Tạp chí CƠ HỌC, tập XIII, 1991, số 4 (20 — 25)

VỀ MỘT LỚP BÀI TOÁN CỰC TRỊ TIỀN ĐỊNH TƯƠNG ĐƯƠNG VỚI BÀI TOÁN CỰC TRỊ NGẪU NHIÊN TRONG LÝ THUYẾT ĐỘ TIN CẬY CỦA CÁC CƠ HỆ

NGUYỄN VĂN PHÓ

1. MỞ ĐẦU

Trong nhiều bài toán cơ học, có các đại lượng hay quá trình ngẫu nhiên tham gia, người ta thường giải bằng hai cách:

- Giải trực tiếp bằng các thuật toán ngẫu nhiên.
- Chuyển bài toán ngẫu nhiên về bài toán tiền định tương đương.

Chẳng hạn, phương pháp tựa gradian trong bài toán quy hoạch ngẫu nhiên [1]; tìm mật độ xác suất trong bài toán dao động ngẫu nhiên dẫn đến giải phương trình vi phân Fokker - Planck - Kolmogorov [2].

Trong bài này, tác giả mở rộng các kết quả trong [3, 4], chứng minh sự tương đương giữa bài toán tìm độ tin cậy với bài toán cực trị ngẫu nhiên, sau đó chứng minh sự tương đương giữa bài toán cực trị ngẫu nhiên với bài toán cực trị tiền định.

Do đó, để giải bài toán tìm độ tin cậy của các cơ hệ chỉ cần giải bài toán quy hoạch tuyến tính hay phi tuyến tiền định với hàm mục tiêu tuyến tính.

Nhờ các thuật toán của lý thuyết quy hoạch ta khắc phục được khó khăn khi giải bài toán vượt ngưỡng trong không gian nhiều chiều [5], khó khăn khi giải bài toán có số đẳng thức ít hơn số ẩn (bài toán xác định khả năng chịu lực, bài toán thiết kế tối ưu của các cơ hệ).

Các kết quả thu được có thể áp dụng cho bài toán xác định độ tin cậy của các hệ kỹ thuật phức tạp, các hệ sinh thái.

2. SỰ TƯƠNG ĐƯƠNG GIỮA BÀI TOÁN TÌM ĐỘ TIN CẬY VỚI BÀI TOÁN CỰC TRỊ NGẪU NHIÊN

Theo [6] độ tin cậy của một hệ thống bất kỳ được xác định bởi xác suất:

$$P(t) = P\left\{\begin{array}{l} L\vec{u} = \vec{q}(\tau) \\ M\vec{u} = \vec{v} \\ f(\vec{v}) \in \Omega_0 \\ \tau \in [0,t],\ \vec{r} \in V* \end{array}\right\} \tag{2.1}$$

Trong đó, $\vec{u}$ là biến trạng thái, $\vec{v}$ là biến chất lượng, Ω_0 là miền kiểm tra chất lượng, L và M là các toán tử vi phân, $\vec{r}$ là bán kính vectơ, V^* là miền vật chiếm, t là thời gian.

Khi bỏ qua các tập có xác suất bằng không (trong lý thuyết độ tin cậy thì điều đó là chấp nhận được), ta thay

$$L\vec{u} = \vec{q} \quad \text{bởi} \quad \begin{cases} P(L\vec{u} \leq \vec{q}) = 1 \\ P(L\vec{u} \geq \vec{q}) = 1 \end{cases} \tag{2.2}$$

$$M\vec{u} = \vec{v} \quad \text{bởi} \quad \begin{cases} P(M\vec{u} \leq \vec{v}) = 1 \\ P(M\vec{u} \geq \vec{v}) = 1 \end{cases} \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered} f(\vec{v}) \in \Omega_0 \quad \text{bởi} \quad P\big[f(\vec{v}) \in \Omega_0\big] \geq p, \\ \tau \in [0,t], \quad \vec{r} \in V^*, \quad p \in [0,1]. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Vì điều kiện (2.4) có thể biểu diễn bởi một hệ bất đẳng thức. Do đó, các điều kiện (2.2), (2.3) và (2.4) có thể biểu diễn dưới dạng tổng quát

$$P\left\{g_j(\vec{u},\vec{v},\vec{\theta},t) \leq C_j(\vec{\theta},t),\ \vec{r} \in V^*\right\} \geq p_j,\ j = \overline{1,n},\ p_j \in [0,1],\ \vec{\theta} = \{\theta_i\}. \tag{2.5}$$

là véctơ ngẫu nhiên.

