Tạp chí CƠ HỌC, tập XII, 1990, số 2 (19 — 24)

MỘT SỐ BÀI TOÁN XÁC ĐỊNH DẠNG VỎ TRÒN XOAY KHÔNG CHỊU UỐN

NGÔ HƯƠNG NHU

Vỏ tròn xoay không chịu uốn có nhiều ưu thế và được sử dụng nhiều trong thực tế. Vì vậy việc thiết kế loại vỏ này là một vấn đề được nhiều nhà khoa học Mỹ, Liên xô đã và đang quan tâm đến. Tuy nhiên loại vỏ làm từ vật liệu đàn hồi phi tuyến có độ dày thay đổi còn chưa được xét đến [1].

Bài này nhằm xây dựng mô hình toán học xác định dạng vỏ không chịu uốn có độ dày thay đổi làm từ vật liệu đàn hồi phi tuyến dưới tác dụng của tải trọng cho trước và trường nhiệt độ với giả thiết các tác dụng này không gây nên ứng suất uốn trong vỏ. Trong khuôn khổ lý thuyết vỏ phi tuyến vật lý, tuyến tính hình học, bài báo đưa ra được những phương trình xác định dạng đường sinh và quy luật biến đổi của độ dày vỏ tròn xoay. Giải các phương trình này bằng phương pháp tham số bé với một số trường hợp tải trọng mới, nhận được nghiệm gần đúng dưới dạng giải tích.

1. NHỮNG PHƯƠNG TRÌNH VÀ LIÊN HỆ CƠ BẢN

Liên hệ giữa ứng suất và biến dạng của vật liệu phi tuyến vật lý có dạng [3]:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_s &= \frac{1}{2G(1+\nu)h^*}\left\{(T_s^* - \nu T_\varphi^*) + \frac{2(1+\nu)g_2}{27G^2h^{*2}}[T_s^{*3} + (T_s^* - T_\varphi^*)^3] + C(1+\nu)T\right\}, \\
\varepsilon_\varphi &= \frac{1}{2G(1+\nu)h^*}\left\{(T_\varphi^* - \nu T_s^*) + \frac{2(1+\nu)g_2}{27G^2h^{*2}}[T_\varphi^{*3} + (T_\varphi^* - T_s^*)^3] + C(1+\nu)T\right\},
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

T_s^*, T_φ^* - nội lực xác định từ hệ phương trình cân bằng. Nếu ký hiệu $\eta = \sec\theta$, θ - góc giữa tiếp tuyến với đường sinh của vỏ và trục quay, nghiệm của hệ phương trình cân bằng của vỏ tròn xoay chịu tải trọng không gây uốn và xoắn là:

$$T_s^* = \frac{1}{r^*}\Big[\int_{r_0^*}^{r^*} r^*\Big(Z^* + \frac{X^*}{\sqrt{\eta^2-1}}\Big)\,dr^* + C\Big]\,\eta,$$

$$T_\varphi^* = r^*\eta Z^* + \Big[\int_{r_0^*}^{r^*} r^*\Big(Z^* + \frac{X^*}{\sqrt{\eta^2-1}}\Big)\,dr^* + C\Big]\frac{d\eta}{dr}. \qquad (1.2)$$

Theo lý thuyết vỏ tuyến tính hình học, từ điều kiện không có ứng suất uốn trong vỏ ta có các đại lượng biểu thị sự thay đổi bán kính cong của vỏ $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2 = 0$. Từ đây suy ra điều kiện không uốn dưới dạng biến dạng là:

$$\frac{d}{dr^*}(\varepsilon_\varphi r^*) = \varepsilon_s. \qquad (1.3)$$

2. BÀI TOÁN XÁC ĐỊNH DẠNG ĐƯỜNG SINH CỦA VỎ KHI CHO TRƯỚC NGOẠI LỰC, TRƯỜNG NHIỆT VÀ QUY LUẬT BIẾN ĐỔI CỦA ĐỘ DÀY $h = h(r)$.

