Tạp chí CƠ HỌC, tập XII, 1990, số 2 (6 — 12)

MỘT SỐ KHẢO SÁT TOÁN HỌC HỆ PHƯƠNG TRÌNH MÔ TẢ VẬN TẢI BÙN CÁT

ĐẶNG HỮU CHUNG

1. MỞ ĐẦU

Các khảo sát đặc trưng của hệ phương trình Saint-Venant cùng với phương trình biến dạng đáy đã được de Vries ([1], [7]) và Kyozo Suga [2] nghiên cứu. Các tác giả đã tìm được ba giá trị đặc trưng $\overline{\lambda}_1$, $\overline{\lambda}_2$ và $\overline{\lambda}_3$. Trong đó $\overline{\lambda}_1$ biểu thị tốc độ lan truyền biến dạng đáy, $\overline{\lambda}_{2,3}$ là tốc độ lan truyền kích động bề mặt. Cũng từ kết quả này cho thấy trong điều kiện dòng chảy êm $(F = \frac{U}{\sqrt{gH}} < 1)$ thì $\overline{\lambda}_2 < 0$, nghĩa là tốc độ lan truyền kích động $\overline{\lambda}_2$ truyền ngược chiều dòng chảy. Theo de Vries [7] thì những biến đổi ở đáy được xem như không gây ảnh hưởng đến kích động bề mặt và khi số Froude đủ bé $(F < 0,6 - 0,8)$ thì $\overline{\lambda}_{3,2} \simeq U \pm \sqrt{gH} \gg \overline{\lambda}_1$. Sau đó J. A. Cunge và N. Perdreau [3] đã xét trường hợp dòng tựa đều và cũng tìm được hai giá trị đặc trưng là

$$\overline{\lambda}_3 = \infty, \qquad \overline{\lambda}_1 = \frac{U\dfrac{\partial G_x}{\partial U} - H\dfrac{\partial G_x}{\partial H}}{H(1-F^2)}. \tag{1,1}$$

Nếu xem G_x không phụ thuộc vào H thì (1.1) trùng với kết quả của de Vries.

Trong phạm vi bài báo này chúng tôi tiến hành khảo sát đặc trưng hệ phương trình mô tả vận tải bùn cát có tính đến sự trao đổi giữa bùn cát lơ lửng và bùn cát đáy mới được thành lập [4].

2. HỆ PHƯƠNG TRÌNH MÔ TẢ VẬN TẢI BÙN CÁT VỚI ĐÁY THAY ĐỔI

Mô hình toán học mô tả sự chuyển động của dòng chảy có vận tải bùn cát lơ lửng, bùn cát đáy và biến hình lòng dẫn gồm [4]:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial H}{\partial t}+U\frac{\partial H}{\partial x}+H\frac{\partial U}{\partial x}=0,\\
&\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{2}gH\frac{\gamma}{\rho}\frac{\partial\overline{C}}{\partial x}+g\frac{\partial H}{\partial x}+g\frac{\rho_b}{\rho}\frac{\partial Z_b}{\partial x}+\frac{\gamma}{\rho\rho_s}\Big(\frac{\partial\overline{J}_x}{\partial t}+U\frac{\partial\overline{J}_x}{\partial x}\Big)=-g\frac{U|U|}{C^2H},\\
&\frac{\partial\overline{C}}{\partial t}+U\frac{\partial\overline{C}}{\partial x}+\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial\overline{J}_x}{\partial x}=\frac{1}{H\rho_s}J_b,\\
&\frac{\partial\overline{J}_x}{\partial t}+U\frac{\partial\overline{J}_x}{\partial x}+\gamma\overline{C}\Big(\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}\Big)+D\overline{C}\frac{\partial\overline{C}}{\partial x}=-\frac{\overline{C}}{k}\overline{J}_x,\\
&\frac{\partial Z_b}{\partial t}+\frac{\partial G_x}{\partial x}=-\frac{1}{\rho_s}J_b,\\
&G_x=f(U,H).
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Trong đó $\overline{C}$, U, $\overline{J}_x$ là các đại lượng trung bình theo chiều cao của nồng độ, vận tốc và dòng khuếch tán theo phương x, H độ sâu, Z_b độ cao đáy dòng, ρ_w, ρ_s các khối lượng riêng của nước và hạt, γ hiệu giữa khối lượng riêng của hạt và nước, C hệ số Chezy, g gia tốc trọng trường, G_x tốc độ tải bùn cát đáy, D hệ số khuếch tán, k hệ số thứ hai xuất hiện trong phương trình xác định dòng khuếch tán suy rộng. Chỉ số $_b$ chỉ các đại lượng ở đáy.