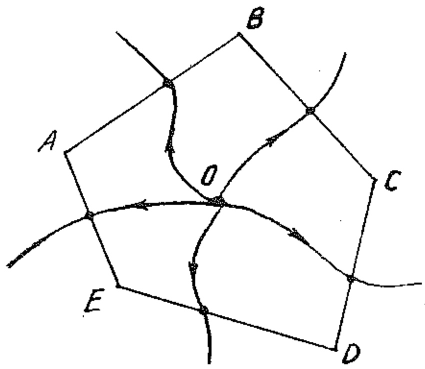
Độ tin cậy $P(t)$ của (2.1) có thể biểu diễn lại như sau:

$$P(t) = \max_{\begin{Bmatrix} \vec{u},\vec{v} \in X \\ \tau \in [0,t] \\ \vec{r} \in V^* \end{Bmatrix}} \min_{\{j\}} p_j \tag{2.6}$$

Trong đó X là tập thỏa mãn (2.2), (2.3) và (2.4) hay (2.5) với p_j tiền định (song p_j chưa biết trước).

Thật vậy, nói chung với p_j xác định, $\vec{u},\vec{v} \in X$ là đa trị. Ta tìm $\vec{u},\vec{v}$ sao cho p_j nhỏ nhất đạt cực đại, đó là giá trị $P(t)$ phải tìm.

Ta minh họa (2.6) trong không gian 2 chiều và ràng buộc tuyến tính. (Hình 1).



Hình 1

Đa giác ABCDE xác định bởi (2.5). Trạng thái của hệ có thể vượt ra ngoài miền cho phép ABCD theo các cạnh khác nhau với các xác suất khác nhau.

Giả sử $p_{AB} = p_{\min}$. Ta tìm $\max p_{AB}$ với $\vec{u},\vec{v} \in$ (ABCDE).

Nói một cách chính xác, $P(t)$ xác định theo (2.6) chỉ là cận dưới của $P(t)$, vì có thể trạng thái của hệ vượt ra ngoài miền cho phép theo một cạnh khác có xác suất lớn hơn $p_{\min}$. Song trong các bài toán cơ học, số ẩn lớn, siêu diện nghiệm là một siêu diện trong không gian nhiều chiều, mặt khác khi biết được cận dưới là đủ thông tin để quyết định các vấn đề khác như: xác định hệ số an toàn, xác định phương án thiết kế v.v...

Để thuận lợi cho việc tính toán, ta có thể chọn $p_j = p_0\ \forall j$. Chọn như vậy không làm giảm $P(t)$.

Thật vậy, nếu tồn tại p_j^* nào đó mà $p_j^* > p_0$ tức là tồn tại một điều kiện chặt hơn, trong khi ta chọn $p_j^* = p_0$ là ta đã giảm nhẹ điều kiện, hiển nhiên điều đó không làm giảm $P(t)$.

Trường hợp, mức độ quan trọng về kinh tế - kỹ thuật của các điều kiện khác nhau, thì ta dùng các trọng số α_j; α_j được xác định trước sao cho

$$p_j = \alpha_j p_0 \in [0,1] \implies p_0 \in [0, \frac{1}{\alpha_j}] \implies p_0 \in [0, \frac{1}{\alpha_{jmax}}],$$

Các α_j được chọn cao ứng với các điều kiện có tầm quan trọng hay nguy hiểm cao và ngược lại. Nếu có những p_j cho trước thì được giữ nguyên trong quá trình tính toán.

