

VỀ CÁC PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ DƯỚI DỊCH CHUYỂN DƯ CỦA CÁC CÔNG TRÌNH CỨNG ĐÉO CHỊU TẢI TRỌNG ĐỘNG I

VŨ VĂN THẾ, TRẦN BÁ TỊNH

MỞ ĐẦU

Các phương pháp đánh giá dưới dịch chuyển dư của các công trình cứng dẻo chịu tải trọng động được trình bày trong các công trình [1, 2]. Trong bài báo này là tổng quát hóa phương pháp của Stronge. Trên cơ sở khái niệm tách ten xơ biến dạng phi tuyến thành hai thành phần tuyến tính và phi tuyến, cho phép chúng ta nhận được biểu thức đánh giá dưới theo phương pháp Stronge dưới dạng tổng quát. Kết quả thu được trong phần này cho phép so sánh các phương pháp hiện có [1, 2] trong phần tiếp theo II.

1. THIẾT LẬP BÀI TOÁN

Xét vật thể V chịu tác dụng của lực mặt $T_i(x_k, t)$ và lực khối $-\rho \ddot{x}_i$ (x_i - là tọa độ điểm vật chất, t là biến thời gian). Dưới tác dụng của nội và ngoại lực trên, trong vật thể sinh ra trường ứng suất σ_{ij} và dịch chuyển thực $u_i(x_k, t)$. Với thời gian kết thúc chuyển động trên toàn bộ vật thể là T_t và $u_i(x_k, 0)$. Xét một trường vận tốc dịch chuyển ảo $\dot{u}_i^*(x_k, t)$ với thời gian kết thúc chuyển động T_a^* . Với các đại lượng đưa vào chúng ta thu được các thành phần ten xơ tốc độ biến dạng thực và ảo dưới đây:

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{2} [\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i} + \dot{u}_{k,i} u_{k,j} + \dot{u}_{k,j} u_{k,i}], \\ \dot{\epsilon}_{ij}^* &= \frac{1}{2} [\dot{u}_{i,j}^* + \dot{u}_{j,i}^* + \dot{u}_{k,i}^* u_{k,j} + \dot{u}_{k,j}^* u_{k,i}].\end{aligned}$$

Khi bỏ qua lực mặt ($T_i = 0$) nguyên lý công suất ảo được xác định như sau:

$$\int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^* dv - \int_V \sigma_{ij} \frac{1}{2} [\dot{u}_{i,j}^* + \dot{u}_{j,i}^* + \dot{u}_{k,i}^* u_{k,j} + \dot{u}_{k,j}^* u_{k,i}] dv = - \int_V \rho \ddot{u}_i^* dv. \quad (1.1)$$

Xét biểu thức dưới dấu tích phân ở vế trái của (1.1)

$$\sigma_{ij} \frac{1}{2} [\dot{u}_{i,j}^* + \dot{u}_{j,i}^* + \dot{u}_{k,i}^* u_{k,j} + \dot{u}_{k,j}^* u_{k,i}] = \sigma_{ij} \frac{1}{2} [\dot{u}_{i,j}^* + \dot{u}_{j,i}^*] + \sigma_{ij} \frac{1}{2} [\dot{u}_{k,i}^* u_{k,j} + \dot{u}_{k,j}^* u_{k,i}].$$

Ở đây chú ý rằng $\dot{\epsilon}_{ij}^* = \frac{1}{2} [\dot{u}_{i,j}^* + \dot{u}_{j,i}^*]$ chính là ten xơ tốc độ biến dạng nhỏ gây ra do vận tốc dịch chuyển ảo \dot{u}_i^* . Còn ta coi đại lượng $\dot{\epsilon}^* = \frac{1}{2} [\dot{u}_{k,i}^* u_{k,j} + \dot{u}_{k,j}^* u_{k,i}]$ chính là các thành phần của ten xơ vận tốc biến dạng nào đấy. Khi áp dụng định đề Drucker cho từng phần biến dạng kể trên, từ (1.1) ta thu được kết quả:

