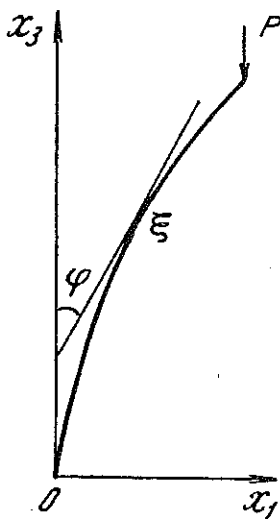


MẤT ỔN ĐỊNH VÀ RỄ NHÁNH NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN PHI TUYẾN THANH THẲNG CHỊU NÉN ĐÚNG TÂM

ĐỖ QUỐC QUANG

Theo lý thuyết tuyến tính, khi thanh thẳng chịu nén đúng tâm đến lực tới hạn (mất ổn định kiểu OIe), chuyển vị của thanh là một lượng chưa xác định [1] và để xét chuyển vị thực của thanh sau mất ổn định cần xét bài toán phi tuyến. Với việc xét thanh thẳng chịu nén đúng tâm, bài báo này sẽ đề cập một số vấn đề: 1- Phát biểu bài toán đối ngẫu; 2- Xác định điểm rẽ nhánh nghiệm của phương trình cân bằng thanh (điểm bắt đầu xảy ra mất ổn định); 3- Tìm số nghiệm rẽ nhánh; 4- Xác định dáng điệu nghiệm tại lân cận điểm rẽ nhánh; 5- Chứng minh sự tồn tại của nghiệm không tầm thường ở vùng xa điểm rẽ nhánh. Việc nghiên cứu dáng điệu nghiệm tại vùng xa điểm rẽ nhánh cũng là một vấn đề rất có ý nghĩa nhưng trong khuôn khổ bài báo này chúng tôi chưa đề cập đến.

1. ĐẶT BÀI TOÁN



Hình 1

Xét thanh đàn hồi chịu nén đúng tâm bởi lực P , thanh có tiết diện đối xứng thay đổi theo quy luật bất kỳ dọc trục, có tính đến trọng lượng bản thân, thanh được ngàm tại gốc và tự do tại đỉnh. Giả thiết thanh biến dạng trong mặt phẳng x_1Ox_3 , mặt phẳng này vuông góc với mặt đất (Hình 1).

Ở trạng thái chưa biến dạng phương trình trục thanh là

$$x_1 = 0; \quad x_3 = \xi \quad (1.1)$$

và sau khi biến dạng

$$x_i = r_i(\xi); \quad i = 1, 3. \quad (1.2)$$

Theo giả thiết thanh không dẫn của Kiéchôp-Klebs [2], nếu ký hiệu φ là góc giữa tiếp tuyến của trục thanh tại điểm ξ với trục x_3 thì

$$x_{i,\xi} = (\sin \varphi, \cos \varphi); \quad x_{i,\xi\xi} = (\cos \varphi, -\sin \varphi)\varphi_\xi, \quad (1.3)$$

khi đó mật độ nội năng có dạng

$$\phi = \frac{1}{2}EI(\xi)\varphi_\xi^2, \quad (1.4)$$

ở đây E - modun đàn hồi của vật liệu; $I(\xi)$ - momen quán tính của tiết diện tại điểm ξ . Có thể thiết lập phiếm hàm năng lượng:

$$W = \int_0^L \left[\frac{1}{2}EI(\xi)\varphi_\xi^2 + \rho_0 g S(\xi)r_3(\xi) \right] d\xi + Pr_3(L), \quad (1.5)$$

ở đây L - chiều dài thanh, ρ_0 - mật độ khối lượng thanh, g - gia tốc trọng trường, $S(\xi)$ - diện tích tiết diện thanh tại điểm ξ . Từ (1.3) nhận được

$r_3 = \int_0^\xi \cos \varphi(\tau) d\tau$, thế vào (1.5) và đặt $q(\xi) = \int_0^\xi \rho_0 S(\tau) d\tau$ lấy tích phân từng phần và nhóm lại ta có:

$$W = \int_0^L \left\{ \frac{1}{2}EI(\xi)\varphi_\xi^2 + [\lambda - q(\xi)] \cos \varphi \right\} d\xi, \quad (1.6)$$

ở đây $q(\xi)$ - trọng lượng phần thanh tính từ gốc tới điểm ξ , $\lambda = P + q(L)$

Theo nguyên lý dừng năng lượng, phiếm hàm $W[\varphi]$ đạt giá trị dừng tại hàm φ ứng với vị trí cân bằng của trục thanh và thỏa mãn điều kiện biên $\varphi(0) = 0$.