Từ những lý luận trên ta thấy để tìm $P(t)$ ta cần tìm p_0. Để tìm p_0 giải bài toán sau:

$$(I) \begin{cases} P\{g_k \le C_k\} \to \max \\ \text{với các điều kiện} \begin{cases} P\{g_i \le C_i\} \ge p_0, & i = \overline{1,n} \\ \tau \in [0,t], \ \vec{r} \in V^* \end{cases} \end{cases}$$

Trong đó, $\vec{u}$, $\vec{v}$ và p_0 là ẩn của bài toán.

hay

$$(I)' \begin{cases} p_0 \to \max \\ \text{với các điều kiện} \begin{cases} P\{g_i \le C_i\} \ge p_0 & i = \overline{1,n} \\ \tau \in [0,t], & \vec{r} \in V^* \end{cases} \end{cases}$$

Các bài toán (I) và (I)′ là các bài toán quy hoạch ngẫu nhiên [1].

Ta chọn $p_0 \in [0,1]$ hay $p_0 \in [0, \frac{1}{\alpha_{jmax}}]$ trên một tập rời rạc

$$p_0 = \left\{ p_0^{(1)} < p_0^{(2)} < \cdots < p_0^{(n)} \right\}$$

Với $p_0^{(i)} = p_6$ bài toán tồn tại phương án thì ta chuyển sang chọn $p_0 = p_0^{(i+1)}$. Quá trình lặp tương tự cho đến khi bài toán (I) hay (I)′ không tồn tại phương án thì dừng lại.

Hiển nhiên, p_0 phụ thuộc t, vì g_j phụ thuộc τ mà $\tau \in [0,t]$.

Trong quá trình giải ta xem t là tham số. Tiêu chuẩn chuyển giai đoạn là giai đoạn trước tồn tại phương án, chứ không cần tìm phương án tối ưu. Đó là đặc điểm vô cùng thuận lợi khi giải bài toán cực trị trên máy tính.

3. CHUYỂN BÀI TOÁN QUY HOẠCH NGẪU NHIÊN VỀ BÀI TOÁN QUY HOẠCH TIỀN ĐỊNH

1. Đưa các điều kiện dạng đẳng thức về tiền định.

Giả sử ngoại lực $\vec{q}(t)$ có thể biểu diễn dưới dạng [1]

$$q(t) = \sum_k Q_k \varphi_k(t)$$

Trong đó $\varphi_k(t)$ là các hàm không ngẫu nhiên của thời gian, Q_k là các đại lượng ngẫu nhiên.

Ta chọn $u(t) = \sum_k Q_k \psi_k(t)$, trong đó $\psi_k(t)$ là các hàm tiền định cần tìm.

Khi L là toán tử tuyến tính không ngẫu nhiên thì $L\vec{u} = \vec{q}$ trở thành

$$L\psi_k = \varphi_k \qquad (k = 1, 2, \dots). \tag{3.1}$$

(3.1) là hệ phương trình vi phân không ngẫu nhiên, nó được giữ nguyên trong các điều kiện của bài toán.

2. Đưa bài toán quy hoạch ngẫu nhiên về bài toán tiền định.

a) Nếu các điều kiện (2.5) $g_j(\vec{u},\vec{v},\vec{\theta},t) \leq C_j(\vec{\theta},t)$ có thể đưa về dạng

$$G_j(\vec{x},t) \leq K_j(\vec{\theta}) \qquad j=\overline{1,n}$$

trong đó $\vec{x}=\{x_i\}$ là vectơ ẩn tiền định. Trường hợp này thường gặp trong cơ học. Chẳng hạn, khi ngoại lực là tiền định còn hằng số dẻo của vật liệu là ngẫu nhiên.

