

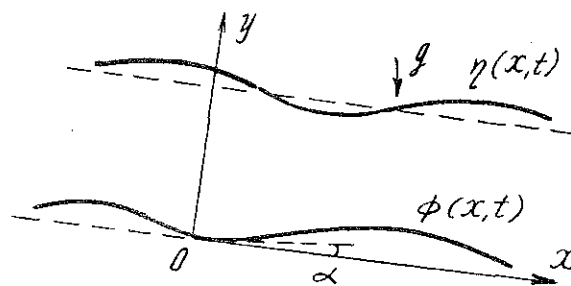
MẤT ỔN ĐỊNH VÀ TƯƠNG TÁC PHI TUYẾN CỦA DÒNG CHẢY TRÊN KÊNH NGHIÊNG CÓ ĐÁY BIẾN ĐỔI

NGUYỄN VĂN ĐIỆP, PHẠM HÙNG

Trong bài này sự mất ổn định và tương tác phi tuyến của dòng chảy trên kênh nghiêng có đáy biến đổi đã được nghiên cứu. Trong trường hợp tuyến tính, đã chỉ ra rằng khi góc nghiêng của kênh bằng góc nghiêng tới hạn, một kích động bất kỳ của mặt thoáng và vận tốc sẽ tách làm 3 modes: Mode thứ nhất chuyển động với vận tốc bằng $3F/2$ vận tốc đặc trưng theo mặt cắt, không thay đổi hình dạng. Mode thứ hai chuyển động với vận tốc bằng $F/2$ vận tốc đặc trưng theo mặt cắt và tắt theo thời gian. Mode thứ ba là một sóng dừng gây ra do biến đổi đáy. Phương pháp nhiễu cỡ thời gian được áp dụng trong nghiên cứu phi tuyến, đã thu nhận các phương trình mô tả kích động của mặt thoáng, vận tốc và mặt đáy khi thời gian lớn. Một số dạng nghiệm của các phương trình trên đã được khảo sát.

1. HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Hệ phương trình mô tả dòng chảy trên kênh nghiêng có đáy biến đổi (xem Hình 1) có dạng sau [1]:



Hình 1: Sơ đồ dòng chảy

$$\begin{aligned}
 h_t + (vh)_x &= 0, \\
 v_t + vv_x + g(h + \phi)_x \cos \alpha &= g \sin \alpha - C_f \frac{v^2}{h}, \\
 \phi_t + q_x &= 0; \quad q = q(v, h, \phi_x),
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

trong đó h độ sâu, v vận tốc trung bình theo thiết diện, g gia tốc trọng trường, α góc giữa trục Ox và phương nằm ngang, C_f hệ số không thứ nguyên, tỷ lệ với ma sát đáy, ϕ mặt đáy, q lưu lượng bùn cát đáy, q là hàm đã biết của v, h, ϕ_x .

Bằng cách đưa vào các đại lượng không thứ nguyên:

$$v' = \frac{v}{\sqrt{gH_0}}, \quad h' = \frac{h}{H_0}, \quad q' = \frac{q}{q_0}, \quad \phi' = \frac{\phi}{H_0}, \quad x' = \frac{x}{L_0}, \quad t' = \frac{t\sqrt{gH_0}}{L_0},$$

trong đó H_0 độ sâu đặc trưng, L_0 độ dài đặc trưng theo Ox , $\sqrt{gH_0}$ vận tốc đặc trưng, q_0 lưu lượng bùn cát đặc trưng, hệ (1.1) có dạng không thứ nguyên như sau (để thuận tiện sẽ bỏ dấu ' chỉ các đại lượng không thứ nguyên).

$$\begin{aligned}
 h_t + (vh)_x &= 0, \\
 X(v_t + vv_x + (h + \phi)_x \cos \alpha) &= 1 - \frac{v^2}{F^2 h}, \\
 \phi_t + \beta q_x &= 0, \quad q = q(v, h, \phi_x),
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

trong đó:

$$X = \frac{H_0}{L_0 \sin \alpha}, \quad \beta = \frac{q_0}{\sqrt{gH_0} \cdot H_0}, \quad F = \sqrt{\frac{\sin \alpha}{C_f}},$$

chúng ta sẽ xét trường hợp $X = O(1)$, $F = O(1)$, $\beta \ll 1$. Không mất tính tổng quát có thể đặt $X \equiv 1$