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^* \leq \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^* + \tilde{\sigma}_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^* \quad (1.2)$$

ở đây

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij}^* &= \frac{1}{2} [\dot{u}_{i,j}^* + \dot{u}_{j,i}^*], \\ \dot{\epsilon}_{ij}^* &= \frac{1}{2} [\dot{u}_{k,i}^* u_{k,j} + \dot{u}_{k,j}^* u_{k,i}] n, \end{aligned}$$

còn σ_{ij}^* , $\tilde{\sigma}_{ij}^*$ được xác định tương ứng bởi $\dot{\epsilon}_{ij}^*$, $\dot{\epsilon}_{ij}^*$ qua quy luật chảy dẻo:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij} &= \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}; & \lambda > 0, \\ f(\sigma_{ij}) &= k^2 & \text{Điều kiện dẻo.} \end{aligned}$$

Kết hợp (1.1) và (1.2) ta thu được kết quả:

$$\int_V \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^* dv + \int_V \tilde{\sigma}_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^* dv \geq - \int_V \rho \dot{u}_i \dot{u}_i^* dv. \quad (1.3)$$

Nếu như ta thực hiện được đánh giá

$$\int_V \tilde{\sigma}_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^* dv \leq C\delta$$

trong đó: $\delta = \max_{x_k, t} u_i$ và chú ý rằng phần hao tán $D^* = \int_V \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^* dv$ là hoàn toàn xác định khi cho trước \dot{u}_i^* .

Từ (1.3) ta thu được bất đẳng thức cơ sở:

$$D^* + C\delta \geq - \int_V \rho \dot{u}_i \dot{u}_i^* dv. \quad (1.4)$$

Nếu vận tốc dịch chuyển ảo \dot{u}_i^* được chọn trong dạng mô hình, nghĩa là về mặt toán học nó sẽ được biểu diễn dưới dạng tách biến:

$$\dot{u}_i^* = A \cdot f_{i1}(t) \cdot f_{i2}(x_k),$$

ở đây A là hằng số không phụ thuộc vào x_k, t và $f_{i1}(T_a) = 0$.

Để nhận được đánh giá dưới của thành phần dịch chuyển thứ k ta chọn trường vận tốc dịch chuyển ảo \dot{u}_i^* như sau:

$$\begin{aligned} \dot{u}_i^* &= \delta_{ik} A \cdot f_1(t) \cdot f_2(x_k), \\ \delta_{ik} &= \begin{cases} 1 & \text{với } i = k \\ 0 & \text{với } i \neq k \end{cases} \end{aligned}$$

Thế giá trị của \dot{u}_i^* vào các biểu thức tính toán của $\dot{\tilde{e}}_{ij}^*$, $\ddot{\tilde{e}}_{ij}^*$ từ (1.5) và (1.2) chúng ta nhận được:

$$\sigma_{ij}\dot{\tilde{e}}_{ij}^* \leq A \cdot f_1(t) [\sigma_{ij}^* \dot{\tilde{e}}_{ij}^* + \tilde{\sigma}_{ij}^* \ddot{\tilde{e}}_{ij}^*] \quad (1.6)$$

ở đây

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{e}}^* &= \frac{1}{2} [\delta_{ik} f_{2,j} + \delta_{jk} f_{2,i}], \\ \ddot{\tilde{e}}^* &= \frac{1}{2} \delta_{sk} [u_{s,i} f_{2,j} + u_{s,j} f_{2,i}]. \end{aligned}$$

Chú ý rằng $(\quad)_{,i} = \partial(\quad)/\partial x_i$ và σ_{ij}^* , $\tilde{\sigma}_{ij}^*$ được xác định qua $\dot{\tilde{e}}_{ij}^*$, $\ddot{\tilde{e}}_{ij}^*$ theo quy luật chảy dẻo, còn $\tilde{D}^* = \sigma_{ij}^* \dot{\tilde{e}}_{ij}^*$ chính là hàm hao tán năng lượng trong bài toán tính biến dạng bé khi hàm vận tốc dịch chuyển được chọn là $\dot{u}_i^* = \delta_{ik} f_2(x_k)$.

