

DAO ĐỘNG PHI TUYẾN TRONG CÁC HỆ CẤP MỘT CÓ CHẠM II. HỆ KHÔNG ÔTÔNÔM

NGUYỄN ĐÔNG ANH, NGUYỄN TIẾN KHIÊM

Trong phần I chúng tôi đã nghiên cứu các chế độ dao động riêng, tự dao động của hệ cấp một có chạm. Phần tiếp theo này sẽ nghiên cứu bức tranh dao động khi có lực ngoài tuần hoàn tác động. Hệ được xét có dạng:

$$\dot{X}(t) + \alpha X(t - \Delta) = P \sin \nu t + Q \cos \nu t + \varepsilon f(X, \dot{X}), \quad (0.1)$$

trong đó $\alpha, \Delta > 0, \varepsilon$ tham số bé, P, Q các hằng số. Trong phần trước chúng ta đã biết rằng hệ tự do tuyến tính (khi $\varepsilon = P = Q = 0$) có nghiệm tuần hoàn chu kỳ $2\pi/\alpha$ nếu thỏa mãn điều kiện $\sin \alpha\Delta = 1$. Chúng ta cũng sẽ chỉ xét hệ (0.1) trong trường hợp này vì nếu trong hệ tuyến tính không có nghiệm tuần hoàn thì lực phi tuyến và lực ngoài không gây ra những hiện tượng gì đặc biệt.

1. HỆ TUYẾN TÍNH CƯỜNG BỨC

Trước hết ta xét hệ (0.1) khi $\varepsilon = 0$

$$\dot{X}(t) + \alpha X(t - \Delta) = P \sin \nu t + Q \cos \nu t, \quad (1.1)$$

với điều kiện

$$\sin \alpha\Delta = 1 \quad (1.2)$$

Nếu nghiệm của (1.1) tìm ở dạng

$$X(t) = A \cos \nu t + B \sin \nu t, \quad (1.3)$$

thì A, B sẽ thỏa mãn phương trình:

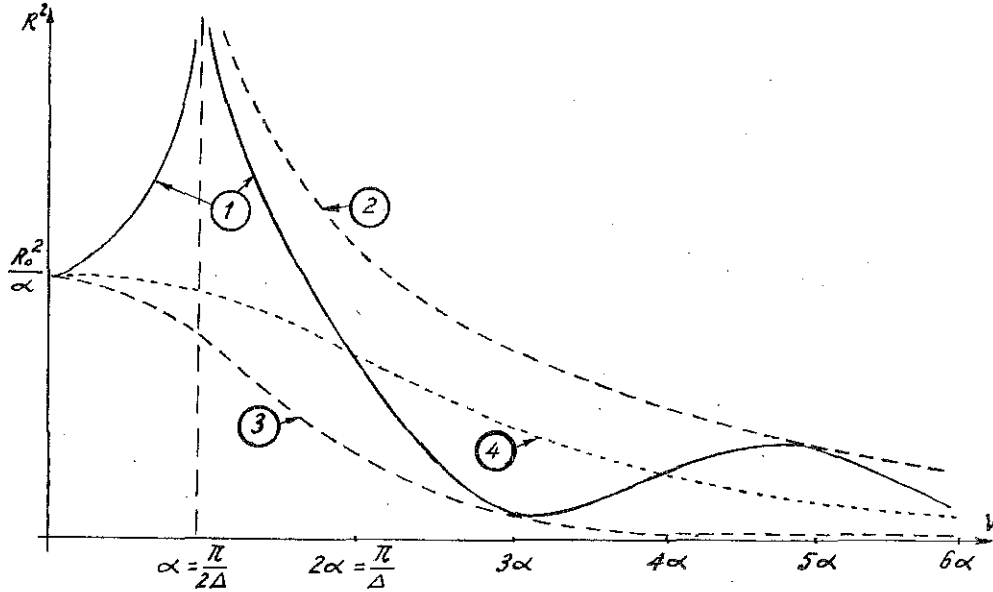
$$\begin{aligned} (\alpha \sin \nu\Delta - \nu)A + \alpha B \cos \nu\Delta &= P, \\ \alpha A \cos \nu\Delta + (\alpha \sin \nu\Delta - \nu)B &= Q \end{aligned}$$