Theo nguyên lý trên, từ (1.6) dễ dàng tìm được phương trình cân bằng của trục thanh và điều kiện biên:

$$(EI(\xi)\varphi_\xi)_\xi + [\lambda - q(\xi)] \sin \varphi = 0, \quad (1.7)$$

$$\varphi(0) = 0; \quad \varphi_\xi(L) = 0. \quad (1.8)$$

Phương trình cân bằng của trục thanh ở dạng trên khác với một số tác giả ở chỗ cho phép xem xét đồng thời hai yếu tố trọng lượng và sự thay đổi tiết diện thanh. Ngoài ra, số hạng $[\lambda - q(\xi)] \sin \varphi$ trong phương trình thể hiện hiệu ứng rẽ nhánh nghiệm rõ rệt tại lân cận điểm rẽ nhánh nên rất thuận lợi khi khảo sát sự rẽ nhánh nghiệm của bài toán mà ta sẽ xem xét dưới đây.

2. NGUYÊN LÝ BIẾN PHÂN ĐỐI NGẪU

Đặt $\underline{W} = \inf W$, bài toán tìm cực tiểu của phiếm hàm (1.6) có thể phát biểu dưới dạng:

$$W = \inf_{\varphi \in (1-6)} \int_0^L \left\{ \max_p \left[p\varphi_\xi - \frac{p^2}{2EI} \right] + [\lambda - q(\xi)] \cos \varphi \right\} d\xi. \quad (2.1)$$

vì

$$\max_p \left[p\varphi_\xi - \frac{p^2}{2EI} \right] = \frac{1}{2} EI \varphi_\xi^2$$

và maximum đạt được khi $p = EI\varphi_\xi$. Đưa max ra khỏi dấu tích phân và giả thiết có thể đổi thứ tự lấy inf và sup [4] (điều này sẽ được kiểm tra dưới đây), ta có:

$$\underline{W} = \sup_p \left(\inf_\varphi \int_0^L \left\{ p\varphi_\xi + [\lambda - q(\xi)] \cos \varphi \right\} d\xi - \int_0^L \frac{p^2}{2EI} d\xi \right) \quad (2.2)$$

ta thấy rằng

$$\inf_\varphi \int_0^L \left\{ p\varphi_\xi + [\lambda - q(\xi)] \cos \varphi \right\} d\xi = -\infty$$

nếu một trong hai điều kiện sau đây không thỏa mãn

$$p_\xi + [\lambda - q(\xi)] \sin \varphi = 0, \quad (2.3)$$

$$p(L) = 0. \quad (2.4)$$

Nếu hai điều kiện trên thỏa mãn, ta có:

$$\inf_\varphi \int_0^L \left\{ p\varphi_\xi + [\lambda - q(\xi)] \cos \varphi \right\} d\xi = \int_0^L [\lambda - q(\xi)] (\cos \tilde{\varphi} + \tilde{\varphi} \sin \tilde{\varphi}) d\xi, \quad (2.5)$$

ở đây, $\tilde{\varphi}$ thỏa mãn (2.3), nghĩa là

$$\tilde{\varphi} = \arcsin \left[-\frac{p_\xi}{\lambda - q(\xi)} \right].$$

Từ (2.3), (2.4), (2.5) bài toán biến phân đối ngẫu được phát biểu như sau

$$\underline{W} = \sup_{p \in (2-4)} J \quad \text{với} \quad J = \int_0^L \left\{ -\frac{p^2}{2EI} + [\lambda - q(\xi)] (\cos \tilde{\varphi} + \tilde{\varphi} \sin \tilde{\varphi}) \right\} d\xi. \quad (2.6)$$