Từ (1.6) ta rút ra:

$$\sigma_{ij}\dot{\tilde{e}}_{ij}^* \leq A \cdot f_1(t) [\tilde{D}^*(f_1) + \tilde{C}\delta], \quad (1.7)$$

với \tilde{C} được xác định từ đánh giá

$$\int_V \tilde{\sigma}_{ij}^* \ddot{\tilde{e}}_{ij}^* dv = \int_V \tilde{\sigma}_{ij}^* \frac{1}{2} \delta_{sk} [u_{s,i} f_{2,j} + u_{s,j} f_{2,i}] \leq \tilde{C}\delta.$$

Kết hợp (1.6), (1.7) với (1.3) ta thu được bất đẳng thức sau:

$$\int_0^{T_a^*} f_1(t) [\tilde{D}^*(f_1) + \tilde{C}\delta] dt \geq \int_0^{T_a^*} \int_V \rho \dot{u}_i \delta_{ik} f_1(t) \cdot f_2(x_k) dv dt. \quad (1.8)$$

Nếu trong (1.8) chọn $f_1(t) \equiv 1$, T_a^* được thay bằng T_t ta sẽ nhận được đánh giá dưới đối với thời gian kết thúc chuyển động

$$T_t \geq T^* = \frac{\int_V \rho \dot{u}_{k0} f_2(x_k) dv}{\tilde{D}^*(f_2) + \tilde{C}\delta}. \quad (1.9)$$

Nếu đưa vào biến không thứ nguyên $\tau = t/T^*$ và thực hiện tích phân từng phần vế phải của (1.8) theo thời gian, sau khi tính toán ta nhận được hệ thức sau:

$$\begin{aligned} T_a^{*2} [\tilde{D}^*(f_2) + \tilde{C}\delta] \int_0^1 f_1(\tau) d\tau + \left[- \int_V \rho u_k(T_a^*) \overset{\circ}{f}_1(1) f_2(x_k) dv + \int_0^1 \int_V \rho u_k \overset{\circ\circ}{f}_1(\tau) f_2(x_k) dv d\tau \right] \geq \\ \geq T_a^* \int_V \rho \dot{u}_{k0} f_1(0) f_2(x_k) dv \end{aligned} \quad (1.10)$$

ở đây $(\overset{\circ}{\quad}) = d(\quad)/d\tau$

Nếu ta chọn f_1 sao cho $\overset{\circ}{f}_1(1) \leq 0$; $\overset{\circ\circ}{f}_1 \geq 0$; $f_1(0) = 1$ và $f_2 \geq 0$ thì từ biểu thức trên chúng ta nhận được biểu thức chứa hai ẩn số T_a^* và δ sau đây:

$$T_a^{*2} [\tilde{D}^*(f_2) + \tilde{C}\delta] \int_0^1 f_1(\tau) d\tau - T_a^* \int_V \rho \dot{u}_{k0} f_2(x_k) dv - \delta \int_V \rho \overset{\circ}{f}_1(0) f_2(x_k) dv \geq 0. \quad (1.11)$$

Vế trái của (1.11) có hai nghiệm T_a^* như sau:

$$T_{a_1}^* = \frac{\int_V \rho \dot{u}_{k0} f_2(x_k) dv}{2[\tilde{D}^*(f_2) + \tilde{C}\delta]} \left\{ 1 + \sqrt{1 + \frac{4[\tilde{D}^*(f_2) + \tilde{C}\delta] \cdot \delta \overset{\circ}{f}_1(0) \cdot \int_0^1 f_1(\tau) d\tau \cdot \int_V \rho f_2(x_k) dv}{\left(\int_V \rho \dot{u}_{k0} f_2(x_k) dv\right)^2}} \right\},$$

$$T_{a_2}^* = \frac{\int_V \rho \dot{u}_{k0} f_2(x_k) dv}{2[\tilde{D}^*(f_2) + \tilde{C}\delta]} \left\{ 1 - \sqrt{1 + \frac{4[\tilde{D}^*(f_2) + \tilde{C}\delta] \cdot \delta \overset{\circ}{f}_1(0) \cdot \int_0^1 f_1(\tau) d\tau \cdot \int_V \rho f_2(x_k) dv}{\left(\int_V \rho \dot{u}_{k0} f_2(x_k) dv\right)^2}} \right\}.$$