2. KHẢO SÁT TUYẾN TÍNH

Hệ (1.2) có nghiệm dừng như sau:

$$\bar{h} = 1, \quad \bar{v} = F, \quad \bar{q} = q(1, F, 0). \tag{2.1}$$

Xét kích động vô cùng nhỏ bên cạnh trạng thái cân bằng:

$$h = 1 + h', \quad v = F + v', \quad \phi = \phi', \quad |h'| \ll 1, \quad |v'| \ll F, \quad |\phi'| \ll 1. \tag{2.2}$$

Giả thiết β có bậc của các kích động nhỏ, thế (2.2) vào (1.2) chỉ giữ lại các số hạng bậc nhất đối với các kích động, ta thu được hệ phương trình tuyến tính như sau (bỏ dấu ' chỉ các kích động):

$$\begin{aligned}
 h_t + Fh_x + v_x &= 0, \\
 v_t + Fv_x + (h + \phi)_x \cos \alpha + \frac{2v}{F} - h &= 0, \\
 \phi_t &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Phương trình cuối cho nghiệm $\phi = \phi(x)$ là một hàm bất kỳ của x . Nghiệm này sẽ tạo ra các kích động của vận tốc và độ sâu tương ứng:

$$h^{(*)}(x) = e^{-\frac{3x}{-F^2 + \cos \alpha}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{-3x}{-F^2 + \cos \alpha}} \left\{ \frac{-\phi'(\hat{x}) \cos \alpha}{-F^2 + \cos \alpha} \right\} d\hat{x}, \quad (2.4)$$

$$v^{(*)}(x) = -Fh^{(*)}(x).$$

Nếu không tính đến ảnh hưởng của bùn cát hai phương trình đầu sẽ tạo thành hệ 2 phương trình hyperbol đồng nhất. Nghiệm chung của chúng được tìm bằng phương pháp Fourier. Có thể kiểm tra được rằng nghiệm của hệ (2.3) sẽ ổn định nếu:

$$\operatorname{tg} \alpha \leq 4C_f. \quad (2.5)$$

Kết quả (2.5) trùng với kết quả thu được đối với dòng chảy trên kênh có đáy cứng, phẳng (xem [2]).

Nếu $\operatorname{tg} \alpha = 4C_f$, nghiệm của hệ (2.5) có dạng sau:

$$h = f^{(+)}\left(x - \frac{3F}{2}t\right) + f^{(-)}\left(x - \frac{F}{2}t\right) \cdot e^{-\frac{x}{F}t} + h^{(*)}(x),$$

$$v = \frac{F}{2}f^{(+)}\left(x - \frac{3F}{2}t\right) + \left\{ -\frac{F}{2}f^{(-)}\left(x - \frac{F}{2}t\right) + \frac{2}{F} \int_{-\infty}^{x - \frac{F}{2}t} f^{(-)}(\hat{x}) d\hat{x} \right\} e^{-\frac{x}{F}t} + v^{(*)}(x), \quad (2.6)$$

trong đó $f^{(+)}$, $f^{(-)}$ là các hàm bất kỳ, $h^{(*)}$, $v^{(*)}$ biểu diễn qua $\phi(x)$ theo (2.4).

Như vậy khi $\operatorname{tg} \alpha = 4C_f$, một kích động bất kỳ của mặt thoáng và vận tốc sẽ tách ra làm 3 modes: Mode thứ nhất chuyển động với vận tốc $3F/2$, không thay đổi hình dạng. Mode thứ hai chuyển động với vận tốc $F/2$ và tắt theo thời gian. Mode thứ ba là một sóng dừng gây ra bởi kích động đáy. Chúng ta quan tâm sự phát triển của modes thứ 1 và thứ 3 khi thời gian lớn.