3. DẠNG KHÔNG THỨ NGUYÊN CỦA HỆ CÁC PHƯƠNG TRÌNH (2.1)

Trên cơ sở lý thuyết thứ nguyên ([5], [6]) chúng ta biến đổi (2.1) về dạng không thứ nguyên bằng cách sử dụng phép biến đổi:

$$
\begin{aligned}
&x=L_0x',\quad t=\frac{L_0}{\sqrt{gH_0}}t',\quad U=\sqrt{gH_0}u',\quad H=H_0h',\\
&Z_b=H_0Z',\quad G_x=Q_bq,\quad \overline{J}_x=\rho_s\frac{Q_s}{H_0}\cdot J'_x.
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Trong đó Q_s, Q_b, H_0, L_0, $\sqrt{gH_0}$ lần lượt là các đại lượng đặc trưng của tốc độ tải bùn cát lơ lửng, tốc độ tải bùn cát đáy, độ sâu, chiều dài dòng chảy và vận tốc dòng tương ứng.

Sau khi thay (3.1) vào (2.1) và bỏ các dấu ($'$) và ( ) ta nhận được hệ phương trình với các biến không thứ nguyên:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial h}{\partial t}+h\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial h}{\partial x}=0,\\
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\gamma}{\overline{\rho}}h\frac{\partial C}{\partial x}+\frac{\rho_b}{\overline{\rho}}\frac{\partial Z}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\gamma\beta_1}{\overline{\rho}}\Big(\frac{\partial J_x}{\partial t}+u\frac{\partial J_x}{\partial x}\Big)=-C_f\frac{u|u|}{\chi h},\\
&\frac{\partial C}{\partial t}+u\frac{\partial C}{\partial x}+\beta_1\frac{\partial J_x}{\partial x}=\frac{L_0}{H\rho_s\sqrt{gH_0}}\cdot J_b,\\
&\frac{\rho_s\beta_1}{\gamma}\Big(\frac{\partial J_x}{\partial t}+u\frac{\partial J_x}{\partial x}\Big)+C\Big(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}\Big)+EC\frac{\partial C}{\partial x}=-\frac{\rho_sQ_sJ_xC}{kH_0g\chi\gamma},\\
&\frac{\partial Z}{\partial t}+\beta_2\Big(\frac{\partial q}{\partial h}\cdot\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\Big)=-\frac{L_0}{\rho_sH_0\sqrt{gH_0}}\cdot J_b,
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Trong đó:

$$\chi = \frac{H_0}{L_0}, \quad \beta_1 = \frac{Q_s}{\sqrt{gH_0} \cdot H_0}, \quad \beta_2 = \frac{Q_b}{\sqrt{gH_0} \cdot H_0} \ll 1, \quad E = \frac{D}{gH_0\gamma}, \quad C_f = \frac{g}{C^2}.$$

Lưu ý rằng trong (3.2) J_b là đại lượng có thứ nguyên.

4. CÁC KHẢO SÁT ĐẶC TRƯNG TOÁN HỌC

a. Trường hợp tổng quát

Hệ các phương trình (3.2) được viết dưới dạng vectơ:

$$A\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + B\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} = \vec{F}, \tag{4.1}$$

với

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} h \\ u \\ C \\ J_x \\ Z \end{bmatrix}, \qquad \vec{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ -C_f\dfrac{u|u|}{\chi h} \\ \dfrac{L_0}{H\rho_s\sqrt{gH_0}}J_b \\ -\dfrac{\rho_s Q_s J_x C}{kH_0 g\chi\gamma} \\ -\dfrac{L_0}{H\rho_s\sqrt{gH_0}}J_b \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{\gamma}{\bar{\rho}}\beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & \dfrac{\rho_s}{\gamma}\beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} u & h & 0 & 0 & 0 \\ 1 & u & \dfrac{1}{2}\dfrac{\gamma}{\bar{\rho}}h & \dfrac{\gamma}{\bar{\rho}}\beta_1 u & \dfrac{\rho_b}{\bar{\rho}} \\ 0 & 0 & u & \beta_1 & 0 \\ 0 & Cu & CE & \dfrac{\rho_s}{\gamma}\beta_1 u & 0 \\ \beta_2\dfrac{\partial q}{\partial h} & \beta_2\dfrac{\partial q}{\partial u} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