Để kiểm tra tính đúng đắn của (2.6), lấy biến phân phiếm hàm J

$$\delta J = \int_0^L \left\{ -\frac{p\delta p}{EI} + [\lambda - q(\xi)] \tilde{\varphi} \cos \tilde{\varphi} \delta \tilde{\varphi} \right\} d\xi, \quad (2.7)$$

chú ý, từ điều kiện (2.3) có thể viết:

$$\cos \tilde{\varphi} \delta \tilde{\varphi} = -\frac{\delta p_\xi}{\lambda - q(\xi)}, \quad (2.8)$$

thế (2.8) vào (2.7) ta được

$$\delta J = \int_0^L \left(-\frac{p \delta p}{EI} - \tilde{\varphi} \delta p_\xi \right) d\xi = \int_0^L \left(-\frac{p \delta p}{EI} + \tilde{\varphi}_\xi \delta p \right) d\xi - \tilde{\varphi} \delta p \Big|_0^L, \quad (2.9)$$

với các δp bất kỳ, δJ bằng 0 khi

$$\tilde{\varphi}_\xi = \frac{p}{EI}; \quad \tilde{\varphi}(0) = 0, \quad (2.10)$$

từ (2.10) ta có $p_\xi = (EI \tilde{\varphi}_\xi)_\xi$, đồng thời theo (2.3) ta có:

$P_\xi = -[\lambda - q(\xi)] \sin \varphi$ nên có thể viết

$$(EI(\xi) \tilde{\varphi}_\xi)_\xi = -[\lambda - q(\xi)] \sin \tilde{\varphi}, \quad (2.11)$$

(2.11), (2.10), (2.4) tương đương với phương trình cân bằng của trục thanh và điều kiện biên (1.7), (1.8). Bài toán (2.6) đã được chứng minh.

Phần tiếp sau đây sẽ xem xét cụ thể bài toán tồn tại và rẽ nhánh nghiệm của phương trình cân bằng trục thanh. Nghiệm gần đúng $\varphi(\xi)$ tìm được từ phương trình cân bằng trục thanh còn cho phép xác định đánh giá trên năng lượng toàn phần của hệ thống thông qua phiếm hàm (1.6). Riêng việc tìm giá trị p gần đúng phục vụ đánh giá dưới năng lượng của hệ thống qua phiếm hàm (2.6) và sai số nghiệm là một bài toán phức tạp cần được xem xét riêng.

3. TỒN TẠI VÀ RẼ NHÁNH NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH CÂN BẰNG

Tới đây chúng ta sẽ nghiên cứu bài toán điểm rẽ nhánh, số nghiệm rẽ nhánh và sự tồn tại nghiệm tại lân cận điểm rẽ nhánh của phương trình (1.7) và các điều kiện biên (1.8), chúng tương đương với bài toán biên sau đây [3]

$$(A(\xi) \varphi_\xi)_\xi + f(\varphi, \xi, \lambda) = 0; \quad \xi_1 < \xi < \xi_2, \quad (3.1)$$

$$\varphi(\xi_1) = 0; \quad \varphi_\xi(\xi_2) = 0. \quad (3.2)$$

Giả thiết $\varphi_0(\xi, \lambda)$ là nghiệm của (3.1), (3.2), gọi $\dot{\varphi}$ là các nhiễu nhỏ lân cận φ_0 , bài toán tuyến tính hóa của (3.1) và (3.2) có dạng

$$(A(\xi) \dot{\varphi}_\xi)_\xi + f_\varphi(\varphi_0, \xi, \lambda) \dot{\varphi} = 0, \quad (3.3)$$

$$\dot{\varphi}(\xi_1) = 0; \quad \dot{\varphi}_\xi(\xi_2) = 0. \quad (3.4)$$

Ta cũng giả thiết bài toán có nghiệm không tầm thường tại $\lambda = \lambda_0$, ở đây λ_0 là giá trị riêng bất kỳ của bài toán (3.3), (3.4), có thể chọn điều kiện chuẩn $\dot{\varphi}_\xi(\xi_1) = 1$ và đặt $\dot{\varphi}(\xi) = u(\xi)$ ta có:

$$u_\xi(\xi_1) = 1. \quad (3.5)$$

Chúng ta muốn chứng minh rằng phương trình rẽ nhánh là có thể giải được, mặc dù khi $\varphi = \varphi_0$ và $\lambda = \lambda_0$ bài toán suy biến, với mục đích này, có thể tìm nghiệm của (3.1), (3.2) dưới dạng:

$$\varphi(\xi) = \varphi_0(\xi, \lambda) + av(\xi, a, \lambda), \quad (3.6)$$

ở đây a - hằng số (biên độ của nhiễu) và v - hàm ẩn mới. Thế (3.6) vào (3.1) và (3.2) ta nhận được:

$$(A(\xi)v_\xi)_\xi + \frac{1}{a}[f(\varphi_0 + av, \xi, \lambda) - f(\varphi_0, \xi, \lambda)], \quad (3.7)$$

$$v(\xi_1) = 0; \quad v_\xi(\xi_1) = 1, \quad (3.8)$$

điều kiện $v_\xi(\xi_1) = 1$ ở đây do ta chọn.

Bài toán Côsy (3.7), (3.8) với a khác 0 và với mọi λ có duy nhất nghiệm, còn điều kiện biên tại ξ_2 của (3.2) được viết dưới dạng

$$b(a, \lambda) = v_\xi(\xi_2, a, \lambda) = 0, \quad (3.9)$$

(3.9) chính là phương trình rẽ nhánh, nếu (3.9) thỏa mãn thì $\varphi = \varphi_0 + av$ sẽ thỏa mãn (3.1), (3.2). Đến đây, bài toán biên (3.1), (3.2) đã được đưa về bài toán Côsy (3.7), (3.8) và phương trình rẽ nhánh (3.9). Có thể thấy ngay rằng $a = 0, \lambda = \lambda_0$ là một nghiệm của (3.9). Khi $a \rightarrow 0$ và $\lambda \rightarrow \lambda_0$ từ (3.7), (3.8) ta được phương trình:

$$(A(\xi)v_\xi)_\xi + f_\varphi(\varphi_0, \xi, \lambda)v = 0, \quad (3.10)$$

$$v(\xi_1) = 0; \quad v_\xi(\xi_1) = 1. \quad (3.11)$$

Bài toán (3.10), (3.11) có nghiệm không tầm thường $v(\xi, 0, \lambda_0)$ thỏa mãn điều kiện $v_\xi(\xi_2) = 0$. Vì (3.10), (3.11) trùng với (3.3), (3.4), (3.5) nên có thể viết

$$v(\xi, 0, \lambda_0) \equiv u(\xi). \quad (3.12)$$

Nghiên cứu phương trình rẽ nhánh (3.9) tại lân cận $(a, \lambda) = (0, \lambda_0)$ khai triển Taylo (3.9) ta được:

$$b(a, \lambda) = b_a(0, \lambda_0)a + b_\lambda(0, \lambda_0)(\lambda - \lambda_0) + \frac{1}{2}b_{aa}(0, \lambda_0)a^2 + \frac{1}{2}b_{\lambda\lambda}(0, \lambda_0)(\lambda - \lambda_0)^2 + \dots, \quad (3.13)$$

có thể tìm các hệ số $b_a, b_\lambda, b_{aa}, b_{\lambda\lambda}, \dots$ của (3.13) bằng cách đạo hàm (3.7), (3.8) theo a và λ . Dễ dàng kiểm tra khi (3.1), (3.2) có dạng (1.7), (1.8) thì $b_\lambda(0, \lambda_0) \neq 0$. Khi đó từ (3.13) suy ra

$$\lambda - \lambda_0 = -\frac{1}{2} \frac{b_{aa}(0, \lambda_0)}{b_\lambda(0, \lambda_0)} a^2 + O(a^3), \quad (3.14)$$

sau khi biến đổi có thể nhận được

$$\lambda_{aa}(0) = -\frac{b_{aa}(0, \lambda_0)}{b_\lambda(0, \lambda_0)} = -\frac{\int_{\xi_1}^{\xi_2} f_{\varphi\varphi\varphi}(\varphi_0, \xi, \lambda) u_0^4 d\xi}{\int_{\xi_1}^{\xi_2} f_{\varphi\lambda}(\varphi_0, \xi, \lambda) u_0^2 d\xi}, \quad (3.15)$$

