

## MỞ RỘNG MÔ HÌNH ĐÉO TRƯỢT ĐA TINH THỂ CHO BIẾN DẠNG PHẪNG TỔNG QUÁT

BÙI HỮU DÂN, J. KRATOCHVIL, M. SATRA

### 1. MỞ ĐẦU

Mô hình dẻo trượt đa tinh thể được các tác giả M. Tokuda, Ohashi, J. Kratochvil đưa ra dựa trên các kiến thức sâu sắc của vật lý tinh thể và các kết quả thực nghiệm mới nhất một cách hệ thống [1, 2]. Sau khi phân tích những giả thiết cơ bản của mô hình phù hợp với cấu trúc đa tinh thể của kim loại, các tác giả đã đưa ra một hệ phương trình xác định của lý thuyết dẻo từ các tham số cấu trúc tinh thể vi mô - bán vi mô của vật liệu kim loại. Tuy ở những ý tưởng ban đầu các hiệu ứng vận tốc (biến dạng hoặc đặt tải), hiệu ứng nhiệt độ, ... chưa được xét đến, nhưng nhiều tính toán cụ thể đã được tính toán và so sánh với các kết quả thí nghiệm. Việc so sánh đã chỉ rõ tính sâu sắc và đúng đắn của mô hình này.

Vì lý do kỹ thuật các thí nghiệm quá trình biến dạng dẻo chịu tải phức tạp cho đến nay rất hạn chế, mới có ít phòng thí nghiệm thực hiện được các thí nghiệm với quá trình chất tải hai chiều và một vài trường hợp cá biệt, là ba chiều (tải tổng quát được biểu diễn trong không gian 6 chiều).

Ở đây các tác giả mở rộng thuật toán mô hình dẻo trượt đa tinh thể cho quỹ đạo biến dạng tổng quát trong không gian 3 chiều, trong đó véc tơ biến dạng dẻo

$$\vec{\epsilon} = \epsilon_1 \vec{e}_1 + \epsilon_2 \vec{e}_2 + \epsilon_3 \vec{e}_3 \quad (1.1)$$

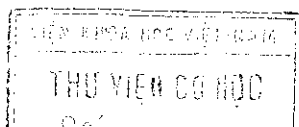
với các thành phần biểu diễn qua các thành phần của ten xoắn biến dạng:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= e_{11}, \\ \epsilon_2 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{2} e_{21} + e_{22} \right), \\ \epsilon_3 &= \frac{2}{\sqrt{3}} e_{12}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Cũng trong không gian 3 chiều đó ta có biểu diễn của véc tơ ứng suất:

$$\vec{s} = s_1 \vec{e}_1 + s_2 \vec{e}_2 + s_3 \vec{e}_3 \quad (1.3)$$

qua các thành phần của ten xoắn ứng suất:



$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{3}{2}s_{11}, \\
s_2 &= \sqrt{3}\left(\frac{1}{2}s_{11} + s_{22}\right), \\
s_3 &= \sqrt{3}s_{12}.
\end{aligned}
\tag{1.4}$$

Các véc tơ biến dạng dẻo, véc tơ ứng suất với các thành phần xác định như trên (1.1) - (1.4), biểu diễn được trạng thái biến dạng tổng quát của các bài toán phẳng [4]. Việc mở rộng thuật toán của mô hình dẻo trượt đa tinh thể cho các trường hợp này được ứng dụng cho tất cả các bài toán phẳng của lý thuyết dẻo của các vật liệu kim loại (cấu trúc đa tinh thể).

## 2. MỞ RỘNG THUẬT TOÁN

Các tác giả của mô hình dẻo trượt đa tinh thể bằng các phân tích cơ chế vi mô của biến dạng dẻo đã sử dụng các liên hệ vi mô: định luật Schmidt về giá trị tới hạn của ứng suất trượt cho một hệ trượt hoạt động, định luật tái bền [6]. Các tác giả đã áp dụng mô hình này tính toán cho vật liệu kim loại đồng đa tinh thể [2]. Kết quả tính toán thể hiện được các tính chất tinh tế của biến dạng dẻo: hiệu ứng Bauschinger, hiệu ứng tái bền và đặc biệt thể hiện cả hiệu ứng địa phương (trương ứng là các hiệu ứng chậm và các hiệu ứng bão hòa delay effect and a saturated effect).

