Tạp chí CƠ HỌC, tập XII, 1990, số 2 (1 — 5)

DAO ĐỘNG TRONG HỆ PHI TUYẾN CẤP MỘT CÓ CHẬM
I. HỆ ÔTÔNÔM

NGUYỄN ĐÔNG ANH, NGUYỄN TIẾN KHIÊM

MỞ ĐẦU

So với hệ vi phân thường, hệ có chậm còn được nghiên cứu chưa đầy đủ và chi tiết, đặc biệt là các vấn đề dao động. Ngay cả phương pháp biến thiên hằng số Lagrăng, phương trình đặc trưng, nghiệm tuần hoàn cũng chưa được nghiên cứu nhiều.

Mục đích của các tác giả là nghiên cứu một cách có hệ thống các dạng dao động có thể trong hệ phi tuyến cấp 1 có chậm. Bài báo này chỉ xét hệ ôtônôm, tức là chỉ nghiên cứu các dao động riêng, tự dao động. Rõ ràng sự tồn tại dao động trong hệ cấp 1 tuyến tính thuần nhất có chậm đã nói lên sự khác nhau cơ bản giữa hệ không và có chậm. Thật vậy, trong hệ cấp 1 tuyến tính thuần nhất và không có chậm không thể có nghiệm tuần hoàn hay trong hệ cấp 2 Duffing thông thường không có tự dao động, nhưng trong hệ cấp 1 có chậm các dao động trên lại xuất hiện. Chính vì lẽ đó bức tranh dao động của hệ cấp 1 có chậm khi có lực ngoài tuần hoàn tác dụng cũng là điều lý thú mà chúng tôi sẽ nghiên cứu ở bài tiếp theo.

Hệ được xét trong bài này có dạng

$$\dot{X}(t) + \alpha X(t-\Delta) = \varepsilon f[X(t), \dot{X}(t), X(t-\Delta_1), \dot{(}t-\Delta_1)], \qquad (0.1)$$

với $t \geq 0$, $\alpha > 0$, $\Delta > 0$, $\Delta_1 > 0$, ε tham số bé. Phương pháp nghiên cứu là phương pháp tiệm cận [1].

1. HỆ TUYẾN TÍNH SUY BIẾN

Khi $\varepsilon = 0$ (0.1) cho ta hệ suy biến:

$$\dot{X}(t) + \alpha X(t-\Delta) = 0. \qquad (1.1)$$

Phương trình đặc trưng tương ứng với (1.1) có dạng

$$\lambda + \alpha e^{-\lambda\Delta} = 0. \qquad (1.2)$$

Phương trình cuối có nghiệm thuần ảo khi:

$$\alpha\cos\omega\Delta = 0; \qquad \omega - \alpha\sin\omega\Delta = 0. \tag{1.3}$$

Hệ (1.3) cho thấy nghiệm thuần ảo của (1.2) sẽ là $\pm i\alpha$ với điều kiện:

$$\sin\alpha\Delta = 1 \quad \text{hay} \quad \alpha\Delta = \frac{\pi}{2}(1+4k). \tag{1.4}$$

Như vậy (1.4) là điều kiện để (1.1) có nghiệm tuần hoàn

$$X(t) = a_0\cos(\alpha t + \theta_0), \tag{1.5}$$

trong đó a_0, θ_0 các hằng số xác định từ điều kiện đầu.

Việc nghiên cứu phương trình (1.2) cho thấy tính chậm Δ dù có nhỏ cũng có thể làm thay đổi bức tranh dao động. Thật vậy, xét phương trình

$$\dot{X}(t) + 500\pi X(t - 0,001) = 0, \tag{1.6}$$

tức là khi $\alpha = 500\pi$, $\Delta = 0.001$. Phương trình (1.6) có nghiệm tuần hoàn $X = a_0\cos(500\pi t + \theta_0)$. Nhưng vì Δ quá nhỏ so với α nên nếu bỏ qua Δ thì (1.6) lại chỉ có nghiệm dừng duy nhất là $X = 0$.

2. XÂY DỰNG NGHIỆM TUẦN HOÀN CHO HỆ PHI TUYẾN BÉ

Giả sử hệ suy biến (1.1) có nghiệm tuần hoàn, tức là thỏa mãn điều kiện (1.4). Khi đó nếu $\varepsilon \ll 1$ hệ (0.1) cũng có nghiệm gần với (1.5). Ta sẽ xây dựng nghiệm đó bằng phương pháp tiệm cận.

Nghiệm của (0.1) sẽ tìm ở dạng:

$$X(t) = a\cos\phi + \varepsilon u_1(a,\phi) + \varepsilon^2\ldots, \qquad \phi = \alpha t + \theta. \tag{2.1}$$

Trong đó a, θ là các hàm thỏa mãn phương trình:

$$\dot{a} = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \ldots; \qquad \dot{\theta} = \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \ldots \tag{2.2}$$

và các hàm u_j, A_j, B_j là phải tìm.

