Tạp chí CƠ HỌC, tập XIII, 1991, số 4 (9 — 13)

TỰ CHẤN CỦA DÂY CÓ HAI BỘ TẮT CHẤN ĐỘNG LỰC

NGUYỄN VĂN ĐÌNH

ĐẶT VẤN ĐỀ

Hoạt động của bộ tắt chấn động lực mạnh và yếu đặt vào dây chịu kích động tự chấn yếu đã được khảo sát trong [1, 2]. Trong [3] xét bộ tắt chấn động lực mạnh bằng phương pháp trung bình khi dạng dao động riêng được biểu diễn nhờ hàm liên tục khả vi từng khúc. Phương pháp và kết quả thu được có thể mở rộng cho trường hợp dây có hai bộ tắt chấn động lực.

1. HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN DAO ĐỘNG

Xét dây mềm như trong [3] nhưng có hai bộ tắt chấn động lực (m_i, c_i, λ_i) đặt tại các điểm B_i có hoành độ b_i.

Hệ phương trình vi phân dao động nhỏ của cơ hệ là:

$$\mu\frac{\partial^2 y^{(j)}}{\partial t^2} - k\frac{\partial^2 y^{(j)}}{\partial x^2} = \varepsilon R\Big(\frac{\partial y^{(j)}}{\partial t}\Big), \qquad b_{j-1} \le x \le b_j \tag{1.1}$$

$$m_i\ddot{z}_i + c_i\big(z_i - y(b_i,t)\big) = -\varepsilon\lambda_i\Big(\dot{z}_i - \frac{\partial y(b_i,t)}{\partial t}\Big) \tag{1.2}$$

Các điều kiện biên là:

$$y^{(1)}(0,t) = \frac{\partial^2 y^{(1)}(0,t)}{\partial x^2} = y^{(3)}(\ell,t) = \frac{\partial^2 y^{(3)}(\ell,t)}{\partial x^2} = 0 \tag{1.3}$$

Các điều kiện liên hợp tại nút B_i gồm điều kiện liên tục:

$$y^{(i)}(b_i,t) = y^{(i+1)}(b_i,t) = y(b_i,t) \tag{1.4}$$

và điều kiện cân bằng của nút tại từng thời điểm:

$$c_i\big(z_i - y(b_i,t)\big) + \varepsilon\lambda_i\Big(\dot{z}_i - \frac{\partial y(b_i,t)}{\partial t}\Big) = k\Big[\frac{\partial y^{(i)}(b_i,t)}{\partial x} - \frac{\partial y^{(i+1)}(b_i,t)}{\partial x}\Big] \tag{1.5}$$

trong đó $i = 1, 2$; $j = 1, 2, 3$; $b_0 = 0$, $b_3 = \ell$; các ký hiệu có ý nghĩa như trong [3].

2. PHƯƠNG TRÌNH TẦN SỐ VÀ DAO ĐỘNG RIÊNG

Cho $\varepsilon = 0$ hệ (1.1) - (1.5) mô tả dao động riêng của hệ. Theo phương pháp phân ly biến [5], đặt:

$$y_0^{(j)}(x,t) = Y^{(j)}(x)\cos\omega t, \qquad z_0^{(i)}(t) = Z^{(i)}\cos\omega t \tag{2.1}$$

Trong đó ω - tần số riêng; $Y^{(j)}(x)$, $Z^{(i)}$ - các hàm và các hằng số xác định dạng dao động riêng.
Với (2.1), hệ (1.1) - (1.5), khi $\varepsilon = 0$, trở thành:

$$\mu\omega^2 Y^{(j)} + k\frac{d^2Y^{(j)}}{dx^2} = 0, \qquad b_{j-1} \le x \le b_j \tag{2.2}$$

$$Z^{(i)}(c_i - m_i\omega^2) = c_i Y(b) \tag{2.3}$$

$$Y^{(1)}(0) = \frac{d^2Y^{(1)}(0)}{dx^2} = Y^{(3)}(b) = \frac{d^2Y^{(3)}(\ell)}{dx^2} = 0 \tag{2.4}$$

$$Y^{(i)}(b_i) = Y^{(i+1)}(b_i) = Y(b_i) \tag{2.5}$$

$$c_i\left[Z^{(i)} - Y(b_i)\right] = k\left[\frac{dY^{(i)}(b_i)}{dx} - \frac{dY^{(i+1)}(b_i)}{dx}\right] \tag{2.6}$$