Tuy vậy thuật toán đó mới chỉ áp dụng cho một mặt trượt hoạt động trong hạt đơn tinh thể và trong mặt trượt đó chỉ có 3 cặp hướng trượt lập với nhau các góc  $60^\circ$  hoạt động. Ở đây mặt dẻo của đơn tinh thể được biểu diễn bằng lăng trụ lục giác [3, 6]. Trong không gian ứng suất 3 chiều (1.3) - (1.4), các đặc trưng trên là có các quỹ đạo biến dạng luôn luôn nằm trong một mặt phẳng cố định của không gian 3 chiều đó. Đối với các tính toán ứng dụng đó là một hạn chế lớn cần khắc phục. Có hai hướng mở rộng thuật toán mô hình: Phương pháp dễ thấy nhưng khó thực hiện là xét đến tất cả các hệ trượt trong các hạt đa tinh thể có thể có trong cấu trúc đa tinh thể của vật liệu, phương pháp khác là dựa vào các nhận xét về biến dạng dẻo, mở rộng thuật toán cho các quỹ đạo biến dạng phức tạp hơn. Ở đây ta chọn phương pháp thứ hai.

Dựa vào nhận xét từ thực nghiệm của Tanaka (trường đại học Nagoya Nhật Bản): Trong quá trình biến dạng của đa tinh thể, véc tơ gia số ứng suất tương ứng với gia số biến dạng đã cho luôn luôn nằm trong mặt phẳng xác định bởi véc tơ ứng suất tức thời và véc tơ gia số biến dạng (ta gọi là mặt phẳng mô hình), tức là:

$$\vec{\Delta s} = K_1 \vec{\Delta e} + K_2 \vec{s} \tag{2.1}$$

ở đây  $K_1, K_2$  là các hàm của thời gian, độ dài quỹ đạo biến dạng và hình dạng của của quỹ đạo biến dạng trước đó.

Quỹ đạo biến dạng cong bất kỳ trong không gian ba chiều được xấp xỉ bằng đường gấp khúc liên tục nên thuật toán chỉ cần mở rộng cho đường gấp khúc bất kỳ. Theo tính chất quy nạp ta xây dựng thuật toán cho đoạn thẳng gấp khúc tiếp theo bất kỳ khi thuật toán đã thực hiện được cho đoạn thẳng gấp khúc trước nó.

Cho trước các véc tơ gia số biến dạng của hai đoạn thẳng gấp khúc đó là:

$$\begin{aligned}
\vec{\Delta e} &= (\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3), \\
\vec{\Delta e}' &= (\Delta'_1, \Delta'_2, \Delta'_3).
\end{aligned}
\tag{2.2}$$

Véc tơ ứng suất tương ứng tại điểm gấp khúc giữa hai đoạn thẳng trên đã xác định được:

$$\vec{s} = (s_1, s_2, s_3). \quad (2.3)$$

Để thấy: Mặt phẳng mô hình sẽ không đổi khi trạng thái đang xét vẫn tương ứng với cùng một đoạn thẳng của đường gấp khúc. Ta gọi mặt phẳng mô hình ứng với hai đoạn gấp khúc trên là  $T_1, T_2$ .

Gọi véc tơ chỉ phương của hệ tọa độ hai chiều trên  $T_1$  là

$$\vec{f}_1(1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \quad \text{và} \quad \vec{f}_2(1) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3). \quad (2.4)$$

Ta cần xây dựng trên  $T_2$  hệ tọa độ cơ sở và thiết lập liên hệ với hệ tọa độ trên  $T_1$ . Theo định nghĩa, mặt mô hình  $T_2$  chứa véc tơ  $\vec{s}$  và  $\Delta \vec{e}'$ . Dùng biểu thức xác định (IV.2) trong [4] thì  $T_2$  được duy nhất bởi pháp tuyến:

$$\begin{aligned} \vec{n}(2) &= R \frac{\vec{s} \times \Delta \vec{e}'}{|\vec{s} \times \Delta \vec{e}'|} = (n_1(2), n_2(2), n_3(2)) = \\ &= R \left( \frac{s_2 \Delta'_3 - s_3 \Delta'_2}{N}, \frac{s_3 \Delta'_1 - s_1 \Delta'_3}{N}, \frac{s_1 \Delta'_2 - s_2 \Delta'_1}{N} \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

ở đây

$$|N| = |\vec{s} \times \Delta \vec{e}'|. \quad (2.6)$$

Hệ tọa độ hai chiều trên  $T_2$ :

$$\begin{aligned} \vec{f}_1(2) &= (\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3), \\ \vec{f}_2(2) &= (\beta'_1, \beta'_2, \beta'_3) \end{aligned} \quad (2.7)$$

nhận được từ hệ (2.4) bằng phép quay quanh véc tơ ứng suất  $\vec{s}$ .