Trước hết vì a, θ thỏa mãn (2.2) nên $\ddot{a} \sim \varepsilon^2$, $\ddot{\theta} \sim \varepsilon^2, \ldots$, và do đó ta có:

$$\begin{aligned} a_\Delta &= a(t-\Delta) = a - \dot{a}\Delta + \frac{1}{2}\ddot{a}\Delta^2 + \cdots = a - \varepsilon\Delta A_1 + \varepsilon^2\ldots \\ \theta_\Delta &= \theta(t-\Delta) = \theta - \dot{\theta}\Delta + \frac{1}{2}\ddot{\theta}\Delta^2 + \cdots = \theta - \varepsilon\Delta B_1 + \varepsilon^2\ldots. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Khi đó ta có thể tính được:

$$X_\Delta = X(t-\Delta) = a\sin\phi - \varepsilon\{\delta A_1\sin\phi + a\Delta B_1\cos\phi + u_1\} + \ldots \tag{2.4}$$

Trong (2.4) đã tính đến điều kiện (1.4), tức là $\sin\alpha\Delta = 1$, $\cos\alpha\Delta = 0$. Tương tự ta có

$$\dot{X}_{\Delta_1} = -\alpha a\sin(\phi - \alpha\Delta_1) + \varepsilon\ldots, \qquad X_{\Delta_1} = a\cos(\phi - \alpha\Delta_1) + \varepsilon\ldots \tag{2.5}$$

Mặt khác, từ (2.1) sau khi vi phân ta được:

$$\dot{X} = -\alpha a \sin\phi + \varepsilon\{A_1\cos\phi - aB_1\sin\phi + \alpha\frac{\partial u_1}{\partial\phi}\} + \varepsilon^2 \ldots \tag{2.6}$$

Thay (2.1), (2.4) - (2.6) vào hàm phi tuyến f và khai triển theo chuỗi lũy thừa của ε:

$$f[X(t), \dot{X}(t), X(t-\Delta_1), \dot{X}(t-\Delta_1) = f[a\cos\phi, -\alpha a\sin\phi, a\cos(\phi-\alpha\Delta_1), -\alpha a\sin(\phi-\alpha\Delta_1)] + \varepsilon\ldots \tag{2.7}$$

Cuối cùng thay (2.1), (2.2), (2.4) - (2.7) vào (0.1), so sánh các hệ số của ε ta sẽ được:

$$[A_1\cos\phi - aB_1\sin\phi] - \alpha\Delta[aB_1\cos\phi + A_1\sin\phi] + \alpha\Big(\frac{\partial u_1}{\partial\phi} + u_1\Big) = f_0, \tag{2.8}$$

trong đó:

$$f_0 = f_0(a,\phi) = f[a\cos\phi, -\alpha a\sin\phi, a\cos(\phi-\alpha\Delta_1), -\alpha a\sin(\phi-\alpha\Delta_1)]$$

Khai triển các hàm f_0, u_1 ra chuỗi Fourie, giả thiết hàm u_1 không chứa thành phần $\cos\phi$, $\sin\phi$

$$\begin{aligned} f_0 &= \sum_{n=0}(h_n\cos n\phi + g_n\sin n\phi);\\ u_1 &= \sum_{n\neq 1}(V_n\cos n\phi + W_n\sin n\phi), \end{aligned}$$

sau đó so sánh các hệ số Fourie trong (2.8) ta được:

$$\begin{aligned} A_1 - \alpha\Delta aB_1 &= h_1 = h(a),\\ \alpha\Delta A_1 + aB_1 &= -g_1 = -g(a),\\ V_n + nW_n &= \frac{1}{\alpha}h_n(a),\\ -nV_n + W_n &= \frac{1}{\alpha}g_n(a), \quad n = 0, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

Giải các phương trình đơn giản trên ta có

$$\begin{aligned} A_1 &= (1+\alpha^2\Delta^2)^{-1}[h - \alpha\Delta g],\\ B_1 &= -[a(1+\alpha^2\Delta^2)^{-1}[g + \alpha\Delta h],\\ V_0 &= \frac{1}{\alpha}h_0,\\ V_n &= \frac{1}{\alpha(1+n^2)}[h_n - ng_n],\\ W_n &= \frac{1}{\alpha(1+n^2)}[g_n + nh_n]. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Như vậy ta có thể xác định được gần đúng thứ nhất hoàn thiện:

$$X = a\cos\phi + \varepsilon u_1(a,\phi), \quad \phi = \alpha t + \theta. \tag{2.10}$$