Hệ phương trình (2.2) và các điều kiện (2.4) sẽ thỏa mãn khi chọn:

$$\begin{aligned} &Y^{(1)}(x) = \alpha\sin\nu x, \quad Y^{(3)}(x) = \beta\sin\nu(\ell - x), \quad \nu = \omega\sqrt{\mu/k},\\ &Y^{(2)}(x) = \gamma\sin\nu(x - b_2) + \delta\sin\nu(x - b_1) + \end{aligned} \tag{2.7}$$

Các hệ thức (2.3) và các điều kiện (2.5),(2.6) cho hệ phương trình bậc nhất đẳng cấp đối với α, β, $Z^{(1)}$, $Z^{(2)}$

$$\begin{aligned}
&c_1\alpha\sin\nu b_1 + (m_1\omega^2 - c_1)Z^{(1)} = 0\\
&c_2\beta\sin\nu(\ell - b_2) + (m_2\omega^2 - c_2)Z^{(2)} = 0\\
&\alpha\sin\nu b_1 - \gamma\sin\nu(b_1 - b_2) = 0\\
&\beta\sin\nu(\ell - b_2) - \delta\sin\nu(b_2 - b_1) = 0\\
&k\alpha\nu\cos\nu b_1 - k[\nu\gamma\cos\nu(b_1 - b_2) + \nu] - c_1Z^{(1)} + c_1\alpha\sin\nu b_1 = 0\\
&k[\nu\gamma + \nu\delta\cos\nu(b_2 - b_1)] + k\nu\beta\cos\nu(\ell - b_2) - c_2Z^{(2)} + c_2\beta\sin\nu(\ell - b_2) = 0
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Để hệ có nghiệm không tầm thường, định thức của hệ phải triệt tiêu và cho phương trình tần số riêng:

$$\begin{vmatrix}
C_1\sin\nu b_1 & 0 & m_1\omega^2 - C_1 & 0 & 0 & 0\\
0 & C_2\sin\nu(\ell - b_2) & 0 & m_2\omega^2 - C_2 & 0 & 0\\
\sin\nu b_1 & 0 & 0 & 0 & \sin\nu(b_2 - b_1) & 0\\
0 & \sin\nu(\ell - b_2) & 0 & 0 & 0 & \sin\nu(b_1 - b_2)\\
\begin{smallmatrix}-C_1\sin\nu b_1\\ -k\nu\cos\nu b_1\end{smallmatrix} & 0 & C_1 & 0 & k\nu\cos\nu(b_1 - b_2) & k\nu\\
0 & \begin{smallmatrix}-C_2\sin\nu(\ell - b_2)\\ -k\nu\cos\nu(\ell - b_2)\end{smallmatrix} & 0 & C_2 & -k\nu & -k\nu\cos\nu(b_2 - b_1)
\end{vmatrix} = 0 \tag{2.9}$$

Phương trình này cho hệ vô hạn tần số riêng ω_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Theo những phân tích trong [4], so với phương trình tần số riêng lập nhờ phương pháp được xử dụng trong [6], phương trình (2.9) có ưu điểm vì cho đầy đủ các tần số riêng kể cả khi xẩy ra hiện tượng trùng tần số (giữa dây có bộ tắt chấn và dây không có bộ tắt chấn)

Thí dụ, trường hợp tần số riêng của hệ trùng với tần số riêng của bộ tắt chấn thứ nhất $\omega_* = \sqrt{c_1/m_1}$ xẩy ra khi:

$$\sin \nu b_1 = 0 \tag{2.10}$$

$$\sin \nu (b_1 - b_2) = 0 \tag{2.11}$$

hoặc:

$$\begin{vmatrix} C_2 \sin \nu(\ell - b_2) & m_2\omega^2 - C_2 & 0 \\ \sin \nu(\ell - b_2) & 0 & \sin \nu(b_2 - b_1) \\ -C_2 \sin \nu(\ell - b_2) - k\nu \cos \nu(\ell - b_2) & C_2 & -k\nu \cos \nu(b_2 - b_1) \end{vmatrix} = 0 \tag{2.12}$$

Điều kiện (2.10) chứng tỏ ω_* cũng là tần số riêng của đoạn dây OB_1; trong dao động tương ứng, đoạn dây B_1A cùng bộ, tắt chấn thứ hai đứng im, đoạn dây OB_1 dao động ngược hoặc thuận pha với bộ tắt chấn thứ nhất tùy theo ω_* là tần số riêng bậc lẻ hay chẵn của đoạn dây OB_1.