Nếu như :

$$1 + \frac{4[\tilde{D}^*(f_2) + \tilde{C}\delta] \cdot \delta \overset{\circ}{f}_1(0)}{\left(\int_V \rho \dot{u}_{k0} f_2(x_k) dv\right)^2} \cdot \int_0^1 f_1(\tau) d\tau \cdot \int_V \rho f_2(x_k) dv \geq 0$$

và chú ý rằng $[\tilde{D}^*(f_2) + \tilde{C}\delta] > 0$, do ý nghĩa công suất hao tán năng lượng, $f_1(\tau) > 0$, $f_2(x_k) > 0$, $\dot{u}_{k0} > 0$, do việc chọn các hàm f_i và quy ước hệ tọa độ và $\overset{\circ}{f}_1(0) < 0$, dễ dàng suy ra rằng:

$$0 \leq T_{a_2}^* \leq T_{a_1}^*.$$

Từ đánh giá thời gian Stronge (1.9), so sánh với các giá trị $T_{a_i}^*$ vừa nhận được ở trên ta có:

$$T_{a_2}^* \leq T_{a_1}^* \leq T^*$$

Vế trái của (1.11) mang giá trị âm $\forall T_a^* \in (T_{a_2}^*, T_{a_1}^*)$ và dương trong các trường hợp còn lại. Do vậy với đánh giá thời gian T^* của Stronge (1.9):

$$T^* = \frac{\int_V \rho \dot{u}_{k0} f_2(x_k) dv}{\tilde{D}^*(f_2) + \tilde{C}\delta} \geq T_{a_1}^*$$

thì bất đẳng thức (1.11) vẫn còn đúng.

Nếu như:

$$1 + \frac{4[\tilde{D}^*(f_2) + \tilde{C}\delta] \cdot \delta \overset{\circ}{f}_1(0)}{\left(\int_V \rho \dot{u}_{k0} f_2(x_k) dv\right)^2} \cdot \int_0^1 f_1(\tau) d\tau \cdot \int_V \rho f_2(x_k) dv < 0$$

thì bất đẳng thức (1.11) thỏa mãn $\forall T_a^*$.

Khi thay đánh giá thời gian T^* của Stronge (1.9) vào (1.11) ta nhận được bất đẳng thức:

$$\tilde{A}\delta^2 + \tilde{D}^*(f_2)\delta + \frac{\left(\int_V \rho \dot{u}_{k0} f_2(x_k) dv\right)^2}{\int_V \rho f_2(x_k) dv} \cdot \frac{1 - \int_0^1 f_1(\tau) d\tau}{f_1(0)} \geq 0. \quad (1.12)$$

Chú ý rằng $\tilde{C} > 0$, $\tilde{D}^*(f_2) > 0$, $\int_0^1 f_1(\tau) d\tau < 1$, $f_1(0) < 0$, vế trái của (1.12) có hai nghiệm sau đây:

$$\delta_1 = \frac{\tilde{D}^*(f_2)}{2\tilde{C}} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{4\tilde{C}}{\tilde{D}^{*2}(f_2)} \cdot \frac{\left(\int_V \rho \dot{u}_{k0} f_2(x_k) dv\right)^2}{\int_V \rho f_2(x_k) dv} \cdot \frac{1 - \int_0^1 f_1(\tau) d\tau}{-f_1(0)}} \right] > 0,$$

$$\delta_2 = \frac{\tilde{D}^*(f_2)}{2\tilde{C}} \left[-1 - \sqrt{1 + \frac{4\tilde{C}}{\tilde{D}^{*2}(f_2)} \cdot \frac{\left(\int_V \rho \dot{u}_{k0} f_2(x_k) dv\right)^2}{\int_V \rho f_2(x_k) dv} \cdot \frac{1 - \int_0^1 f_1(\tau) d\tau}{-f_1(0)}} \right] < 0.$$