Biên độ dao động dừng sẽ tìm được từ phương trình .

$$A_1(a_0) = 0. \tag{2.11}$$

Dao động dừng đó sẽ ổn định nếu

$$A_1'(a_0) < 0 \tag{2.12}$$

và độ lệch tần số sẽ bằng $\varepsilon B_1(a_0)$

3. VÍ DỤ

1.

$$\dot{X} + \alpha X_\Delta = \varepsilon[-\gamma X + \beta X^3]$$

trong trường hợp này

$$f_0 = -\gamma a \cos\phi + \beta a^3 \cos^3\phi$$

và do đó

$$g = 0, \quad h = -\gamma a + \frac{3}{4}\beta a^3, \quad h_3 = \frac{1}{4}a^3, \quad g_n = 0, \quad h_n = 0, \quad n > 3$$

$$A_1 = (1 + \alpha^2\Delta^2)(-\gamma + \frac{3}{4}\beta a^2)a,$$
$$B_1 = -\alpha\Delta(1 + \alpha^2\Delta^2)^{-1}(-\gamma + \frac{3}{4}\beta a^2).$$

Vị trí cân bằng $a_0 = 0$ sẽ ổn định nếu $\gamma > 0$
Tự dao động:

$$X = \sqrt{\frac{4\gamma}{3\beta}}\cos(\alpha t + \theta_0)$$

sẽ ổn định nếu $\gamma < 0; \beta < 0$. Nếu $\Delta = 0$ chỉ có trạng thái cân bằng ổn định.

2.

$$\dot{X} + \alpha X_\Delta = \varepsilon[-k\dot{X} + \beta X^3]$$

Ở đây

$$h = \frac{3}{4}\beta a^3, \quad g = \alpha k a, \quad h_3 = \frac{1}{4}\beta a^3,$$

và do đó

$$A_1 = (1 + \alpha^2\Delta^2)^{-1}\{-\alpha^2\Delta k + \frac{3}{4}\beta a^2\}a,$$
$$B_1 = -(1 + \alpha^2\Delta^2)\{\alpha k + \frac{3}{4}\beta a^2 \alpha\Delta\}.$$

Có thể có hai trạng thái dao động dừng tương ứng với $a = 0, a = 2\alpha\sqrt{k\Delta/3\beta}$

Vị trí cân bằng sẽ ổn định nếu $k > 0$ còn tự dao động

$$X = 2\alpha\sqrt{\frac{k\Delta}{3\beta}}\cos(\alpha t - \varepsilon\alpha k t + \theta_0)$$

sẽ ổn định nếu $k < 0, \beta < 0$

Cả hai trường hợp trên cho thấy trong hệ cấp 1 có chậm với lực phi tuyến Duffing có thể có tự dao động. Nhưng khác với tự dao động trong hệ Van de Pol cấp 2 không chậm, tự dao động ở đây có độ lệch tần số.

3. Xét hệ Van de pol:

$$\dot{X} + \alpha X_\Delta = \varepsilon(1 - \gamma X^2)\dot{X}$$

Sau những tính toán đơn giản ta có:

$$A_1 = (1 + \alpha^2\Delta^2)^{-1}\alpha^2\Delta(1 - \frac{1}{4}\gamma a^2)a,$$
$$B_1 = \alpha(1 + \alpha^2\Delta^2)^{-1}(1 - \frac{3}{4}\gamma a^2),$$
$$u_1 = \frac{\gamma}{40}a^3(\cos 3\phi + 3\sin 3\phi).$$

Nghiên cứu các phương trình trên ta thấy vị trí cân bằng $a = 0$ không ổn định. Tự dao động với biên độ

$$a_0 = 2\sqrt{\frac{1}{\gamma}}$$

sẽ ổn định. Bức tranh dao động giống hệ cấp 2 Van de pol không có chậm.

KẾT LUẬN

Dao động riêng của hệ phi tuyến cấp 1 có chậm đã được nghiên cứu bằng phương pháp tiệm cận Crưlôv-Bogoliubov-Mitropolskii. Kết quả nghiên cứu cho thấy:

1. Trong hệ tuyến tính dù tính chậm có rất nhỏ cũng làm thay đổi tính ổn định tiệm cận của vị trí cân bằng của hệ không chậm tương ứng.

2. Đại lượng Δ có vai trò làm giảm dao động tương tự như vai trò của lực cản nhớt $2hX(t)$ trong hệ cấp hai. Tự dao động có thể xẩy ra trong hệ phi tuyến dạng Duffing cứng và trong dạng Van de Pol.

Địa chỉ:
Viện Cơ Viện KHVN

Nhận ngày 16/8/1989

(Xem tiếp trang 24)