Từ (1.1), (1.2), (1.3) nhận được phương trình vi tích phân dưới dạng không thứ nguyên xác định dạng đường sinh của vỏ:

$$\begin{aligned}(1+\nu)\eta\Big(rZ - \frac{I}{r}\Big)(1+\nu)I\frac{d\eta}{dr} + \lambda\frac{(1+\nu)H}{h^2}\Big[\Big(r\eta Z + I\frac{d\eta}{dr}\Big)^3 - \Big(\frac{I\eta}{r}\Big)^3 + 2\Big(r\eta Z + I\frac{d\eta}{dr} - \frac{I\eta}{r}\Big)^3 - \\ -\frac{rh'}{h}\Big(r\eta Z + I\frac{d\eta}{dr} - \frac{\nu I\eta}{r}\Big)\Big] - \frac{3H\lambda(1+\nu)h'r}{h^3}\Big[\Big(r\eta Z + I\frac{d\eta}{dr}\Big)^3 + \Big(r\eta Z + I\frac{d\eta}{dr} - \frac{I\eta}{r}\Big)^3\Big] + \\ + \Big\{r + \frac{3r\lambda(1+\nu)H}{h^2}\Big[\Big(r\eta Z + I\frac{d\eta}{dr} - \frac{I\eta}{r}\Big)^2 + \Big(r\eta Z + I\frac{d\eta}{dr}\Big)^2\Big]\Big\}\Big[\frac{d}{dr}(r\eta Z) + \frac{dI}{dr}\frac{d\eta}{dr} + I\frac{d^2\eta}{dr^2}\Big] - \\ -\Big[\nu r + \frac{3\lambda r(1+\nu)H}{h^2}\Big(r\eta Z + I\frac{d\eta}{dr} - \frac{I\eta}{r}\Big)^2\Big]\frac{d}{dr}\Big(\frac{I\eta}{r}\Big) + r\frac{dT}{dr} - \frac{rh'}{h}T = 0,\end{aligned}$$

$$I = \int_{r_0}^{r} r\Big(Z + \frac{X}{\sqrt{\eta^2-1}}\Big)\,dr + C$$

$\lambda = 2g_2/27\mu$ là đại lượng bé thể hiện mức độ phi tuyến vật lý của vật liệu, T trường nhiệt độ.

Tìm η dưới dạng chuỗi theo tham số bé:

$$\eta(r) = \eta_0 + \lambda\eta_1 + \lambda^2\eta_2 + 0(\lambda^3)$$

Khi h thay đổi theo quy luật $\frac{h}{h_0} = \big(\frac{r}{r_0}\big)^n$, vỏ biến dạng bởi tải trọng dọc trục $C \neq 0$ và tải trọng dạng

$$X = 0, \qquad Z = \sum_{k=-1}^{m} q_k r^k. \qquad (2.1)$$

phương trình vi tích phân trên đưa được về dưới dạng hệ phương trình vi phân bậc hai dạng Phôc

$$r^2 I_0 \frac{d^2\eta_i}{dr^2} + r\Big[(1-n)I_0 + 2\sum_{k=-1}^{m} q_k r^{k+2}\Big]\frac{d\eta_i}{dr} + \Big[\sum_{k=-1}^{m} kq_k r^{k+2} +$$

$$+ (2-n)\sum_{k=-1}^{m} q_k r^{k+2} + (\nu n - 1)I_0\Big]\eta_i = F_i, \qquad i = \overline{0,2} \tag{2.2}$$

ở đây

$$I_0 = \sum_{k=-1}^{m} q_k \frac{r^{k+2} - r_0^{k+2}}{k+2} + C, \qquad F_0 = r\Big(nT - r\frac{dT}{dr}\Big),$$

F_1, F_2 - là những biểu thức hiển chứa nghiệm đã nhận được từ phương trình trước liền đó.