Tương tự [3], ta gọi $H_j(z)$ là hàm phân phối xác suất của $K_j(\vec{\theta})$. Theo định nghĩa ta có $H_j(z) = P\{K_j(\vec{\theta}) \leq Z\}$ hay $1 - H_j(Z) = P\{K_j(\vec{\theta}) \geq G_j\}$

Bài toán (I) tương đương với bài toán

$$(II)\begin{cases} 1-H_i(G_i) \to \max \\ \text{với điều kiện} \begin{cases} 1-H_j(G_j) \geq p_0 & j=\overline{1,n} \\ \tau \in [0,t],\ \vec{r} \in V^* \end{cases} \end{cases}$$

Bài toán $(I)'$ tương đương với bài toán

$$(II)'\begin{cases} p_0 \to \max \\ \text{với điều kiện} \begin{cases} 1-p_0 \geq H_j(G_j) & j=\overline{1,n} \\ \tau \in [9,t],\ \vec{r} \in V^* \end{cases} \end{cases}$$

Vì hàm H_j là hàm không giảm theo G_j nên (II) tương đương với

$$(III)\begin{cases} G_i(\vec{x},\tau) \to \min \\ \text{với các điều kiện} \begin{cases} G_j(\vec{x},\tau) \leq \beta_j & j=\overline{1,n} \\ \tau \in [0,t],\ \vec{r} \in V^* \end{cases} \end{cases}$$

và $(II)'$ tương đương với

$$(III)'\begin{cases} p_0 \to \max \\ \text{với các điều kiện} \begin{cases} G_j(\vec{x},\tau) \leq \beta_j & j=\overline{1,n} \\ \tau \in [0,t],\ \vec{r} \in V^* \end{cases} \end{cases}$$

Trong đó, β_j là giá trị lớn nhất của β thỏa mãn bất phương trình

$$1-p_0 \geq H_j(\beta)$$

Do đó, ta có thể xác định β_j từ phương trình

$$1-p_0 = H_j(\beta)$$

Phương trình này nói chung có thể giải bằng đồ thị. (III) và $(III)'$ là các bài toán quy hoạch phi tuyến tiền định.

b) Nếu g_j trong điều kiện (2.5) có thể biểu diễn dưới dạng

$$g_j - C_j = \sum_{\nu} a_{\nu j}(\vec{\theta},t)x_j + b_\nu(\vec{\theta},t)$$

Trường hợp này xẩy ra trong các bài toán tuyến tính, nghiệm có thể biểu diễn dưới dạng biểu diễn phổ [6].

Tương tự [1], ta coi t là tham số và lấy gần đúng t trên tập rời rạc $\{t\}$ nên khi biến đổi từng điều kiện ta coi t không đổi.

x_j là ẩn, $a_{\nu j}$ và b_ν coi là độc lập và có phân phối chuẩn, ta ký hiệu $m_j(\vec{x})$ là kỳ vọng của $g_j - C_j$ nghĩa là

$$m_j(\vec{x}) = \sum_\nu (\overline{a}_{\nu j} x_j + \overline{b}_\nu)$$

trong đó $\overline{a}_{\nu j} = M a_{\nu j}$, $\overline{b}_\nu = M b_\nu$ M là ký hiệu kỳ vọng. Gọi $d_j(\vec{x}) > 0$ là phương sai của $g_j - C_j$. Ta xét đại lượng ngẫu nhiên

$$K_i(\vec{\theta}) = \frac{g_j(\vec{x}, \vec{\theta}) - C_j(\vec{\theta}) - m_j(\vec{x})}{\sqrt{d_j(\vec{x})}}$$

vì $a_{\nu j}$, b_ν có phân phối chuẩn thì $K_j(\vec{\theta})$ cũng có phân phối chuẩn với kỳ vọng bằng 0, phương sai bằng 1. Vì phân phối chuẩn được hoàn toàn xác định bởi kỳ vọng và phương sai, ta suy ra $K_j(\vec{\theta})$ không phụ thuộc $\vec{x}$ [1]. Vì thế

$$P\{g_j - C_j \leq 0\} = P\left\{\frac{g_j - C_j^* - m_j}{\sqrt{d_j}} + \frac{m_j}{\sqrt{d_j}} \leq 0\right\}$$

Do đó, ta đã đưa về trường hợp a) với hàm

$$G_j(\vec{x}) = \frac{m_j}{\sqrt{d_j}}, \qquad K_j(\vec{\theta}) = \frac{g_j - C_j - m_j}{\sqrt{d_j}}.$$