và có dạng:

$$\begin{aligned} A &= \frac{P(\alpha \sin \nu \Delta - \nu) + \alpha Q \cos \nu \Delta}{\nu^2 + \alpha^2 - 2\alpha\nu \sin \nu \Delta}, \\ B &= \frac{\alpha P \cos \nu \Delta - Q(\alpha \sin \nu \Delta - \nu)}{\nu^2 + \alpha^2 - 2\alpha\nu \sin \nu \Delta}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

nếu $D = \nu^2 + \alpha^2 - 2\alpha\nu \sin \nu \Delta \neq 0$
 Khi đó

$$A^2 + B^2 = R^2 = \frac{P^2 + Q^2}{D} = \frac{R_0^2}{D}. \quad (1.5)$$



- 1 $R^2 = R_0^2 / (\nu^2 + \alpha^2 - 2\alpha\nu \sin \nu \Delta)$; 2 $R^2 = R_0^2 / (\alpha - \nu)^2$;
 3 $R^2 = R_0^2 / (\alpha + \nu)^2$; 4 $R^2 = R_0^2 / (\nu^2 + \alpha^2)$.

Đường cong biểu diễn mối liên hệ tần số - biên độ trong trường hợp này có dạng như trong Hình 1. Dễ dàng nhận thấy ngay rằng biên độ sẽ lớn vô cùng khi $\nu \rightarrow \alpha$, ta gọi đây là cộng hưởng chính. Ngoài ra biên độ còn đạt các giá trị cực đại tại các tần số khác nữa, chúng hữu hạn (nhỏ) và ta gọi các chế độ tương ứng là siêu cộng hưởng. Tiếp theo, trong bài này ta chỉ nghiên cứu kỹ trường hợp cộng hưởng chính.

2. HỆ PHI TUYẾN - TRƯỜNG HỢP CỘNG HƯỞNG CHÍNH

Theo định nghĩa cộng hưởng trên, chúng ta sẽ có cộng hưởng chính nếu $\sin \nu \Delta \sim 1$. Ở đây chúng ta xét bức tranh dao động trong miền cộng hưởng ; giả thiết:

$$\alpha - \nu = \varepsilon\sigma. \quad (2.1)$$

Khi đó

$$\sin \nu\Delta = 1 - \varepsilon^2 \dots; \quad \cos \nu\Delta = \varepsilon\sigma\Delta - \varepsilon^2 \dots \quad (2.2)$$

Hệ (0.1) có thể đưa về dạng:

$$\dot{X}(t) + \nu X(t - \Delta) = P \sin \nu t + Q \cos \nu t + \varepsilon[f(X, \dot{X}) - \sigma X(t - \Delta)]. \quad (2.3)$$

Khi ε nhỏ nghiệm của (2.3) sẽ gần với nghiệm của (1.1) và như vậy trong miền cộng hưởng chính biên độ dao động sẽ lớn vô cùng nếu P, Q hữu hạn. Vấn đề chỉ còn nghiên cứu trường hợp P, Q nhỏ: $P = \varepsilon P_0, Q = \varepsilon Q_0$, hay là $R_0 = \varepsilon r_0$. Trong trường hợp đó hệ (2.3) có thể viết lại như sau:

$$\dot{X}(t) + \nu X(t - \Delta) = \varepsilon\{P_0 \sin \nu t + Q_0 \cos \nu t + f(X, \dot{X}) - \sigma X(t - \Delta)\}. \quad (2.4)$$