3. KHẢO SÁT PHI TUYẾN

Xét sự biến thiên phi tuyến của các kích động nhỏ khi góc nghiêng gần góc nghiêng tới hạn. Bài toán (1.2) sẽ có 3 tham số nhỏ, tham số thứ nhất ε là biên độ không thứ nguyên của các kích động, tham số thứ hai β là tỷ số giữa lưu lượng bùn cát đặc trưng và lưu lượng chất lỏng đặc trưng, tham số thứ ba $\lambda = \alpha - \alpha_{cr}$ ($\operatorname{tg} \alpha_{cr} = 4C_f$).

Nghiệm tiệm cận của (1.2) được tìm dưới dạng sau:

$$h = 1 + \varepsilon(h_0 + \varepsilon h_1 + \lambda h_2 + \beta h_3 + \dots),$$

$$v = F + \varepsilon(v_0 + \varepsilon v_1 + \lambda v_2 + \beta v_3 + \dots), \quad (3.1)$$

$$\phi = \varepsilon(\phi_0 + \varepsilon \phi_1 + \lambda \phi_2 + \beta \phi_3 + \dots).$$

Thông số: $F = \sqrt{\frac{\sin \alpha}{C_f}}$ và $\cos \alpha$ đều là hàm phụ thuộc chúng được khai triển theo chuỗi Taylor:

$$F = F_0 + \lambda F_1 + \dots$$

$$\cos \alpha = a_0 + \lambda a_1 + \dots$$

trong đó:

$$F_0 = \sqrt{\frac{\sin \alpha_{cr}}{C_f}}, \quad F_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sin \alpha_{cr}}{C_f} \cot \alpha_{cr}}, \dots, a_0 = \cos \alpha_{cr}, \quad a_1 = -\sin \alpha_{cr}. \quad (3.2)$$

Xét phép biến đổi tọa độ như sau:

$$T = t, \quad \xi = x - \frac{3F}{2}t. \quad (3.3)$$

Thế (3.1) vào (1.2), xấp xỉ bậc ε có dạng sau:

$$\begin{aligned} h_{0T} - \frac{F_0}{2} h_{0\xi} + v_{0\xi} &= 0, \\ v_{0T} - \frac{F_0}{2} v_{0\xi} + a_0 (h_0 + \phi_0)_\xi + \frac{2v_0}{F_0} - h_0 &= 0, \\ \phi_{0T} - \frac{3F_0}{2} \phi_{0\xi} &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Nghiệm của (3.4) có dạng sau:

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \phi_0 \left(\xi + \frac{3F_0}{2} T \right), \\ h_0 &= f(\xi) + h_0^{(s)} \left(\xi + \frac{3F_0}{2} T \right), \\ v_0 &= \frac{F_0}{2} f(\xi) + v_0^{(s)} \left(\xi + \frac{3F_0}{2} T \right), \end{aligned} \quad (3.5)$$

trong đó f là hàm bất kỳ của ξ , ϕ_0 là hàm bất kỳ của $(\xi + \frac{3F_0}{2}T)$, $h_0^{(s)}$, $v_0^{(s)}$, biểu diễn qua ϕ_0 theo (2.4). Nếu không tính đến ảnh hưởng của bùn cát thì h_0 , v_0 là hàm của ξ . Nhân phương trình thứ nhất với hàm $h'(\xi)$ phương trình thứ hai với $v'(\xi)$, cộng lại và lấy tích phân theo ξ từ $-\infty$ đến $+\infty$ với điều kiện

$$h'(\xi) \rightarrow 0 \quad v'(\xi) \rightarrow 0 \quad |\xi| \rightarrow \infty$$

ta thu được phương trình liên hợp của (3.4) (không tính ảnh hưởng của ϕ_0) như sau:

$$\frac{F_0}{2} h_\xi^* - a_0 v_\xi^* - v^* = 0, \quad \frac{F_0}{2} v_\xi^* + \frac{2}{F_0} v^* - h_\xi^* = 0. \quad (3.6)$$