Điều kiện (2.11) xẩy ra nếu ω_* là tần số riêng của đoạn dây B_1B_2.

Điều kiện (2.12) viết được dưới dạng:

$$(c_2 - m_2\omega^2)\sqrt{\mu k} \sin \omega(\ell - b_1)\sqrt{\mu/k} = c_2 m_2 \omega \sin \omega(\ell - b_2)\sqrt{\mu/k} \sin \omega(b_2 - b_1)\sqrt{\mu/k} \tag{2.13}$$

Chú ý đến phương trình tần số riêng (2.19) lập trong [3], có thể nhận thấy (2.13) là phương trình tần số riêng của đoạn dây B_1A với bộ tắt chấn động lực thứ hai: trong dao động riêng tương ứng, đoạn dây OB_1 đứng im, bộ tắt chấn thứ nhất dao động cùng với đoạn dây B_1A mang bộ tắt chấn thứ hai. Tần số ω_* có thể là bội trong nhiều trường hợp. Thí dụ khi (2.10), (2.11) đồng thời thỏa mãn hoặc khi (2.13) có nghiệm bội ω_* và (2.11) thỏa mãn v. v...

Điều kiện trực giao giữa các dạng dao động riêng biểu diễn bởi hệ thức:

$$\mu \sum_{j=1}^{3} \int_{b_{j-1}}^{b_j} Y_r^{(j)} Y_s^{(j)} dx + \sum_{i=1}^{2} m_i Z_r^{(i)} Z_s^{(i)} = \begin{cases} 0 & khi \quad r \neq s \\ M_s & khi \quad r = s \end{cases} \tag{2.14}$$

Chú ý rằng đối với các tần số bội, phải chọn các dạng dao động riêng một cách thích hợp để các điều kiện trực giao được thỏa mãn.

3. TỰ CHẤN ĐƠN TẦN

Trở lại hệ kích động (1.1) - (1.5), chúng ta thành lập hệ phương trình trung bình cho chế độ tự chấn đơn tần lân cận tần số riêng ký hiệu ω_* - mà chúng ta giả thiết là đơn và không có cộng hưởng với các tần số khác.

Nếu dừng lại ở xấp xỉ thứ nhất không hoàn chỉnh, có thể đặt:

$$y^{(j)}(x,t) = Y_1^{(j)}(x) T_1(t), \qquad b_{j-1} \le x \le b_j \tag{3.1}$$

$$z^{(i)}(t) = Z_1^{(i)} \cdot T_1(t) - \varepsilon \frac{\lambda_i}{c_i} (Z_1^{(i)} - Y_1(b_i)) \dot{T}_1(t) \tag{3.2}$$

trong đó $T_1(t)$ hàm theo thời gian cần xác định; dấu "." đặt trên cao là ký hiệu đạo hàm theo thời gian.

Các điều kiện biên (1.3) và điều kiện liên tục tại các nút (1.4) được thỏa mãn còn điều kiện cân bằng tại các nút (1.5) được thỏa mãn sai kém $0(\varepsilon^2)$.

Thay (3.1), (3.2) vào (1.1), (1.2), chúng ta được:

$$\begin{aligned} &\mu Y_1^{(j)}\ddot{T}_1 - k\frac{d^2Y_1^{(j)}}{dx^2}T_1 = \varepsilon R^{(j)} \\ &m_i Z_1^{(i)}\ddot{T}_1 + c_i\big(Z_1^{(i)} - Y_1(b_i)\big)T_1 = \varepsilon g^{(i)} \end{aligned} \tag{3.3}$$

trong đó R^j - hàm $R(\frac{\partial y^{(j)}}{\partial t})$ sau khi thay $(\frac{\partial y^{(j)}}{\partial t})$ bởi biểu thức của nó tính theo (3.1); $g^{(i)}$ hàm có biểu thức

$$g^{(i)} = \frac{\lambda_i m_i}{c_i}\big(Z_1^{(i)} - Y_1(b_i)\big)\dddot{T}_1(t) \tag{3.4}$$