ở đây u_0 là nghiệm của (3.10), (3.11) và được xác định theo hệ thức

$$u_0(\xi) = v(\xi, \lambda_0) \quad (3.16)$$

và (3.14) có thể viết dưới dạng:

$$\lambda - \lambda_0 = \lambda_{aa}(0) a^2 + 0(a^3). \quad (3.17)$$

Xét dấu của $\lambda_{aa}(0)$, dễ dàng nhận thấy với $f = [\lambda - q(\xi)] \sin \varphi$; $\varphi_0 = 0$ ta có:

$$f_{\varphi\varphi\varphi}(0) = -[\lambda - q(\xi)] \quad \text{và} \quad f_{\varphi\lambda}(0) = 1.$$

Vậy (3.15) có thể viết dưới dạng sau:

$$\lambda_{aa}(0) = \frac{\int_0^L [\lambda - q(\xi)] u_0^4 d\xi}{3 \int_0^L u_0^2 d\xi}. \quad (3.18)$$

Mẫu số của (3.18) luôn dương và ta chỉ cần xét dấu tử số. Chú ý rằng trong bài toán cụ thể này phương trình tuyến tính hóa (3.10), (3.11) là phương trình Sturm-Liouville dạng cổ điển:

$$(EI(\xi) u_\xi)_\xi + [\lambda - q(\xi)] u = 0, \quad (3.19)$$

$$u(0) = 0; \quad u_\xi(L) = 0, \quad (3.20)$$

từ (3.19) có thể viết $[\lambda - q(\xi)] u = -(EI(\xi) u_\xi)_\xi$, nhân hai vế với u^3 và lấy tích phân, sau khi biến đổi ta được:

$$\int_0^L [\lambda - q(\xi)] u^4 d\xi = 3 \int_0^L EI(\xi) u_\xi^2 \cdot u_\xi^2 d\xi > 0, \quad (3.21)$$

suy ra $\lambda_{aa}(0)$ luôn dương, từ (3.17) có thể nhận được

$$\text{với} \quad \lambda > \lambda_0, \quad a = \pm \left[\frac{\lambda - \lambda_0}{\frac{1}{2} \lambda_{aa}(0)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.22)$$

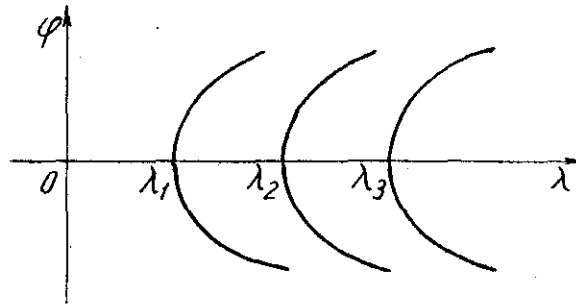
như vậy, với $\lambda > \lambda_0$, có hai nghiệm rẽ nhánh khỏi φ_0 . Những kết quả của phần 3. có thể viết dưới dạng một nhận xét và bức tranh rẽ nhánh được thể hiện trên Hình 2.

Nhận xét: Giả sử $A(\xi)$, $q(\xi)$ dương, khả vi liên tục trong khoảng $\xi_1 < \xi < \xi_2$, xét bài toán:

$$(A(\xi) \varphi_\xi)_\xi + [\lambda - q(\xi)] \sin \varphi = 0, \quad \varphi(\xi_1) = 0; \quad \varphi_\xi(\xi_2) = 0,$$

sẽ tồn tại một số đếm được các điểm rẽ nhánh $\lambda_1; \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ tương ứng với các trị riêng λ_n của bài toán tuyến tính hóa (3.19), (3.20). Khi $\lambda > \lambda_n$ trong một lân cận đủ bé, ngoài nghiệm

$\varphi_0 = 0$ còn tồn tại hai nghiệm khác nhau và khác φ_0 , rẽ nhánh từ φ_0 . Khi $\lambda < \lambda_n$ trong một lân cận đủ bé sẽ không tồn tại các nghiệm rẽ nhánh từ φ_0 .



Hình 2

4. TỒN TẠI NGHIỆM KHÔNG TẦM THƯỜNG Ở XA ĐIỂM RẼ NHÁNH

Chúng ta sẽ chứng minh rằng với mọi $\lambda > \lambda_1$ (λ_1 là giá trị riêng nhỏ nhất của bài toán tuyến tính hóa), tồn tại nghiệm $\varphi \neq 0$ của bài toán (1.7), (1.8) làm cho phiếm hàm năng lượng đạt cực tiểu. Nhận xét này dựa trên tính chất sau: Một phiếm hàm nửa liên tục dưới yếu có tính chất kháng tăng (coercive) xác định trong không gian Hinbe đạt cận dưới đúng trong không gian đó [5, 6].