Phương trình đặc trưng là:

$$\det(B - \lambda A) = 0. \tag{4.3}$$

Chú ý tới (4.2) từ (4.3) ta nhận được phương trình:

$$f(X) + \beta_2 g(X) = 0, \tag{4.4}$$

Trong đó:

$$f(X) = \frac{\gamma}{\bar{\rho}}(u - X)\big[(C - \delta)X^4 + \big(e + h(\delta - \tfrac{1}{2}C)\big)X^2 - he\big],$$

$$g(X) = \frac{\rho_b}{\bar{\rho}}\big(CE - \frac{\rho_s}{\gamma}X^2\big)\big(X\frac{\partial q}{\partial u} - h\frac{\partial q}{\partial h}\big),$$

$$e = \frac{\bar{\rho}EC}{\gamma} > 0, \quad \delta = \frac{\rho_s\bar{\rho}}{\gamma^2} > C, \quad X = u - \lambda.$$

Bây giờ chúng ta tiến hành giải xấp xỉ (4.4) theo tham số bé β_2. Ta tìm nghiệm của (4.4) dưới dạng:

$$X = X^0 + \beta_2 X^1 + 0(\beta_2). \tag{4.5}$$

i. Xấp xỉ bậc không:

Thay (4.5) vào (4.4) và bỏ qua các số hạng chứa β_2 ta được phương trình xác định X^0:

$$f(X^0) = 0 \quad \text{hay} \quad (u - X^0) \cdot P(X^0) = 0, \tag{4.6}$$

với

$$P(X^0) = (C - \delta)(X^0)^4 + \left[e + h(\delta - \frac{1}{2}C)\right](X^0)^2 - he. \tag{4.7}$$

Trước hết ta nhận được một nghiệm $X_1^0 = u$. Theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$[e + h(\delta - C)]^2 \geq 4he(\delta - C).$$

Do đó $\forall e \geq 0$ phương trình $P(X^0) = 0$ luôn luôn có bốn nghiệm:

$$X_{2,3}^0 = \pm \left(\frac{e + h(\delta - \frac{1}{2}C) + \sqrt{\left[e + h(\delta - \frac{1}{2}C)\right]^2 - 4he(\delta - C)}}{2(\delta - C)} \right)^{1/2} \tag{4.8}$$

$$X_{4,5}^0 = \pm \left(\frac{e + h(\delta - \frac{1}{2}C) - \sqrt{\left[e + h(\delta - \frac{1}{2}C)\right]^2 - 4he(\delta - C)}}{2(\delta - C)} \right)^{1/2}, \tag{4.9}$$

Chuyển về dạng thứ nguyên ta được:

$$\overline{X}_{2,3}^0 = \pm \left(\frac{\overline{\rho} D\overline{C} + gH(\rho_s\overline{\rho} - \frac{1}{2}\overline{C}\gamma^2) + \sqrt{\left[\overline{\rho} D\overline{C} + gH(\rho_s\overline{\rho} - \frac{1}{2}\overline{C}\gamma^2)\right]^2 - 4gH\overline{\rho} D\overline{C}(\rho_s\overline{\rho} - \overline{C}\gamma^2)}}{2(\rho_s\overline{\rho} - \overline{C}\gamma^2)} \right)^{1/2}, \tag{4.10}$$

$$\overline{X}_{4,5}^0 = \pm \left(\frac{\overline{\rho} D\overline{C} + gH(\rho_s\overline{\rho} - \frac{1}{2}\overline{C}\gamma^2) - \sqrt{\left[\overline{\rho} D\overline{C} + gH(\rho_s\overline{\rho} - \frac{1}{2}\overline{C}\gamma^2)\right]^2 - 4gH\overline{\rho} D\overline{C}(\rho_s\overline{\rho} - \overline{C}\gamma^2)}}{2(\rho_s\overline{\rho} - \overline{C}\gamma^2)} \right)^{1/2}, \tag{4.11}$$

ii. Xấp xỉ bậc một:

Thay (4.5) vào (4.4) với các X_i^0 đã biết và bỏ qua các số hạng bậc hai hay bậc cao hơn của β_2 ta nhận được:

$$X_i^1 = -\frac{\rho_b}{\gamma} \frac{\left(CE - \frac{\rho_s}{\gamma}(X_i^0)^2\right)\left(X_i^0 \frac{\partial q}{\partial u} - h\frac{\partial q}{\partial h}\right)}{2X_i^0(u - X_i^0)\left[2(C - \delta)(X_i^0)^2 + e + h(\delta - \frac{1}{2}C)\right] - P(X_i^0)}, \quad (i = \overline{1,5}). \tag{4.12}$$

Chú ý $P(X_i^0) = 0$ khi $i = \overline{2,5}$. Thay $X = u - \lambda$ vào (4.5) và sử dụng (4.8), (4.9) và (4.12) ta nhận được 5 giá trị đặc trưng :

- Tốc độ lan truyền biến dạng đáy :

$$\lambda_1 = \beta_2 \frac{\rho_b}{\gamma} \frac{\left(\frac{\rho_s}{\gamma}u^2 - EC\right)\left(u\frac{\partial q}{\partial u} - h\frac{\partial q}{\partial h}\right)}{P(u)}. \tag{4.13}$$

- Tốc độ lan truyền kích động sóng mặt :

$$\lambda_{2,3} = u \mp \left(\frac{e + h(\delta - \frac{1}{2}C) + \sqrt{\left[e + h(\delta - \frac{1}{2}C)\right]^2 - 4he(\delta - C)}}{2(\delta - C)} \right)^{1/2} - \beta_2 X^1_{2,3}. \tag{4.14}$$

- Tốc độ lan truyền nồng độ:

$$\lambda_{4,5} = u \mp \left(\frac{e + h(\delta - \frac{1}{2}C) - \sqrt{\left[e + h(\delta - \frac{1}{2}C)\right]^2 - 4he(\delta - C)}}{2(\delta - C)} \right)^{1/2} - \beta_2 X^1_{4,5}. \tag{4.15}$$

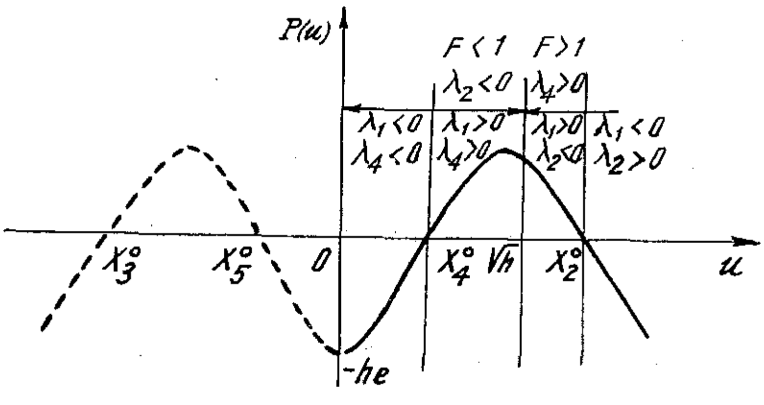
Chuyển về dạng có thứ nguyên ta được:

$$\overline{\lambda}_1 = \frac{\rho_b g(\rho_s U^2 - D\overline{C})\left(U\frac{\partial G_x}{\partial U} - H\frac{\partial G_x}{\partial H}\right)}{(\gamma^2\overline{C} - \rho_s\overline{\rho})U^4 + \left(\overline{\rho}D\overline{C} + gH(\rho_s\overline{\rho} - \frac{1}{2}\overline{C}\gamma^2)\right)U^2 - gH\overline{\rho}D\overline{C}}, \tag{4.16}$$

$$\overline{\lambda}_i = U - \overline{X}_i^0 + \frac{\rho_b g(D\overline{C} - \rho_s(\overline{X}_i^0)^2)(\overline{X}_i^0\frac{\partial G_x}{\partial U} - H\frac{\partial G_x}{\partial H})}{2\overline{X}_i^0(U - \overline{X}_i^0)\left[2(\overline{C}\gamma^2 - \rho_s\overline{\rho})(\overline{X}_i^0)^2 + \overline{\rho}D\overline{C} + gH(\rho_s\overline{\rho} - \frac{1}{2}\overline{C}\gamma^2)\right]}, \quad (i = \overline{2,5}). \tag{4.17}$$

Từ đây nhận thấy rằng cả bùn cát đáy và bùn cát lơ lửng đều ảnh hưởng đến các tốc độ đặc trưng. Bây giờ chúng ta thử phân tích sự phụ thuộc của các giá trị đặc trưng vào số Froude.