Nghiệm cơ sở được tìm dưới dạng:

$$\eta_1^* = r^{\rho_1}\sum_{i=0}^{\infty} C_i r^i, \qquad \eta_2^* = r^{\rho_2}\sum_{i=0}^{\infty} C_i^* r^i, \tag{2.3}$$

khi $\rho_1 - \rho_2$ không nguyên, trong đó ρ_1, ρ_2 là nghiệm của phương trình đặc trưng

$$\rho_{1,2} = \frac{1}{2}\big[n \pm \sqrt{n^2 - 4(n\nu - 1)}\big]$$

Đặt (2.3) vào phương trình đầu của hệ (2.2), so sánh hệ số cùng bậc r với 0 ta tìm được biểu thức tính C_i sau:

$$\begin{aligned}
C_0 &= 1,\\
C_i &= \Big(C_0\frac{q_{i-2}}{i} + C_1\frac{q_{i-3}}{i-1} + \cdots + C_{i-1}\frac{q_{-1}}{1}\Big)/D, \quad 1 \le i \le m+2,\\
C_{m+i} &= \Big(C_{i-2}\frac{q_m}{m+2} + C_{i-1}\frac{q_{m-1}}{m+1} + \cdots + C_{m+i-1}\frac{q_{-1}}{1}/D, \quad i \ge 3,\\
D &= \sum_{k=-1}^{m} q_k\frac{r_0^{k+2}}{k+2} - C.
\end{aligned}$$

Với các hệ số trên chuỗi (2.3) hội tụ về một hàm xác định dạng:

$$\begin{aligned}
&\eta_1^* = r^{\rho_1}S, \qquad \eta_2^* = r^{\rho_2}S,\\
&S = \frac{1}{\Big[1 - \dfrac{q_m r^{m+2}}{D(m+2)} - \dfrac{q_{m-1}r^{m+1}}{D(m+1)} - \cdots - \dfrac{q_{-1}r}{D}\Big]}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Biết các nghiệm cơ sở η_1^*, η_2^*, nghiệm tổng quát của hệ phương trình (2.2) được viết dưới dạng:

$$\begin{aligned}
&\eta_i = \eta_2^*\int_{r_0}^{r}\frac{\eta_1^* k_1(r)}{W(r)}dr - \eta_1^*\int_{r_0}^{r}\frac{\eta_2^* k_i(r)}{W(r)}dr + A_i\eta_1^* + B_i\eta_2^*, \quad i = \overline{0,2},\\
&W = \eta_1^*(\eta_2^*)' - \eta_2^*(\eta_1^*)', \quad k_i = F_i(r)/M, \quad M = r^2 I_0,
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Biết được η, dạng vỏ xác định bằng tích phân phương trình

$$\frac{dr}{dz} = \sqrt{\eta^2 - 1}$$

Ở đây r, z là đại lượng không thứ nguyên biểu thị khoảng cách từ một điểm trên đường sinh đến trục quay của vỏ và tọa độ z của điểm đó.

Trường hợp $q_{-1} = 0$, $m = 0$ tương ứng với $Z = q_0 = const$, biểu thức (2.4) trùng với kết qủa đã có trong [3] và các đường sinh có dạng sau (*Hình 1*):

Khi $m = 0$

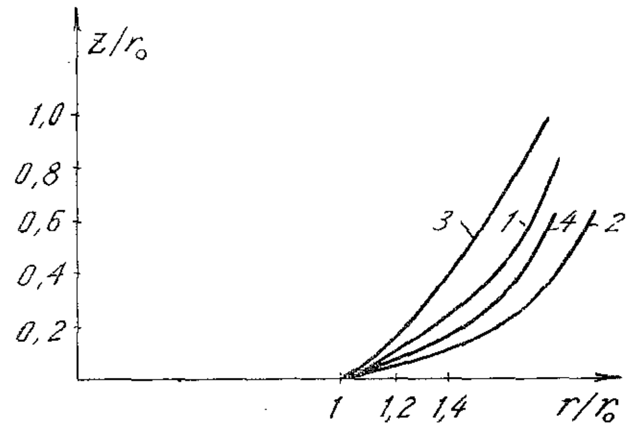
$$Z = \sum_{k=-1}^{0} q_k r^k = \frac{q_{-1}}{r} + q_0 \Rightarrow S = 1/\left(1 - \frac{q_0 r^2}{2D} - \frac{q_{-1} r}{D}\right),$$