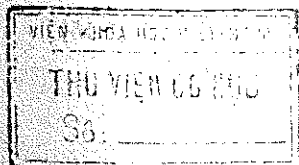
Nghiệm của (3.6) có dạng sau:

$$v^* = D'(\xi), \quad h^* = \frac{F_0}{2} D'(\xi) + \frac{2}{F_0} D(\xi), \quad (3.7)$$

trong đó D là hàm bất kỳ theo ξ , $D \rightarrow 0$ khi $|\xi| \rightarrow \infty$, (dấu $'$) chỉ đạo hàm theo ξ)

Xấp xỉ bậc ε^2 có dạng sau

$$\begin{aligned} h_{1T} - \frac{F_0}{2} h_{1\xi} + v_{1\xi} &= -(v_0 h_0)_\xi, \\ v_{1T} - \frac{F_0}{2} v_{1\xi} + \frac{F_0^2}{4} h_{1\xi} + \frac{2v_1}{F_0} - h_1 &= -\frac{F_0^2}{4} \phi_{1\xi} - v_0 v_{0\xi} - h_0^2 + \frac{2}{F_0} v_0 h_0 - \frac{v_0^2}{F_0^2}, \\ \phi_{1T} - \frac{3F_0}{2} \phi_{1\xi} &= 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$



Phương trình cuối cho nghiệm $\phi_1 = \phi_1(\xi + \frac{3F_0}{2}t)$.

Nhân phương trình thứ nhất với h^* , phương trình thứ hai với v^* cộng lại và lấy tích phân theo ξ từ $-\infty$ đến $+\infty$ (tích phân này sẽ ký hiệu bằng $\langle \rangle$) ta có

$$\langle h_1 h^* + v_1 v^* \rangle_T = -\langle \frac{F_0}{2} (f^2)_\xi h^* + \frac{1}{4} (F_0^2 f f_\xi + f^2) v^* \rangle + A(T), \quad (3.9)$$

số hạng A là hàm đã biết, thu được do tính đến tương tác của đáy với mặt thoáng và vận tốc. Nếu số hạng đầu của vế phải (là hàm của ξ) khác không, thì vế trái sẽ tăng tuyến tính theo T và vì h^* , v^* là hàm của ξ , do đó ít nhất trong h_1, v_1 có một hàm tăng tuyến tính theo T . Khó khăn trên được khắc phục bằng phương pháp nhiễu cỡ thời gian (xem [1], [3]). Ngoài biến thời gian nhanh $\tau_0 = T$, ta đưa vào các thời gian chậm như sau: $\tau_1 = \varepsilon T$, $\tau_2 = \lambda T$, $\tau_3 = \beta T$.

Phương pháp lấy đạo hàm theo T có dạng:

$$\frac{\partial}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial \tau_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau_1} + \lambda \frac{\partial}{\partial \tau_2} + \beta \frac{\partial}{\partial \tau_3}. \quad (3.10)$$

Để tránh khó khăn gặp phải trong (3.9), hàm f phải phụ thuộc thời gian chậm τ_1 sao cho:

$$\left(\frac{2}{F_0} f - F_0 f_\xi \right)_{\tau_1} + \frac{3}{2} f f_\xi - \frac{3F_0^2}{4} (f f_\xi)_\xi = 0. \quad (3.11)$$

Xấp xỉ bậc $\varepsilon\lambda$ có dạng sau:

$$\begin{aligned} h_{2\tau_0} - \frac{F_0}{2} h_{2\xi} + v_{2\xi} &= -h_{0\tau_2} + \frac{F_1}{2} h_{0\xi}, \\ v_{2\tau_0} - \frac{F_0}{2} v_{2\xi} + \frac{F_0^2}{4} h_{2\xi} + \frac{2v_2}{F_0} - h_2 &= -v_{0\tau_2} - \frac{F_0^2}{4} \phi_{2\xi} + \sin \alpha_{cr} h_{0\xi} + \frac{F_1}{2} v_{0\xi} + \frac{2v_0 F_1}{F_0^2}, \\ \phi_{2\tau_0} - \frac{3F_0}{2} \phi_{2\xi} &= -\phi_{0\tau_2} + \frac{3F_1}{2} \phi_{0\xi}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Để tránh khó khăn dạng (3.9), hàm f phải phụ thuộc vào thời gian chậm sao cho:

$$\left(\frac{2}{F_0} f - F_0 f_\xi \right)_{\tau_2} + \sin \alpha_{cr} f_{\xi\xi} + \frac{F_0 F_1}{2} f_{\xi\xi} = 0. \quad (3.13)$$