Ta sẽ tìm nghiệm của (2.4) dưới dạng:

$$X = a \cos \phi + \varepsilon u_1(a, \phi) + \dots, \quad \phi = \nu t + \theta, \quad (2.5)$$

trong đó

$$\dot{a} = \varepsilon A_1(a, \theta) + \varepsilon^2 \dots; \quad \dot{\theta} = \varepsilon B_1(a, \theta) + \varepsilon^2 \dots \quad (2.6)$$

Tương tự như trong trường hợp ô-tônôm, lưu ý tới (2.2) ta có thể tính được:

$$\dot{X} = -a\nu \sin \phi + \varepsilon\{A_1 \cos \phi - aB_1 \sin \phi + \nu \frac{\partial u_1}{\partial \phi}\} + \varepsilon^2 \dots \quad (2.7)$$

và

$$X_\Delta = X(t - \Delta) = a \sin \phi + \varepsilon\{-\Delta A_1 \sin \phi - (B_1 - \sigma)\Delta a \cos \phi + u_1\} + \dots \quad (2.8)$$

Cùng với việc biểu diễn vế phải của (2.4) dưới dạng:

$$\varepsilon F = \varepsilon\{M \cos \phi + N \sin \phi - \sigma a \sin \phi + f(a \cos \phi, -\nu a \sin \phi)\} + \varepsilon^2 \dots \quad (2.9)$$

trong đó

$$M = Q_0 \cos \theta - P_0 \sin \theta, \quad N = P_0 \cos \theta + Q_0 \sin \theta. \quad (2.10)$$

hoặc

$$M^2 + N^2 = P_0^2 + Q_0^2 = r_0^2. \quad (2.11)$$

Thay (2.7) - (2.9) vào (2.4) so sánh các hệ số của $\varepsilon^0, \varepsilon^1$ ta thu được:

$$[A_1 - \nu\Delta a(B_1 - \sigma) - M] \cos \phi + [a(\sigma - B_1) - \nu\Delta A_1 - N] \sin \phi + \nu \left(\frac{\partial u_1}{\partial \phi} + u_1\right) = f(a \cos \phi, -\nu a \sin \phi).$$

Khai triển hàm số $f(a \cos \phi, -\nu a \sin \phi)$ ra chuỗi Fourier

$$f = f_0(a) + f_c \cos \phi + f_s \sin \phi + \sum_{n=2} (h_n \cos n\phi + g_n \sin \phi).$$

chú ý:

$$\begin{Bmatrix} f_c \\ f_s \end{Bmatrix} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f[a \cos \phi, -\nu a \sin \phi] \begin{Bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{Bmatrix} d\phi = 2 \left\langle f \cdot \begin{Bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{Bmatrix} \right\rangle$$

và giả thiết $u_1(a, \phi)$ có dạng:

$$u_1 = V_0 + \sum_{n=2} (V_n \cos n\phi + W_n \sin n\phi),$$

sau những tính toán đơn giản ta sẽ nhận được các phương trình để xác định $A_1, B_1, V_n, W_n, n = 2, 3, \dots$ như sau:

$$\begin{aligned} A_1 - \nu \Delta a (B_1 - \sigma) &= M + f_c; & \nu \Delta A_1 + a(B_1 - \sigma) &= -N - f_s; \\ V_0 &= \frac{1}{\nu} h_0; & V_n + nW_n &= \frac{1}{\nu} h_n; & -nV_n + W_n &= \frac{1}{\nu} g_n, & n &= 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.12)$$

và

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{M - \nu \Delta N + f_c - \nu \Delta f_c}{1 + \nu^2 \Delta^2}; \\ B_1 &= -\frac{\nu \Delta M + N + \nu \Delta f_c + f_s}{1 + \nu^2 \Delta^2}; \\ V_n &= (1 + n^2)^{-1} \cdot \frac{1}{\nu} (h_n - n g_n); \\ W_n &= (1 + n^2)^{-1} \cdot \frac{1}{\nu} (n h_n + g_n). \end{aligned}$$