Khi $m = 1$

$$Z = \sum_{k=-1}^{1} q_k r^k = \frac{q_{-1}}{r} + q_0 + q_1 r \Rightarrow S = 1/\left(1 - \frac{q_1 r^2}{3D} - \frac{q_0 r^2}{2D} - \frac{q_{-1} r}{D}\right).$$

Biết S dễ dàng tìm được η_1^*, η_2^* và η.

Tương tự có thể viết các nghiệm η cụ thể trong từng trường hợp đặt tải riêng dạng (2.1). Biết η, tích phân (2.6) nhận được dạng đường sinh của vỏ . Bài toán như vậy đã được giải trọn vẹn.



Hình1

Dạng đường sinh của vỏ làm từ vật liệu đồng nhôm $g_2 = 0,04.10^6$, $\nu = 0,33$ *với các điều kiện hình học và lực khác nhau:*

1. $\eta_A = 2$; $n = 0.5$; $\tilde{C} = 0.0003$; $\tilde{Z} = 0,0001(\eta_A = |\eta|_{r=r_0})$,
2. $\eta_A = 4$; $n = 2$; $\tilde{C} = 0,0005$; $\tilde{Z} = 0,0001$,
3. $\eta_A = 1,5$; $n = 0,5$; $\tilde{C} = 0,0003$; $\tilde{Z} = 0,0001$,
4. $\eta_A = 2$; $n = 4$; $\tilde{C} = 0,0003$; $\tilde{Z} = 0,0001$

Ở đây $\tilde{X} = 0$, $\tilde{C}$, $\tilde{Z}$ là các đại lượng không thứ nguyên của các lực X, C, Z.

3. BÀI TOÁN XÁC ĐỊNH QUI LUẬT BIẾN ĐỔI ĐỘ DÀY CỦA VỎ TRÒN XOAY KHI BIẾT TRƯỚC TẢI TRỌNG, NHIỆT ĐỘ VÀ DẠNG ĐƯỜNG SINH CỦA VỎ

Nếu dạng đường sinh cho trước có nghĩa là $\eta = \sec\theta$ là hàm xác định của r. Khi đó dạng không uốn của vỏ có thể được nhận do qui luật biến đổi độ dày.

Dạng không thứ nguyên của phương trình xác định độ dày là

$$\frac{dh}{dr}\Big[-\frac{1}{h}\frac{r}{2(1+\nu)}(T_\varphi - \nu T_s) - \frac{3H}{2h^3}\lambda r\big(T_\varphi^3 + (T_\varphi - T_s)^3\big)\Big] +$$
$$+\frac{\lambda H}{2h^2}\frac{d}{dr}\Big[r\big(T_\varphi^3 + (T_\varphi - T_s)^3\big)\Big] - \frac{\lambda H}{2h^2}\big[T_s^3 + (T_s - T_\varphi)^3\big] =$$
$$= \frac{1}{2(1+\nu)}(T_s - \nu T_\varphi) - \frac{1}{2(1+\nu)}\frac{d}{dr}\big[r(T_\varphi - \nu T_s)\big].$$

Giải phương trình này bằng phương pháp tham số bé $h = h_0 + \lambda h_1 + \lambda^2 h_2 + 0(\lambda^3)$ nhận được nghiệm gần đúng:

$$h(r) = h_0\frac{r}{r_0}\left|\frac{T_\varphi - \nu T_s}{T_\varphi^0 - \nu T_s^0}\right| exp\Bigg\{-\int_{r_0}^{r}\frac{T_s - \nu T_\varphi}{r(T_\varphi - \nu T_s)}dr +$$
$$+\lambda exp\Big(-\int_{r_0}^{r} a(r)dr\Big)\Big[\int_{r_0}^{r} f_1(r)\, exp\Big(\int_{r_0}^{r} a(r)dr\Big)dr\Big] +$$
$$+\lambda^2 exp\Big(-\int_{r_0}^{r} a(r)dr\Big)\Big[\int_{r_0}^{r} f_2(r)\, exp\Big(\int_{r_0}^{r} a(r)dr\Big)dr\Big]\Bigg\} + 0(\lambda^3).$$