Tương ứng nhân các hệ thức (3.3) với $Y^{(j)}dx$ rồi tích phân từ b_{j-1} đến b_j, cộng chúng lại và cộng với hệ thức (3.4) sau khi tương ứng nhân các hệ thức cuối này với $Z_1^{(i)}$, chú ý đến (2.2), (2.3) và (2.14) chúng ta được:

$$\ddot{T}_1 + \omega_1^2 T_1 = \frac{\varepsilon}{M_1}f_1 \tag{3.5}$$

trong đó

$$f_1 = \sum_{j=1}^{3}\int_{b_{j-1}}^{b_j} R^{(j)}Y_1^{(j)}dx + \sum_{i=1}^{2} g^{(i)}Z_1^{(i)} \tag{3.6}$$

Việc chuyển sang biến biên độ và pha được tiến hành bình thường. Hệ phương trình trung bình là:

$$\dot{a}_1 = \frac{\varepsilon a_1}{2M_1}\{h_1^* - \sum_{i=1}^{2}\lambda_i\big[Z_1^{(i)} - Y_1(b_i)\big]^2 - \frac{3}{4}h_3^* a_1^2\omega_1^2\}, \qquad \dot{\psi}_1 = \omega_1 \tag{3.7}$$

trong đó

$$h_1^* = h_1\sum_{j=1}^{3}\int_{b_{j-1}}^{b_j} {Y_1^{(j)}}^2 dx, \qquad h_3^* = h_3\sum_{j=1}^{3}\int_{b_{j-1}}^{b_j} {Y_1^{(j)}}^4 dx \tag{3.8}$$

Đối với trường hợp tần số bội, những biến đổi được thực hiện như trường hợp tương ứng trong [3].

KẾT LUẬN

Những nội dung vừa trình bày cho thấy phương pháp tiến hành trong [3] để khảo sát tự chấn của dây có một bộ tắt chấn động lực được mở rộng dễ dàng cho dây có hai bộ tắt chấn động lực với những kết quả tương tự. Trường hợp dây có nhiều bộ tắt chấn động lực , việc xử dụng phương pháp trên không gặp khó khăn nào về mặt nguyên tắc.

Địa chỉ:
Viện Cơ Viện KHVN

Nhận ngày 17/2/1990

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Văn Đạo. Bộ tắt chấn động lực ở hệ tự chấn với tham số phân bố. Tạp chí Cơ học, số 4, 1985.
2. Nguyễn Văn Đạo, Nguyễn Văn Đình. Dynamic absorber for sysrems with distributed parameters. Proceedings of NCSR Vietnam Vol. 2, 1990.
3. Nguyễn Văn Đình. Tự chấn của dây có một bộ tắt chấn động lực. Tạp chí Cơ học, số 4, 1990.
4. Nguyễn Văn Đình. Tần số riêng của dây mang khối lượng tập trung. Tạp chí Cơ học, số 1, 1991.
5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики, Государственное Издательство Москва 1972.
6. Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И. Асимптотические решения уравнений в частных производных Изд. Издательского объединения "Вища школа" Киев, 1976.

РЕЗЮМЕ

АВТОКОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ С ДВУМЯ ДИНАМИЧЕСКИМИ ГАСИТЕЛЯМИ

Рассматриваны автоколебания струны с двумя динамическими гасителями. Метод и результаты использованные в данной статье, являются расширением метода и результаты в [3].

THÔNG BÁO SỐ 1

HỘI NGHỊ CƠ HỌC TOÀN QUỐC LẦN THỨ NĂM

Hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ năm dự định tiến hành vào cuối năm 1992 với sự phối hợp tổ chức của Hội Cơ học Việt Nam, Viện Khoa học Việt Nam, Bộ Giáo dục và đào tạo, Ủy ban Khoa học Nhà nước.

Hội nghị sẽ tiến hành theo các tiểu ban:

1. Cơ học đại cương
2. Cơ học máy
3. Cơ học vật rắn biến dạng
4. Cơ học chất lỏng và chất khí
5. Cơ học đất đá và môi trường rời
6. Các vấn đề giảng dạy Cơ học, lịch sử Cơ học

Những vấn đề chi tiết hơn liên quan đến hội nghị xin xem các thông báo tiếp theo. Liên hệ với Ban chuẩn bị hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ năm theo địa chỉ:

Viện Cơ học 224 Đội Cấn, Hà Nội, Tel 2. 63641, PTS. Nguyễn Thị Trung.