Bất đẳng thức (1.12) sẽ thỏa mãn khi chọn đánh giá dịch chuyển như sau:

$$\delta \geq \delta_1 = \frac{\tilde{D}^*(f_2)}{2\tilde{C}} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{4\tilde{C}}{\tilde{D}^{*2}(f_2)} \cdot \frac{\left(\int_V \rho \dot{u}_{k0} f_2(x_k) dv\right)^2}{\int_V \rho f_2(x_k) dv} \cdot \frac{1 - \int_0^1 f_1(\tau) d\tau}{-f_1(0)}} \right]. \quad (1.13)$$

Hệ thức (1.13) là biểu thức đánh giá dưới dịch chuyển theo phương pháp Stronge trong dạng tổng quát, khi chọn trường vận tốc dịch chuyển cho phép dưới dạng tách biến tổng quát. Khi cho $f_1(t) = 1 - \tau$ ta nhận được kết quả của Stronge.

$$\delta \geq \frac{\tilde{D}^*(f_2)}{2\tilde{C}} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2\tilde{C}}{\tilde{D}^{*2}(f_2)} \cdot \frac{\left(\int_V \rho \dot{u}_{k0} f_2(x_k) dv\right)^2}{\int_V \rho f_2(x_k) dv}} \right]. \quad (1.14)$$

Thế giá trị δ từ (1.11) vào (1.9) ta nhận được đánh giá thời gian của Stronge biểu diễn qua hàm dạng vận tốc dịch chuyển ảo được chọn.

$$T_t \geq T^* = \frac{\tilde{D}^*(f_2)}{2\tilde{C}} \cdot \frac{\int_V \rho f_2(x_k) dv}{\int_V \rho \dot{u}_{k0} f_2(x_k) dv} \cdot \frac{-f_1(0)}{1 - \int_0^1 f_1(\tau) d\tau} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{4\tilde{C}}{\tilde{D}^{*2}(f_2)} \cdot \frac{\left(\int_V \rho \dot{u}_{k0} f_2(x_k) dv\right)^2}{\int_V \rho f_2(x_k) dv} \cdot \frac{1 - \int_0^1 f_1(\tau) d\tau}{-f_1(0)}} \right]. \quad (1.15)$$

Nếu mật độ khối lượng không thay đổi tại mọi địa điểm của vật thể, vật thể chịu xung lực vận tốc phân bố đều và chọn $f_1(\tau) = 1 - \tau$ ta sẽ thu được kết quả sau:

$$\delta \geq \frac{\tilde{D}^*(f_2)}{2\tilde{C}} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2\tilde{C}\rho\dot{u}_{k0}^2}{\tilde{D}^{*2}(f_2)} \int_V f_2(x_k) dv} \right],$$

$$T^* = \frac{\tilde{D}^*(f_2)}{\tilde{C}\dot{u}_{k0}} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2\tilde{C}\rho\dot{u}_{k0}^2}{\tilde{D}^{*2}(f_2)} \int_V f_2(x_k) dv} \right].$$

2. KẾT LUẬN

Trong công trình này dựa trên khái niệm tách ten xơ tốc độ biến dạng phi tuyến thành hai thành phần: tuyến tính và phi tuyến cho phép chúng ta thực hiện được phép đánh giá hàm hao tán $\int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^* dv \geq D^* + C\delta$. Trong đó D^* là hao tán năng lượng trong phạm vi biến dạng nhỏ, còn C hệ số hoàn toàn xác định khi cho trường vận tốc dịch chuyển ảo \dot{u}_i^* .

