bản thân các ẩn số này là các hàm liên tục theo ξ .

Nghiệm của hệ (1.1) được xây dựng như sau:

$$\begin{aligned}
 h &= h_0, \quad v = v_0, \quad \phi = \phi_0 \quad \text{tại } \xi > 0, \\
 h &= h_0 + \xi h_1(t) + \frac{1}{2} \xi^2 h_2(t) + \dots \\
 v &= v_0 + \xi v_1(t) + \frac{1}{2} \xi^2 v_2(t) + \dots \quad \text{tại } \xi < 0, \\
 \phi &= \phi_0 + \xi \phi_1(t) + \frac{1}{2} \xi^2 \phi_2(t) + \dots
 \end{aligned} \tag{1.3}$$



Hình 1. Sơ đồ dòng chảy

Thế (1.3) vào (1.1) và tìm nghiệm xấp xỉ theo các bậc của ξ (ở đây giả thiết ξ là nhỏ). Xấp xỉ bậc không theo ξ cho hệ phương trình:

$$\begin{aligned}
 -Ch_1 + v_0 h_1 + h_0 v_1 &= 0, \\
 -Cv_1 + v_0 v_1 + g' \cdot h_1 + g' \cdot \phi_1 &= 0, \\
 -C\phi_1 + \beta q_{0h} \cdot h_1 + \beta q_{0v} \cdot v_1 &= 0.
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

trong đó

$$q_{0h} = \left. \frac{\partial q}{\partial h} \right|_{h=h_0, v=v_0}; \quad q_{0v} = \left. \frac{\partial q}{\partial v} \right|_{h=h_0, v=v_0}$$

Điều kiện để cho hệ (1.4) có nghiệm không tầm thường là:

$$\begin{vmatrix} -C + v_0 & h_0 & 0 \\ g' & -C + v_0 & g' \\ \beta q_{0h} & \beta q_{0v} & -C \end{vmatrix} = 0 \tag{1.5}$$

Hệ (1.5) đưa về phương trình bậc 3 thực đối với C :

$$C^3 - 2v_0 C^2 + C \cdot (v_0^2 - g' h_0 - \beta g' q_{0v}) - \beta (g' h_0 q_{0h} - g' v_0 q_{0v}) = 0. \tag{1.6}$$

Phương trình thực bậc 3 (1.6) có 3 nghiệm thực khác nhau (tương ứng với 3 đường đặc trưng khác nhau), nếu thỏa mãn điều kiện (2.3) trong [7].

Các vector riêng trái \vec{l} và phải \vec{r} có dạng:

$$\vec{l} = \sigma_2 \left(1, \frac{C \cdot (C - v_0)}{g' \cdot (C + \beta q_{0h})}, \frac{C - v_0}{C + \beta q_{0h}} \right), \tag{1.7}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C - v_0} \\ \frac{h_0}{(C - v_0)^2} \\ -1 + \frac{g'h_0}{g'h_0} \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

trong đó σ_1, σ_2 là các số thực bất kỳ. Ứng với 3 giá trị thực của nghiệm của phương trình (1.6) sẽ có 3 vector riêng trái và phải tương ứng.

Nghiệm xấp xỉ bậc ξ của (1.1) cho hệ phương trình:

$$\begin{aligned} (-C + v_0)h_2 + h_0v_2 + \dot{h}_1 + 2v_1h_1 &= 0, \\ g'h_2 + (-C + v_0)v_2 + g'\phi_2 + \dot{v}_1 + v_1^2 + \frac{2g'Sv_1}{v_0} - \frac{g'Sh_1}{h_0} &= 0, \\ \beta q_{0h} \cdot h_2 + \beta q_{0v} \cdot v_2 - C\phi_2 + \dot{\phi}_1 + \beta q_{0hh} \cdot h_1^2 + 2\beta q_{0hv} \cdot v_1h_1 + \beta q_{0vv} \cdot v_1^2 &= 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Các hàm v_2, h_2, ϕ_2 sẽ được loại bằng cách nhân phương trình (1.9) với vector riêng trái (1.7) của ma trận (1.5), kết quả cho ta phương trình (dấu $\dot{}$ chỉ đạo hàm theo t):