Xấp xỉ bậc $\varepsilon\beta$ xét trong hệ tọa độ τ_0, x có dạng sau:

$$\begin{aligned} h_{3\tau_0} + F_0 h_{3x} + v_{3x} &= -h_{0\tau_3}, \\ v_{3\tau_0} + F_0 v_{3x} + \frac{F_0^2}{4} h_{3x} + \frac{F_0^2}{4} \phi_{3x} + \frac{2v_3}{F_0} - h_3 &= -v_{0\tau_3}, \\ \phi_{3\tau_0} &= -\phi_{0\tau_3} - \delta_1 h_{0x} - \delta_2 v_{0x} - \delta_3 \phi_{0xx}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

trong đó :

$$\delta_1 \equiv \frac{\partial q}{\partial h} \Big|_{h=1, v=F, \phi=0}; \quad \delta_2 \equiv \frac{\partial q}{\partial v} \Big|_{h=1, v=F, \phi=0}; \quad \delta_3 \equiv \frac{\partial q}{\partial(\phi_x)} \Big|_{h=1, v=F, \phi=0}$$

Để ϕ_0 không tăng tuyến tính theo τ_0 , cần thỏa mãn phương trình sau:

$$\phi_{0\tau_3} + \delta_1 h_x^{(s)} + \delta_2 v_x^{(s)} + \delta_3 \phi_{0xx} = 0. \quad (3.15)$$

Từ (2.4), (3.5), (3.15) ta có :

$$\frac{4}{F_0^2} \phi_{0\tau_3} + \phi_{0\tau_3 x} + \left(\frac{\delta_1 - F_0 \delta_2}{3} + \frac{4\delta_3}{F_0^2} \right) \phi_{0xx} + \delta_3 \phi_{0x,xx} = 0. \quad (3.16)$$

Từ các phương trình viết với các cỡ thời gian chậm có thể xây dựng 1 phương trình cho một cỡ thời gian theo phương pháp Leibovich và Seebass (xem [3]). Từ (3.11), (3.13), trong hệ tọa độ T, ξ ta có :

$$\left(\frac{2}{F_0} f - F_0 f_\xi \right)_T + \frac{3\varepsilon}{2} f f_\xi - \frac{3\varepsilon}{4} F_0^2 (f f_\xi)_\xi + \lambda \sin \alpha_{cr} f_{\xi\xi} + \frac{\lambda F_0 F_1}{2} f_{\xi\xi} = 0. \quad (3.17)$$

Trong hệ tọa độ i, x từ (3.16) ta có :

$$\left(\frac{4}{F_0^2} \phi_0 + \phi_{0x} \right)_t + \beta \left(\frac{\delta_1 - F_0 \delta_2}{3} + \frac{4\delta_3}{F_0^2} \right) \phi_{0,xx} + \beta \delta_3 \phi_{0x,xx} = 0. \quad (3.18)$$

4. KHẢO SÁT NGHIỆM

Phương trình (3.18) mô tả biến thiên của kích động đáy khi t lớn. Nghiệm của phương trình này được tìm dưới dạng:

$$\phi_0 = a \phi e^{i(kx - \omega t)}$$

$a\phi$: biên độ, k số sóng, ω tần số, quan hệ tán xạ có dạng sau:

$$\operatorname{Re} \omega = \beta \frac{\frac{\delta_1 - F_0 \delta_2}{3} k^3}{k^2 + \frac{16}{F_0^4}}, \quad \operatorname{Im} \omega = \beta \frac{\frac{4}{F_0^2} \left(\frac{\delta_1 - F_0 \delta_2}{3} + \frac{4\delta_3}{F_0^2} \right) + \delta_3 k^4}{k^2 + \frac{16}{F_0^4}} \quad (4.1)$$

Quan hệ (4.1) có thể thu nhận bằng phương pháp Fourier áp dụng đối với hệ phương trình (1.2) đã tuyến tính hóa. Từ (4.1) ta thấy sóng cát là sóng tán xạ, truyền cùng chiều dòng chảy nếu: $\delta_1 - F_0 \delta_2 > 0$, ngược chiều dòng chảy nếu $\delta_1 - F_0 \delta_2 < 0$. Ngoài ra nếu $\delta_3 \equiv 0$, sóng cát truyền cùng chiều sẽ mất ổn định, sóng truyền ngược chiều sẽ ổn định. Kết luận trên phù hợp với phương pháp đường đặc trưng và phương pháp khai triển gần mặt sóng của Whitham.