Kết quả trên đây cho phép chúng ta xác định được biểu thức đánh giá dưới đối với các thành phần dịch chuyển theo phương pháp của Stronge. Đặc biệt khi trường vận tốc dịch chuyển cho phép được cho trong dạng tách biến, chúng ta nhận được biểu thức đánh giá (1.13), (1.15). Kết quả chỉ ra rằng bài toán động được đưa về tính toán theo bài toán tĩnh phụ trợ.

Địa chỉ:

Viện Cơ học Thành phố HCM
Trường Đại học Tổng Hợp Huế

Nhận ngày 03/6/1991

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Vũ Văn Thế, Sawczuk A. Lower bound to large displacements of impulsively loaded plastically orthotropic structures. Int. J. Sol. Struct. Vol 19, No 3, 1983.
2. Vũ Văn Thế, Trần Bá Tĩnh. Về một phương pháp đánh giá dịch chuyển của các công trình cứng dẻo chịu tải trọng động mạnh gây ra dịch chuyển lớn. Tạp chí Cơ học số 2, số 3, 1987.

SUMMARY

LOWER BOUND ON DEFORMATION FOR DYNAMICALLY LOADED RIGID-PLASTIC STRUCTURES

In this paper Stronge's technique is extends for the case, when kinematically admissible velocity field \dot{u}_i^* is assumed to be representable by a product of a time dependent function and a time independent function $f_{i2}(x_k)$

$$\dot{u}_i^* = A \cdot f_{i1}(t) \cdot f_{i2}(x_k) \quad (1)$$

and energy dissipation rate estimated follow

$$\int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^* dv \geq A \cdot f_1(t) [\tilde{D}^*(f_2) + \tilde{C}\delta]$$

It consists in separation of the strain tensor into its linear and nonlinear part which is the followed by some estimations making use of material stability condition

$$\delta = \max |u_i(x_k, t)| \quad \forall x \{x_k\} \in V,$$

$\tilde{D}^*(f_2)$, \tilde{C} were easily calculated base on chosen velocity fiel (1)

DANH SÁCH GIÁO SƯ VÀ PHÓ GIÁO SƯ
đã được Hội đồng chức danh khoa học ngành Cơ học xét duyệt
và được HĐHV và CDKH Nhà nước phong ngày 18/10/1991

DANH SÁCH GIÁO SƯ

- | | |
|---------------------|---------------------|
| 1. Đào Huy Bích | 6. Phạm Huyền |
| 2. Ngô Huy Cận | 7. Nguyễn Ân Niên |
| 3. Nguyễn Văn Đình | 8. Đỗ Sanh |
| 4. Nguyễn Văn Điệp | 9. Nguyễn Hoa Thịnh |
| 5. Nguyễn Xuân Hùng | 10. Lêu Thọ Trình |

DANH SÁCH PHÓ GIÁO SƯ

- | | | |
|------------------------|----------------------|---------------------------|
| 1. Nguyễn Đông Anh | 10. Nguyễn Tất Đắc | 19. Bùi Đình Nghi |
| 2. Nguyễn Hữu Bảng | 11. Khổng Doãn Điền | 20. Nguyễn Văn Phó |
| 3. Nguyễn Đình Chiêu | 12. Lê Viết Giảng | 21. Phan Kỳ Phùng |
| 4. Nguyễn Trọng Chuyên | 13. Nguyễn Văn Hợi | 22. Tạ Bá Phụng |
| 5. Đặng Việt Cường | 14. Nguyễn Văn Khang | 23. Nguyễn Thị Ngọc Quyên |
| 6. Phan Nguyên Di | 15. Phí Văn Lịch | 24. Nguyễn Văn Thân |
| 7. Lê Đình Don | 16. Nguyễn Văn Lệ | 25. Đào Trọng Thường |
| 8. Phùng Duy Dũng | 17. Hoàng Xuân Lượng | 26. Phạm Lợi Vũ |
| 9. Hoàng Văn Đa | 18. Nguyễn Phúc Ninh | 27. Nguyễn Mạnh Yên |