$$\begin{aligned} (\dot{h}_1 + 2v_1h_1) + \frac{C \cdot (C - v_0)}{g'(C + \beta q_{0h})} \cdot \left(\dot{v}_1 + v_1^2 + \frac{2g' \cdot Sv_1}{v_0} - \frac{g'Sh_1}{h_0} \right) + \\ + \left(\frac{C - v_0}{C + \beta q_{0h}} \right) \cdot \left(\dot{\phi}_1 + \beta q_{0h} \cdot h_1^2 + 2\beta v_1h_1 + \beta q_{0vv} \cdot v_1^2 \right) = 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Từ (1.4), (1.5) có thể biểu diễn v_1, ϕ_1 qua h_1 như sau:

$$v_1 = \left(\frac{C - v_0}{h_0} \right) h_1, \quad \phi_1 = \left(-1 + \frac{(C - v_0)^2}{g'h_0} \right) h_1. \quad (1.11)$$

Thế (1.11) vào (1.10), ta thu được phương trình cho h_1 :

$$ah_1 + bh_1^2 + dh_1 = 0, \quad (1.12)$$

trong đó a, b, d là các hằng số có dạng:

$$\begin{aligned} a &= 1 + \frac{C \cdot (C - v_0)^2}{g'h_0(C + \beta q_{0h})} + \frac{C - v_0}{C + \beta q_{0h}} \cdot \left(-1 + \frac{(C - v_0)^2}{g'h_0} \right), \\ b &= \frac{2(C - v_0)}{h_0} + \frac{C(C - v_0)^3}{g'h_0^2(C + \beta q_{0h})} + \beta \frac{C - v_0}{C + \beta q_{0h}} \cdot \left(q_{0hh} + 2q_{0hv} \cdot \left(\frac{C - v_0}{h_0} \right) + q_{0vv} \right), \\ d &= \frac{2 \cdot S \cdot (C - v_0) \cdot C}{(C + \beta q_{0h})v_0h_0} \cdot \left(C - \frac{3v_0}{2} \right). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Từ (1.4) có thể nhận thấy rằng khi $\phi = q_h = q_v = 0$ ta có

$$C = v_0 \pm \sqrt{g'h_0}, \quad a = 2, \quad b = \frac{3(C - v_0)}{h_0}, \quad d = (C - v_0) \frac{2S}{v_0h_0} \cdot \left(C - \frac{3v_0}{2} \right).$$

Phương trình (1.12) được đưa về dạng phương trình do Whitham thu nhận đối với sóng có đáy cứng, phẳng (xem [3] trang 135) Nghiệm của phương trình (1.12) có dạng:

$$h_1(t) = \frac{1}{e^{\frac{d}{a}t} \left(\frac{1 + bh_1(0)}{dh_1(0)} \right) - \frac{b}{d}}. \quad (1.14)$$

Chúng ta tìm điều kiện để cho $|h_1| \rightarrow \infty$ khi $t \rightarrow t^* < \infty$. Mẫu số của vế phải (1.14) bằng không khi:

$$t = t^* = \frac{d}{a} \ln \frac{bh_1(0)}{d + bh_1(0)} > 0$$

điều này chỉ thỏa mãn nếu:

$$\begin{aligned} \text{A)} \quad & \frac{d}{a} > 0; \quad \frac{bh_1(0)}{d + bh_1(0)} > 1, \\ \text{B)} \quad & \frac{d}{a} < 0; \quad 0 < \frac{bh_1(0)}{d + bh_1(0)} < 1. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Từ phương trình (1.12) nếu bỏ qua ảnh hưởng phi tuyến thì $h_1 \simeq e^{-\frac{d}{a}t}$, vậy $d/a > 0$ ứng với trường hợp ổn định tuyến tính, còn $d/a < 0$ ứng với mất ổn định tuyến tính. Trường hợp A chỉ thỏa mãn nếu:

$$\begin{aligned} \text{A1)} \quad & a > 0, \quad d > 0, \quad b > 0, \quad h_1(0) < 0, \quad |h_1(0)| > \frac{d}{b}, \\ \text{A2)} \quad & a > 0, \quad d > 0, \quad b < 0, \quad h_1(0) > -\frac{d}{b}, \\ \text{A3)} \quad & a < 0, \quad d < 0, \quad b > 0, \quad h_1(0) > -\frac{d}{b}, \\ \text{A4)} \quad & a < 0, \quad d < 0, \quad b < 0, \quad h_1(0) < 0, \quad |h_1(0)| > \frac{d}{b}. \end{aligned}$$

Trường hợp B chỉ thỏa mãn nếu:

$$\begin{aligned} \text{B1)} \quad & a > 0, \quad d < 0, \quad b > 0, \quad \forall h_1(0) < 0, \\ \text{B2)} \quad & a > 0, \quad d < 0, \quad b < 0, \quad \forall h_1(0) > 0, \\ \text{B3)} \quad & a < 0, \quad d > 0, \quad b > 0, \quad \forall h_1(0) > 0, \\ \text{B4)} \quad & a < 0, \quad d > 0, \quad b < 0, \quad \forall h_1(0) < 0. \end{aligned}$$

Trong trường hợp sóng có đáy cứng, phẳng, đối với sóng truyền theo chiều dòng chảy, ta thu được kết quả đã biết của Whitham [3] ứng với các trường hợp A1 (nếu $F < 2$) và B1 (nếu $F > 2$).

Đối với sóng truyền ngược chiều dòng chảy, ta thu được kết quả của Whitham [3] ứng với trường hợp A2.

2. NGHIỆM TIỆM CẬN THEO β

Giả thiết $\beta \ll 1$, nghiệm của phương trình (1.6) có dạng:

$$\begin{aligned}
C^+ &= C_0^+ + \beta C_1^+ + O(\beta^2), \\
C^- &= C_0^- + \beta C_1^- + O(\beta^2), \\
C^s &= C_0^s + \beta C_1^s + O(\beta^2),
\end{aligned} \tag{2.1}$$

trong đó:

$$\begin{aligned}
C_0^+ &= v_0 + \sqrt{g'h_0}, & C_0^- &= v_0 - \sqrt{g'h_0}, & C_0^s &= 0, \\
C_1^+ &= \frac{g'q_{0v} + q_{0h}\sqrt{g'h_0}}{2(v_0 + \sqrt{g'h_0})}, & C_1^- &= \frac{-g'q_{0v} + q_{0h}\sqrt{g'h_0}}{2(-v_0 + \sqrt{g'h_0})}, & C_1^s &= \frac{g'h_0q_{0h} - g'v_0q_{0v}}{v_0^2 - g'h_0},
\end{aligned}$$

Từ (1.13) ta thấy: đối với sóng truyền theo chiều dòng chảy sự có mặt của bùn cát khi $\beta \ll 1$ không ảnh hưởng đến dấu của a và b ($a > 0$, $b > 0$). Tuy nhiên, sự có mặt của bùn cát sẽ ảnh hưởng đến dấu của d . Thật vậy:

$$d = \frac{2S(C_0^+ - v_0)C_0^+}{(C_0^+ + \beta q_{0h})v_0h_0} \left(1 - \frac{v_0}{2\sqrt{g'h_0}} + \beta \frac{C_1^+}{\sqrt{g'h_0}} \right) \sqrt{g'h_0} + O(\beta^2)$$

ta thấy, nếu $C_1^+ > 0$ (< 0) sự có mặt của bùn cát sẽ làm tăng (hoặc giảm) tính ổn định của sóng, khi đó sóng sẽ mất ổn định tuyến tính khi:

$$\frac{v_0}{\sqrt{g'h_0}} > 2 \left(1 + \frac{\beta C_1^+}{\sqrt{g'h_0}} \right)$$

Đối với sóng truyền ngược chiều dòng chảy sự có mặt của bùn cát sẽ không ảnh hưởng đến dấu của a , b , d .