Sử dụng các tính chất đã được chứng minh trong [5, 6] để dàng nhận thấy phiếm hàm năng lượng $W[\varphi]$ có tính chất nửa liên tục dưới yếu và kháng tăng, xác định trong không gian Xôbôlép $W_2^{(1)}(0, L)$.

Như vậy, tồn tại hàm $\hat{\varphi}$ làm cho phiếm hàm $W[\varphi]$ đạt cực tiểu.

Sử dụng các tính chất đã chứng minh trong [7], để dàng nhận thấy $\hat{\varphi}$ liên tục khả vi và là nghiệm cổ điển của bài toán (1.7), (1.8). Chúng ta còn phải chứng minh rằng với $\lambda > \lambda_1$, $\hat{\varphi} \neq 0$, tức là nghiệm $\varphi_0 = 0$ không cho phiếm hàm $W[\varphi]$ giá trị cực tiểu.

Thật vậy, xét biến phân bậc hai của $W[\varphi]$ tại $\varphi_0 = 0$:

$$\delta^2 W|_{\varphi_0=0} = \int_0^L \{ EI(\xi)(\delta\varphi_\xi)^2 - [\lambda - q(\xi)](\delta\varphi)^2 \} d\xi, \quad (4.1)$$

cần phải chứng minh rằng $\delta^2 W|_{\varphi_0=0}$ không xác định dương tại lân cận $\varphi_0 = 0$. Nếu chọn $\delta\varphi = \varepsilon u_1$ (với u_1 là hàm riêng của bài toán Sturc-Liuvin (3.19), (3.20) ứng với giá trị riêng λ_1) thì:

$$\delta^2 W|_{\varphi_0=0} = \varepsilon^2 \int_0^L (\lambda_1 - \lambda) u_1^2 d\xi < 0, \quad (4.2)$$

như vậy, $\varphi_0 = 0$ không thể là điểm cực trị của bài toán (1.6), Nhận xét được chứng minh.

KẾT LUẬN

Các kết quả trình bày trong bài báo này cho phép xác định điểm rẽ nhánh, số nghiệm cũng như dáng điệu nghiệm tại lân cận điểm rẽ nhánh của bài toán phi tuyến thanh chịu nén. Ngoài ra cũng cho thấy phổ nghiệm của bài toán là tập các giá trị riêng của bài toán tuyến tính tương ứng.

Chúng tôi chân thành cảm ơn Ts. Lê Khánh Châu đã hướng dẫn và thảo luận về nội dung bài báo này.

Địa chỉ:
Viện Cơ Viện KHVN

Nhận ngày 10/10/1989

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. S. P. Timoshenko, J. M. Gere. Theory of elastic stability. Mc Graw-Hill, New York 1961.
2. S. S. Antman. The theory of rods. Handb-Phys., v. 6a/2, Springer-Verlage, Berlin 1972.
3. Edited by J. B. Keller, S. S. Antman. Bifurcation theory and nonlinear eigenvalue problems. Bengiaman INC. New York 1969.
4. В. Л. Бердичевский. Вариационные принципы механики сплошной среды. Наука, Москва 1983.
5. М. М. Вайнберг. Вариационные методы исследования нелинейных операторов, ГИ-ИТЛ. Москва 1956.
6. С. Л. Соболев. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд-во СОАН, СССР. Новосибирск 1962.
7. Н. И. Ахизер. Лекции по вариационному исчислению. Гостехиздат 1955.

РЕЗЮМЕ

ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ И ВЕТВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ О ЦЕНТРАЛЬНО-СЖАТОМ ПРЯМОМ СТЕРЖНЕ

Рассмотрена нелинейная задача о центрально-сжатом прямом стержне переменного поперечного сечения с учетом массы стержня. Решены следующие проблемы:

- 1) Формулировка двойственных вариационных принципов.
- 2) Анализ ветвления решения близки точек бифуркации.
- 3) Доказательство существования нетривиального решения далеко от точек бифуркации.