4. ỨNG DỤNG

1. Xác định xác suất sụp đổ của hệ đàn hồi - dẻo chịu tác dụng lực giới hạn.

Như ta đã thấy, lực tới hạn $p_{\max} = p_0$ trong bài toán phân tích giới hạn thỏa mãn các điều kiện [7]

$$L\sigma_{ij} = p_0, \qquad f(\sigma_{ij}) \leq C$$

Ta xét bài toán

$$\begin{cases} q \to \max \\ \text{với các điều kiện} \begin{cases} L\sigma_{ij} = p_0 \\ P\{f(\sigma_{ij}) \leq C\} \geq q \\ q \in [0,1] \end{cases} \end{cases}$$

Trong đó σ_{ij} và q là ẩn.

Bài toán thích ứng của hệ đàn dẻo cũng được thành lập tương tự khi thay σ_{ij} bởi $\sigma_{ij}^{(e)} + \rho_{ij}$, ρ_{ij} là trường ứng suất dư, $\sigma_{ij}^{(i)}$ là ứng suất đàn hồi.

2. Xác định xác suất an toàn của hệ phân bố tham số.

Xét dầm trên 2 gối tựa đơn giản chịu tác dụng tải trong phân bố $q(x,t)$ là hàm ngẫu nhiên. Gọi $M(x,t)$ là mômen uốn, M_0 là mômen giới hạn [6].

Phương trình vi phân cân bằng (bài toán tựa tĩnh) là:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = q$$

Điều kiện kiểm tra chất lượng $|M(x,t)| \leq M_0$

Giả sử

$$q(x,t) = \sum_k Q_k \varphi_k(x,t), \quad \text{ta chọn} \quad M(x,t) = \sum_k Q_k \psi_k(x,t).$$

Xác suất an toàn là

$$P(t) = P\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 \psi_k(x,\tau)}{\partial x^2} = \varphi_k(x,\tau), \ \varphi_k(0,\tau) = \psi_k(\ell,\tau) = 0 \quad i = \overline{1,n} \\ |M(x,\tau)| \leq M_0 \\ \forall x \in [0,\ell], \ \tau \in [0,t] \end{array}\right\}.$$

Dẫn đến bài toán

$$\begin{cases} P_0 \to \max \\ \text{với các điều kiện} \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \psi_k}{\partial x^2} = \varphi_k, \ \psi_k(0,\tau) = \psi_k(\ell,\tau) = 0 \\ P\{|M| \leq M_0\} \geq p_0 \\ \forall x \in [0,\ell], \ \tau \in [0,t] \end{cases} \end{cases}$$

Địa chỉ:
Trường Đại học Xây Dựng

Nhận ngày 5/7/1991

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Ермольев Ю. М. Методы стохастического программирования, Наука, Москва 1976.
2. Lin Y. K. Probabilistic theory of Structural Dynamics. Mc Graw-Hill, New York 1967.
3. Nguyễn Văn Phó. Về một phương pháp xác định độ tin cậy của các cơ hệ trong điều kiện thông tin không đầy đủ. Tạp chí Cơ học, số 3, 1988.
4. Nguyễn Văn Phó. Một lớp bài toán tiền định tương đương với bài toán ngẫu nhiên trong lý thuyết độ tin cậy. Tuyển tập Hội nghị khoa học toàn quốc cơ học vật rắn biến dạng tháng 8-1991.
5. Тихонов В. И. Выборсы случайных процессов. Наука, Москва 1970.
6. Болотин В. В. Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружрний. Стройиздат, М. 1982.
7. Hodge P. G. Plastic Analysis of Structures. New York 1959.

SUMMARY

A CLASS OF DETERMINISTIC EXTERMAL PROBLEMS EQUIVALENT TO STOCHASTIC EXTERMAL PROBLEMS IN THE RELIABILITY THEORY OF MECHANICAL SYSTEMS

In this paper, the reliability of the Mechanic Systems is expressed under a new form. Then we propose an iterative method of computing of the Reliability, and apply the obtained results to the some problems of Solid Mechanics.