Nghiệm của phương trình (3.17) được tìm dưới dạng: $f(\xi - Ut)$

Thế vào (3.18) ta thu được phương trình đạo hàm thường sau:

$$f' = \frac{(f - \alpha_1)(f - \alpha_2)}{F_0^2(f - \alpha_3)}. \quad (4.2)$$

Nếu cho biết điều kiện biên:

$$\begin{aligned} f &\rightarrow \alpha_2, & \xi &\rightarrow -\infty, \\ f &\rightarrow \alpha_1, & \xi &\rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Vận tốc lan truyền U và hệ số α có dạng sau:

$$U = \frac{3\varepsilon(\alpha_1 + \alpha_2)F_0}{8},$$

$$\alpha_3 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + \frac{4\lambda \sin \alpha_{cr}}{3\varepsilon F_0^2} + \frac{2\lambda F_1}{3\varepsilon F_0}. \quad (4.4)$$

Nghiệm của (4.2) với $\alpha_1 \leq f \leq \alpha_2$ có dạng sau:

$$\frac{1}{2} \ln |(f - \alpha_1)(f - \alpha_2)| + \frac{2\alpha_3 - (\alpha_1 + \alpha_2)}{\alpha_2 - \alpha_1} \operatorname{Arth} \frac{2f - (\alpha_1 + \alpha_2)}{\alpha_2 - \alpha_1} = \xi - Ut + B, \quad (4.5)$$

trong đó B là hằng số. Đáng chú ý là phương trình (4.2) với điều kiện biên (4.3), là xấp xỉ bậc $O(\varepsilon^2, \varepsilon\lambda)$ của phương trình mô tả sóng lũ khi $\alpha_1 = 0$ (xem Whitham [2]).

Ảnh hưởng của bùn cát lên sự biến thiên của h, v được mô tả bằng nghiệm của hệ phương trình (3.8), (3.12), (3.14).

5. KẾT LUẬN

Sự mất ổn định và tương tác phi tuyến của dòng chảy trên kênh nghiêng có đáy biến đổi đã được khảo sát. Trong trường hợp tuyến tính đã chỉ ra rằng khi góc nghiêng bằng góc nghiêng tới hạn, kích động của mặt thoáng và vận tốc sẽ tách ra làm 3 modes. Đã thu nhận các phương trình mô tả sự biến thiên của kích động mặt thoáng, vận tốc và đáy khi thời gian lớn. Tính ổn định cũng như hướng lan truyền của sóng cát đã được khảo sát.

Địa chỉ:
Viện Cơ Viện KHVN

Nhận ngày 3/10/1989

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. D. J. Needham. The development of a bed form disturbance in an alluvial river or channel. *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)* Vol. 39, January 1988.
2. ДЖ. Уизем, Линейные и нелинейные волны. Мир. Москва 1977.
3. Л. Лейбович, А. Р. Сибасс. Примеры диссипативных и диспергирующих систем описываемых уравнениями. Бюгера и Кортевега - де Вриза. В сборнике "Нелинейные волны" под редакцией Л. Лейбовича и А. Р. Сибасса. Мир. Москва 1977.

SUMMARY

THE UNSTABILITY AND THE NON-LINEAR DEVELOPMENT OF A FLOW IN AN INCLINED ALLUVIAL CHANNEL

In this paper the instability and the non-linear development of a flow in an inclined alluvial channel is investigated. It is shown that in linear case, at the critical value of inclined angle the arbitrary disturbance of the water surface and of velocity will be splitted in three modes. The non-linear differential equations describing the behaviour of the modes when the time become large are obtained. Some solutions are analysed.