Như vậy ta đã xác định được hoàn toàn gần đúng bậc nhất:

$$X = a \cos \phi + \varepsilon u_1(a, \phi).$$

Việc nghiên cứu chế độ dừng được tiến hành như sau:

Phương trình để tìm biên độ và pha dừng có dạng:

$$\begin{aligned} M - \nu \Delta N &= -f_c + \nu \Delta f_s \equiv H(a) \\ \nu \Delta M + N &= -\nu \Delta f_c - f_s + (1 + \nu^2 \Delta^2) \sigma a \equiv G(a), \end{aligned} \quad (2.13)$$

chú ý tới (2.10) của M, N có thể khử θ trong (2.13):

$$f_c^2 + f_s^2 - 2\sigma a(\nu \Delta f_c + f_s) + (1 + \nu^2 \Delta^2) \sigma^2 a^2 = M^2 + N^2 = r_0^2$$

hay

$$W(a, \nu) = f_c^2 + f_s^2 - 2\sigma a(\nu \Delta f_c + f_s) + (1 + \nu^2 \Delta^2) \sigma^2 a^2 - r_0^2 = 0. \quad (2.14)$$

Đây là phương trình của đường cong cộng hưởng (biên độ - tần số)

Điều kiện ổn định theo tiêu chuẩn Routh - Hurwitz sẽ là

$$\frac{\partial}{\partial a_0} \{a_0 H(a_0)\} = \frac{\partial}{\partial a_0} \{a_0 (f_c - \nu \Delta f_s)\} < 0; \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial a_0} W(a_0, \nu) > 0, \quad (2.16)$$

trong đó a_0, θ_0 là nghiệm của (2.13) hoặc (2.14).

3. VÍ DỤ

1. Hệ Duffing:

$$\ddot{X} + \alpha X_\Delta = \varepsilon \{P_0 \sin \nu t + Q_0 \cos \nu t + \mu_0 X + \beta_0 X^3\}.$$

Trong trường hợp này

$$f_s = 0; \quad f_c = a(\mu_0 + \frac{3}{4}\beta_0 a^2),$$

và do đó phương trình (2.14) sẽ có dạng:

$$[\frac{3}{4}\beta_0 a^2 + \mu_0 - \nu \Delta \sigma]^2 + \sigma^2 - \frac{r_0^2}{a^2} = 0.$$

Đưa vào ký hiệu: $\beta = \varepsilon \beta_0, \mu = \varepsilon \mu_0, r = \varepsilon r_0, \alpha - \nu = \varepsilon \sigma,$

$$\bar{\beta} = \frac{\alpha \Delta \beta}{1 + \alpha^2 \Delta^2} \quad \bar{\mu} = \frac{\alpha \Delta \mu}{1 + \alpha^2 \Delta^2} \quad J = \frac{3r^2}{1 + \alpha^2 \Delta^2} \quad m = \frac{\mu}{\beta} = \frac{\bar{\mu}}{\bar{\beta}},$$

từ phương trình cuối ta có thể biểu diễn ν qua $A = \frac{3}{4}a^2$

$$\nu = \alpha - \bar{\beta}(A + m) \pm \bar{\beta} \sqrt{\frac{J}{A} - (A + m)^2}.$$

Phụ thuộc vào dấu của β, μ ta có những trường hợp sau đây:

a) Khi $m \geq 0$, tức là β, μ cùng dấu, đường cong (ν, A) chỉ có một nhánh cắt đường thẳng $\nu = \alpha - \bar{\beta}(A + m)$ ở một điểm duy nhất và cách đều đường thẳng đó về hai phía của trục ν , nếu β, μ cùng dương thì không có chế độ dừng nào ổn định. Trường hợp β, μ cùng âm đường cong cộng hưởng có dạng trong Hình 2 với những giá trị khác nhau của J .