Xét chuyển động của sóng cát, từ (2.1) ta nhận thấy nếu:

$$q_{0v} \cdot v_0 - q_{0h} \cdot h_0 > 0$$

đối với dòng chảy êm ($v_0 < \sqrt{g'h_0}$) sóng cát chuyển động sang phải, đối với dòng chảy xiết ($v_0 > \sqrt{g'h_0}$), sóng cát chuyển động sang trái.

Các kết quả thực nghiệm cho thấy đối với dòng chảy êm, sóng cát chuyển động xuôi theo dòng chảy, đối với dòng chảy xiết sóng cát chuyển động ngược chiều dòng chảy, vậy điều kiện $q_{0v} \cdot v_0 - q_{0h} \cdot h_0 > 0$ có thể được sử dụng để kiểm tra tính hợp lý của các công thức bán thực nghiệm.

Ta khảo sát trường hợp dòng chảy xiết:

Từ (1.3)

$$\begin{aligned}
a &= -\frac{1}{\beta} \frac{v_0(v_0^2 - g'h_0)}{g'h_0(C_1^s + q_{0h})} + O(1), \\
b &= -\frac{2v_0}{h_0} - \frac{v_0^3 C_1^s}{g'h_0(C_1^s + q_{0h})} - \frac{v_0}{C_1^s + q_{0h}} \left(q_{0hh} - 2q_{0hv} \frac{v_0}{h_0} + q_{0vv} \right) + O(\beta), \\
d &= \frac{3v_0 S C_1^s}{(C_1^s + q_{0h})h_0} + O(\beta).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Nếu bỏ qua ảnh hưởng phi tuyến, từ (1.13), (2.2) ta có:

$$h_1 \simeq e^{\frac{3\beta g' S C_1^s}{v_0^2 - g'h_0} t} \tag{2.3}$$

Vậy đối với dòng chảy xiết, sóng cát chuyển động từ phải sang trái, ngược chiều dòng chảy và luôn ổn định tuyến tính. Ngoài ra, đối với dòng chảy không nằm ở lân cận giá trị tới hạn ($v_0^2 - g'h_0 = 0(1)$), sự biến thiên của bùn cát là chậm bậc β theo thời gian.

Ảnh hưởng của hiệu ứng phi tuyến sẽ dẫn đến khả năng sóng đổ sau một thời gian hữu hạn. Có những khả năng sau (xem 2.2).

$$\begin{aligned} C_1^+ + q_{0h} > 0 & \quad \text{nếu} \quad b > 0 (< 0) \text{ ta có các trường hợp A3, (A4).} \\ C_1^+ + q_{0h} < 0 & \quad \text{nếu} \quad b > 0 (< 0) \text{ ta có các trường hợp A1, (A2).} \end{aligned}$$

3. MỘT SỐ CÔNG THỨC BÁN THỰC NGHIỆM

Trong trường hợp $\beta \ll 1$, sự có mặt của bùn cát làm tăng (hoặc giảm) sự ổn định của sóng lũ, tùy thuộc vào: $C_1^+ > 0$ (hoặc $C_1^+ < 0$).

Xét một số công thức bán thực nghiệm đã được áp dụng trong thực tế (xem [5], trang 80) Công thức Pôliacốp (1940).

$$q = Kv^4$$

v vận tốc trung bình, K hệ số tỷ lệ ($K > 0$) ta thấy

$$q_{0h} = 0, \quad q_{0v} = 4Kv_0^3 > 0, \quad \text{ta có: } C_1^+ > 0, \quad q_{0v}v_0 - q_{0h}h_0 > 0.$$

Công thức Govêlexianhi (1950)

$$q = 12,95 \frac{dU_0}{\lg\left(\frac{12D+d}{d}\right)^2} \left(\frac{v^3}{U_0^2} - 1\right) \left(\frac{v}{U_0} - 1\right),$$

trong đó

d : đường kính của hạt cát đáy.