Trước hết chúng ta nhận thấy rằng các số hạng $\beta_2 X_i^1$ trong (4.14), (4.15) là rất bé nên được xem không góp phần vào sự thay đổi dấu của các λ_i. Do đó $\lambda_3 > 0$ và $\lambda_5 > 0$ với mọi F, nghĩa là hai tốc độ này luôn luôn truyền cùng chiều dòng chảy. Dấu của các λ_1, λ_2, λ_4 được phân tích trên đồ thị :



Hình 1

Miền dấu của λ_1 λ_2 và λ_4 với $\left(\frac{\rho_s}{\gamma}u^2 - EC\right)\left(u\frac{\partial q}{\partial u} - h\frac{\partial q}{\partial h}\right) > 0$

b. Trường hợp $E = 0$

Trong trường hợp này các nghiệm đặc trưng là:

$$\lambda_1 = \beta_2 \frac{\rho_s \rho_b}{\gamma^2 h} \frac{u\frac{\partial q}{\partial u} - h\frac{\partial q}{\partial h}}{\left(\delta - \frac{1}{2}C\right) - (\delta - C)F^2}, \qquad \lambda_{4,5} = u,$$

$$\lambda_{2,3} = u \mp \sqrt{\frac{h\left(\delta - \frac{1}{2}C\right)}{\delta - C}} + \beta_2 \frac{\rho_s \rho_b}{\gamma^2} \frac{h\frac{\partial q}{\partial h} - X^0_{2,3}\frac{\partial q}{\partial u}}{2(C-\delta)(u - X^0_{2,3}) - (C-\delta)(X^0_{2,3})^2 - h\left(\delta - \frac{1}{2}C\right)}.$$

Chuyển về dạng có thứ nguyên ta có:

$$\overline{\lambda}_{4,5} = U, \qquad \overline{\lambda}_1 = \frac{\rho_s \rho_b}{\gamma^2 H} \frac{U\frac{\partial G_x}{\partial U} - H\frac{\partial G_x}{\partial H}}{\left(\delta - \frac{1}{2}\overline{C}\right) - (\delta - \overline{C})F^2}, \tag{4.18}$$

$$\overline{\lambda}_{2,3} = U \mp \sqrt{\frac{gH\left(\rho_s\overline{\rho} - \frac{1}{2}\overline{C}\gamma^2\right)}{\rho_s\overline{\rho} - \overline{C}\gamma^2}} - \frac{\rho_s \rho_b g \overline{X}^0_{2,3}\left(\overline{X}^0_{2,3}\frac{\partial G_x}{\partial U} - H\frac{\partial G_x}{\partial H}\right)}{2(U - \overline{X}^0_{2,3})\left[2(\overline{C}\gamma^2 - \rho_s\overline{\rho})(\overline{X}^0_{2,3})^2 + gH\left(\rho_s\overline{\rho} - \frac{1}{2}\overline{C}\gamma^2\right)\right]}. \tag{4.19}$$

Nếu xem $\overline{C} = 0$ và $\beta_2 = 0$ thì (4.18) trùng với kết quả của J. A. Cunge và N. Perdreau [3] và (4.19) trùng với kết quả của de Vries [7], nghĩa là các tác giả xem rằng bùn cát lơ lửng và bùn cát đáy không ảnh hưởng đến các tốc độ đặc trưng.

c. Trường hợp dòng bùn cát đáy là chủ yếu

Trong trường hợp này $\beta_1 \leq \beta_2 \leq 1$ và xem ảnh hưởng của J_x không đáng kể và có thể bỏ qua các số hạng của J_x trong (3.2). Do đó (3.2) chỉ còn 4 phương trình độc lập với 4 ẩn h, u, C và z, nghĩa là không sử dụng phương trình dòng khuếch tán. Phương trình đặc trưng là:

$$X\left[-(h - X^2)\left(u - X + \frac{\rho_b}{\overline{\rho}}\beta_2\frac{\partial q}{\partial h}\right) + \frac{\rho_b}{\overline{\rho}}\beta_2\left(\frac{\partial q}{\partial u} - X\frac{\partial q}{\partial h}\right)X\right] = 0. \tag{4.20}$$