b) Nếu $m < 0$: Phụ thuộc vào giá trị của J ta có những dạng khác nhau của đường cong cộng hưởng. Nếu $J > -\frac{4}{27}m^3$ đường cong cộng hưởng có một nhánh đơn như trong trường hợp $m > 0$. Khi $J = -\frac{4}{27}m^3$ đường cong có một nhánh tự cắt tại giao điểm với đường thẳng $\nu = \alpha - \bar{\beta}(A + m)$. Trường hợp $J < -\frac{4}{27}m^3$ có hai nhánh rời nhau, nhánh trên là đường khép kín. Trên Hình 3 là trường hợp $\beta > 0, \mu < 0$ còn Hình 4 tương ứng với $\beta < 0, \mu > 0$. Điều kiện ổn định thứ nhất cho ta bất đẳng thức

$$2\beta A + \mu < 0$$

sẽ tương đương với $A < -\frac{m}{2}$ nếu $\beta > 0$ và với $A > -\frac{m}{2}$ khi $\beta < 0$. Điều kiện thứ hai có dạng

$$N(A, \nu) = (\nu - \alpha)^2 + 4\bar{\beta}(\nu - \alpha)(A + \frac{1}{2}m) + 3\bar{\beta}(1 + \frac{1}{\alpha^2 \Delta^2})(A + m)(A + \frac{1}{3}m) > 0.$$

Trên các hình vẽ miền gạch chéo tương ứng với các chế độ không ổn định. Còn trên đường cong cộng hưởng đoạn đứt quãng là không ổn định.

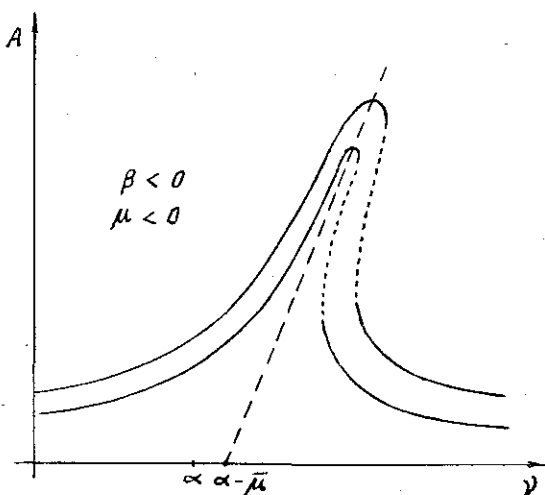
2. Hệ Van de Pol:

$$\dot{X} + \alpha X_{\Delta} = \varepsilon \{ P_0 \sin \nu t + Q_0 \cos \nu t + \mu_0 \dot{X} + \beta_0 X^2 \dot{X} \}$$

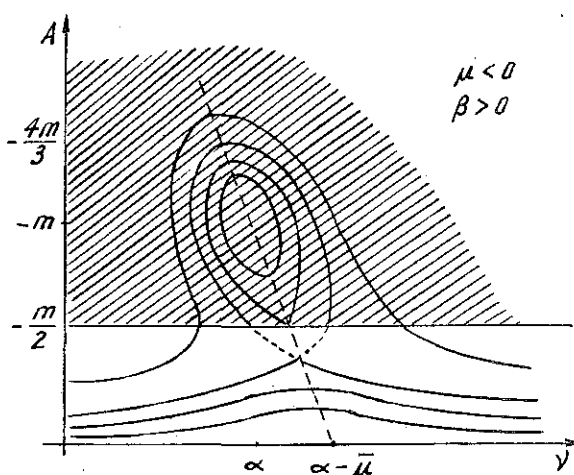
$$f_c = 0; \quad f_s = -\nu a \left(\mu_0 + \frac{1}{4} \beta_0 a^2 \right).$$