D : đường kính lớn nhất của bùn cát chuyển động.

v : vận tốc trung bình của dòng chảy.

v_0 : vận tốc bắt đầu chuyển động của hạt cát đáy

ta thấy:

$$q_{0h} = 0, \quad q_{0v} > 0, \quad \text{ta có: } C_1^+ > 0, \quad q_{0v}v_0 - q_{0h}h_0 > 0.$$

Công thức Samôp:

$$q = K \left(\frac{v}{U_{0H}}\right)^3 \cdot (v - U_{0H}) \cdot \left(\frac{d}{h}\right)^{1/4}$$

K : hệ số tỷ lệ, $K = 1,5 \sqrt[3]{D^2} \div 3 \sqrt[3]{D^2}$, U_{0H} tốc độ giới hạn dưới của bùn cát (bùn cát chỉ chuyển động khi $v > U_{0H}$)

d : đường kính hạt cát, h độ sâu trung bình

$U_{0H} = 3,7d^{1/3} \cdot h^{1/6}$, dễ thấy rằng: $q_{0v} > 0$, $q_{0h} < 0$

Ta có $C_1^+ > 0$ nếu

$$|q_{0h}| < \frac{q_{0v}}{\sqrt{g'h_0}} \cdot \sqrt{g'}$$

và $q_{0v} \cdot v_0 - q_{0h} \cdot h_0 > 0$.

4. KẾT LUẬN

Bằng phương pháp khai triển gần mặt sóng của Whitham đã thu nhận phương trình mô tả sự biến thiên của độ sâu, vận tốc và đáy phía sau mặt sóng. Đã liệt kê các trường hợp sóng đổ sau một thời gian hữu hạn. Khi $\beta \ll 1$ đã đưa ra các lời giải tiệm cận theo β . Đã chỉ ra ảnh hưởng của biến dạng đáy đối với sự ổn định của sóng lũ. Đối với dòng chảy sau tới hạn, đã xét trường hợp sóng cắt chuyển động ngược chiều dòng chảy và luôn ổn định tuyến tính. Đã liệt kê các trường hợp sóng cắt đổ sau một thời gian hữu hạn. Đối với sông có đáy cứng, phẳng đã thu nhận được các kết quả đã biết của Whitham.

Tác giả chân thành cảm ơn G.S.T.S. Nguyễn Văn Điệp đã quan tâm, ủng hộ và đóng góp nhiều nhận xét có giá trị khoa học cho công trình này.

Địa chỉ:
Viện Cơ Viện KHVN

Nhận ngày 12/10/1989

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. J. A. Cunge, N. Perdreau. Mobile bed fluvial mathematical models. La Houille Blanche, No. 7, 1973.
2. D. J. Needham. The development of bed form disturbance in an alluvial river or channel. Journal of applied mathematics and physics. (ZAMP) Vol. 39, January 1988.
3. Дж. Уизем. Линейные и нелинейные волны. Москва 1977.
4. Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике. Москва 1974.
5. Lê Tхэ хунг, Фам хунг, Чыонг За Бинь. Применение метода многих масштабов к задаче о динамике русел с учётом деформации дна. В сборнике статей международной конференции по механике. Плата 7, 1987.
6. Giáo trình động lực học sông ngòi. Bộ Thủy lợi, trường đại học thủy lợi. Nhà xuất bản nông nghiệp, Hà nội, 1981.
7. Phạm Hùng. Mất ổn định của sóng lan truyền trên kênh nghiêng có đáy biến đổi. Tạp chí Cơ học số 2, 1990.

SUMMARY

WHITHAM METHOD OF THE EXPANSION NEAR THE WAVE FRONT PROPAGATING ON THE RIVER WITH BEDLOAD TRANSPORT

In this paper the non linear differential equation describing the behaviour of water surface behind the wave front is obtained by Whitham method. It is shown that the bed load transport could influence significantly on the stability of the flood wave. In the supercritical flow, the bedload wave will propagate upstream and will linearly stabilize. The different situations when the wave could topple over are analysed. In the flow without the bedload transport, the results of Whitham have been reobtained as a special case.