Ta cũng sử dụng phương pháp giải xấp xỉ theo tham số bé β_2 và nhận được các nghiệm:

$$\lambda_4 = u, \qquad \lambda_1 = \frac{\beta_2 \rho_b}{\overline{\rho} h} \cdot \frac{u\frac{\partial q}{\partial u} - h\frac{\partial q}{\partial h}}{1 - F^2}, \tag{4.21}$$

$$\lambda_{2,3} = u \mp \sqrt{h} \pm \beta_2 \frac{\rho_b}{\overline{\rho} h} \cdot \frac{\pm\sqrt{h}\frac{\partial q}{\partial u} - h\frac{\partial q}{\partial h}}{2(F \mp 1)}. \tag{4.22}$$

Chuyển về dạng có thứ nguyên ta được:

$$\overline{\lambda}_4 = U, \qquad \overline{\lambda}_1 = \frac{\rho_b}{\overline{\rho} H} \cdot \frac{U\frac{\partial G_x}{\partial U} - H\frac{\partial G_x}{\partial H}}{1 - F^2},$$

$$\overline{\lambda}_{2,3} = U \mp \sqrt{gH} \pm \frac{\rho_b}{\overline{\rho} H} \cdot \frac{\pm\sqrt{gH}\frac{\partial G_x}{\partial U} - H\frac{\partial G_x}{\partial H}}{2(F \mp 1)}.$$

Nếu xem $\overline{C} = 0$ và $\beta_2 = 0$ thì kết quả cũng trùng với kết quả của J. A. Cunge và de Vries như đã xét ở phần trên.

d. Trường hợp dòng bùn cát lơ lửng là chủ yếu

Trường hợp này dòng bùn cát đáy không đáng kể và có thể xem $\beta_2 = 0$.
Từ (4.13), (4.14) và (4.15) ta suy ra các nghiệm đặc trưng là:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = u - X^0_{2,3}, \quad \lambda_{4,5} = u - X^0_{4,5}.$$

Chuyển về dạng có thứ nguyên ta được:

$$\overline{\lambda}_1 = 0, \quad \overline{\lambda}_i = U - \overline{X}^0_i, \quad (i = \overline{2,5}).$$

Qua kết quả trên ta thấy sự trao đổi giữa bùn cát lơ lửng và biến đổi đáy không dẫn đến tốc độ lan truyền kích động đáy. Hay nói một cách khác kích động không phát triển theo quy luật truyền sóng.

5. KẾT LUẬN

Trong bài này đã khảo sát đặc trưng toán học của hệ phương trình một chiều mô tả chuyển động của dòng chảy có vận chuyển bùn cát lơ lửng, bùn cát đáy và biến hình lòng dẫn. Đã xác định các tốc độ đặc trưng trong các trường hợp khác nhau của dòng chảy. Các kết quả của nhiều tác giả khác là các trường hợp riêng biệt của kết quả thu được trong bài báo này.

Địa chỉ:
Viện Cơ Viện KHVN, trường đại học Tổng hợp Huế

Nhận ngày 2/1/1990

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. M. de Vries. Considerations about non-steady bed-load transport in open channels. Proc. of IIth Congress of the IAHR, Leningrad, USSR, 1965.
2. Kyozo Suga. On the simulation of river bed variation by characteristics. Proc. of 13th Congress, IAHR, Kyoto, Japan, 1969.
3. J. A. Cunge and N. Perdreau. Mobile bed fluvial mathematical models. La Houille Blanche, No. 7, 1973.
4. Nguyễn Văn Điệp và Đặng Hữu Chung. Lý thuyết khuếch tán suy rộng của chuyển động lơ lửng của bùn cát trong dòng chảy cóđáy biến đổi. Tạp chí Cơhọc số 1, 1990.
5. L. I. Sedov. Method of similarity and dimension in mechanics. M. 1965. (in Russian)
6. D. J. Needham. The development of a bed form disturbance in an alluvial river or channel. J. of applied mathematics and physics (ZAMP) Vol. 39, January, 1988.
7. The Hanoi lecture notes on river morphology. Chapter 8, Prepared for: The Institute of hydraulic research, Hanoi SRV. Delt hydralics, October, 1989.

SUMMARY

A MATHEMATICAL INVESTIGATION OF EQUATIONS DESCRIBING THE SEDIMENT TRANSPORT

In this work the mathematical problem of equations describing the sediment transport was studied. The results show that in the different cases of flow the set of equations has five characteristics, in which two of them are the rates of concentration propagation in the plane (x,t). The results of the other authors are only the particular cases in our work.