Đường cong cộng hưởng trong trường hợp này có dạng

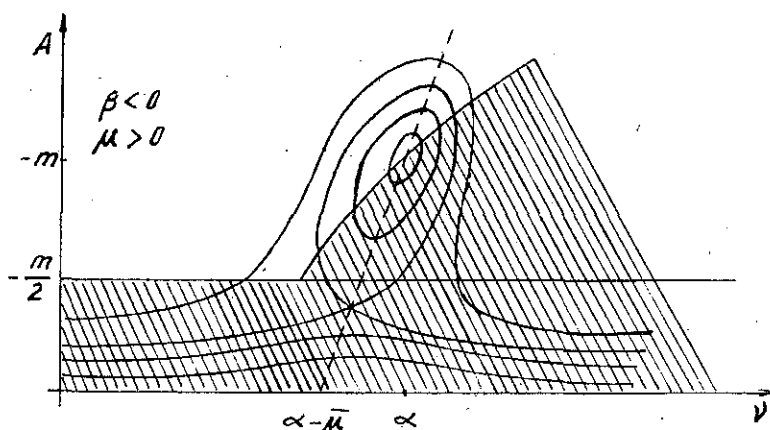
$$W(a, \nu) = f_s^2 + 2\sigma a f_s + (1 + \nu^2 \Delta^2) \sigma^2 a^2 - r_0^2 = 0.$$



Hình 2



Hình 3



Hình 4

Sau khi bỏ qua các đại lượng nhỏ bậc cao ta có

$$(1 + \alpha^2 \Delta^2)(\nu - \alpha^2) + 2\alpha(\beta A + \mu)(\nu - \alpha) + \alpha^2(\beta A + \mu)^2 - \frac{r_0^2}{4A} = 0; \quad A = \frac{1}{4}a^2.$$

Cũng đưa vào các đại lượng

$$\bar{\beta} = \frac{\alpha\beta}{1 + \alpha^2 \Delta^2}; \quad \bar{\mu} = \frac{\alpha\mu}{1 + \alpha^2 \Delta^2}; \quad m = \frac{\mu}{\beta}; \quad J = \frac{r_0^2}{4\alpha^2 \Delta^2 (1 + \alpha^2 \Delta^2) \bar{\beta}^2}.$$

phương trình cuối cho ta quan hệ:

$$\nu = \alpha - \bar{\beta}(A + m) \pm \alpha \Delta \bar{\beta} \sqrt{\frac{J}{A} - (A + m)^2}$$

Dễ dàng nhận thấy bức tranh dao động trong trường hợp này tương tự hệ Duffing khi $\beta < 0$, $\mu > 0$ (Hình 4).

KẾT LUẬN

Trong miền cộng hưởng chính :

1. Biên độ dao động của hệ tuyến tính lớn vô cùng.
2. Nhưng khi có lực phi tuyến bé Duffing thì biên độ dao động trở nên hữu hạn. Như vậy trong trường hợp này lực phi tuyến đóng vai trò cản. Bức tranh dao động được mô tả trên các hình vẽ.
3. So với hệ bậc hai và ba không có chậm, lực phi tuyến Duffing đã làm thay đổi bức tranh dao động. Nhưng trong hệ Van de Pol hầu như không có điều gì mới.

Địa chỉ:

Viện Cơ Viện KHVN

Nhận ngày 16/8/1989

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Ю. А. Митропольский, Д. И. Мартынюк. Периодические и квазипериодические колебания системы с запаздыванием. Киев 1979.
2. В. П. Рубаник. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. Наука, М. 1969.
3. Nguyen Van Dao. Non-linear oscillations of high order systems. NCSR SRV, Hanoi 1979.

SUMMARY

NON-LINEAR OSCILLATIONS IN FIRST ORDER SYSTEMS WITH DELAY II. NON-AUTONOMOUS CASE

The influence of the periodic force on the nonlinear first order systems with delay is investigated by the asymptotic method Crulov-Bogoliubov-Mitropolski. A detailed research of the response of Duffing and Van der Pol systems to external periodic force is given. The obtained results are compared with well-known ones in such second order systems without delay.