ở đây h_0, T_φ^0, T_s^0 - giá trị h, T_φ, T_s với $r = r_0$, $a(r)$, $f_1(r)$, $f_2(r)$ - các hàm có dạng hiển.

Thí dụ cụ thể được xét với bán cầu hở bán kính $R(\eta = r/R)$ trên biên $r = R$ tác dụng lực phân bố đều song song với trục quay. Khi đó:

$$h(r) = h_0 + \lambda H\frac{9(T_s^0)^2R^4}{h^0}\left(\frac{1}{r^4} - \frac{1}{R^4}\right) + \frac{\lambda^2H^2 2(T_s^0)^4R^4}{h_0^3}\left(\frac{1}{r^4} - \frac{1}{R^4} - \frac{2}{r^8} + \frac{2}{R^8}\right) + 0(\lambda^3).$$

Đối với tải trọng dạng $Z = \sum_{k=-1}^{m} q_k r^k$, $X = 0$. theo công thức trên có thể tính được độ dày vỏ. Chú ý trong thực tế phải kiểm tra điều kiện đối với vỏ mỏng $h(r)/r \leq 1/20$.

KẾT LUẬN

Các phương trình vi phân và vi tích phân xác định độ dày và dạng đường sinh của vỏ tròn xoay không chịu uốn làm từ vật liệu đàn hồi phi tuyến đã được thiết lập. Bằng phương pháp tham số bé với một số dạng tải trọng, phương trình vi tích phân đưa được về hệ phương trình vi phân bậc 2 dạng Phôc và nhận được nghiệm giải tích, tương ứng với hàm η có liên quan đến dạng đường sinh của vỏ. Các bài toán được minh họa bằng thí dụ cụ thể.

Địa chỉ:
Viện Cơ Viện KHVN

Nhận ngày 21/7/1989

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Гуревич В.И., Калинин В.С., ДАН СССР, с.1085-1088, Т.256, №5, 1981.
2. Мартыненко М.Д., Нго Хыонг Нью, Мороз С.В., ДАН БССР, с.879-882, Т.30, №10, 1986.
3. Мартыненко М.Д., Нго Хыонг Нью, Мороз С.В., ДАН БССР, с.619-622, Т.31, №7, 1987.

РЕЗЮМЕ

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФОРМ
ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ, РАБОТАЮЩИХ БЕЗ ИЗГИБА

Выведены и решены методом малого параметра интегро-дифференциальное уравнение для определения функции, характеризующей меридиана и уравнение для определения закона изменения толщины безыгибных оболочек вращения, выполненных из нелиней-упругих материалов под действием некоторых типов нагрузок.

DAO ĐỘNG TRONG HỆ PHI TUYẾN ...

(Tiếp trang 5)

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Ю. А. Митропольский, Д. И. Мартынюк. Периодические и квазипериодические колебания системы с запаздыванием. Киев 1972.
2. В. П. Рубаник. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. Наука,М. 1979.
3. Nguyen Van Dao. Non-linear oscillations of high order systems. NCSR SRV, Hanoi, 1979.

SUMMARY

OSCILLATIONS IN THE FIRST ORDER NON-LINEAR SYSTEMS WITH DELAY.
I. AUTONOMOUS SYSTEMS

Contrary to the systems without delay, in the first order systems with delay may be an undamped oscillation, which is constructed in this paper by means of the asymptotic method. The self-excited oscillations in the Duffing and Van-De-Pol systems are considered.