Để xác định các thành phần của véc tơ cơ sở (2.7) ta có các nhận xét sau:

1) Véc tơ  $\vec{f}_1(2)$  và  $\vec{f}_2(2)$  vuông góc với nhau và vuông góc với véc tơ pháp tuyến (2) xác định bởi (2.4). Điều đó cho

$$\begin{aligned} \vec{f}_1(2) \cdot \vec{n}(2) &= 0, \\ \vec{f}_2(2) \cdot \vec{n}(2) &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

hay dạng thành phần:

$$\begin{aligned} \alpha'_1 n_1(2) + \alpha'_2 n_2(2) + \alpha'_3 n_3(2) &= 0, \\ \beta'_1 n_1(2) + \beta'_2 n_2(2) + \beta'_3 n_3(2) &= 0. \end{aligned} \quad (2.8')$$

2)  $\vec{f}_1(2)$  và  $\vec{f}_2(2)$  nhận được từ (2.4) bằng phép quay quanh véc tơ  $\vec{s}$ , nên:

$$\begin{aligned} \vec{f}_1(2) \cdot \vec{s} &= \vec{f}_1(1) \cdot \vec{s}, \\ \vec{f}_2(2) \cdot \vec{s} &= \vec{f}_2(1) \cdot \vec{s} \end{aligned} \quad (2.9)$$

hay dạng thành phần:

$$\begin{aligned} \alpha'_1 s_1 + \alpha'_2 s_2 + \alpha'_3 s_3 &= \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \alpha_3 s_3, \\ \beta'_1 s_1 + \beta'_2 s_2 + \beta'_3 s_3 &= \beta_1 s_1 + \beta_2 s_2 + \beta_3 s_3. \end{aligned} \quad (2.9')$$

3) Véc tơ gia số biến dạng  $\vec{\Delta e}'$  thuộc  $T_2$  nên biểu diễn tuyến tính được qua hai véc tơ  $\vec{f}_1(2)$ ,  $\vec{f}_2(2)$ :

$$\vec{\Delta e}' = A_1 \vec{f}_1(2) + A_2 \vec{f}_2(2) \quad (2.10)$$

ở đây các hệ số  $A_1$  và  $A_2$  có thể được xác định bằng cách nhân vô hướng  $\vec{\Delta e}'$  lần lượt với  $\vec{f}_1(2)$ ,  $\vec{f}_2(2)$  ta có:

$$\begin{aligned} A_1 &= \Delta' \cos(\vec{\Delta e}', \vec{f}_1(2)) = \Delta'_1 \alpha'_1 + \Delta'_2 \alpha'_2 + \Delta'_3 \alpha'_3, \\ A_2 &= \Delta' \cos(\vec{\Delta e}', \vec{f}_2(2)) = \Delta'_1 \beta'_1 + \Delta'_2 \beta'_2 + \Delta'_3 \beta'_3 \end{aligned} \quad (2.11)$$

ở đây :

$$\Delta' = |\vec{\Delta e}'| = (\Delta_1'^2 + \Delta_2'^2 + \Delta_3'^2)^{1/2}$$

và các góc giữa các véc tơ  $\vec{f}_1(2)$ ,  $\vec{f}_2(2)$  với  $\vec{\Delta e}'$  có liên hệ:

$$\begin{aligned} (\vec{\Delta e}', \vec{f}_1(2)) &= \omega = \alpha \pm \theta, \\ (\vec{\Delta e}', \vec{f}_2(2)) &= \frac{\pi}{2} - \omega = \frac{\pi}{2} - \alpha \mp \theta. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Các góc  $\alpha$  và  $\theta$  là các góc đã xác định

$$\begin{aligned} \alpha &= (\vec{\Delta e}', \vec{s}), \\ \theta &= (\vec{s}, \vec{f}_1(2)). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Dấu trong biểu thức (2.12) được xác định phụ thuộc vào vị trí tương đối của hai bộ véc tơ  $(\vec{n}(2), \vec{s}, \vec{\Delta e}')$  và  $(\vec{n}(2), \vec{s}, \vec{f}_1(2))$  (hình vẽ); Các biểu thức (2.12) có thể biểu diễn ở dạng đơn trị:

$$\begin{aligned} (\vec{\Delta e}', \vec{f}_1(2)) &= \omega = \alpha - K\theta, \\ (\vec{\Delta e}', \vec{f}_2(2)) &= \frac{\pi}{2} - \omega = \frac{\pi}{2} - \alpha + K\theta \end{aligned} \quad (2.12')$$

với

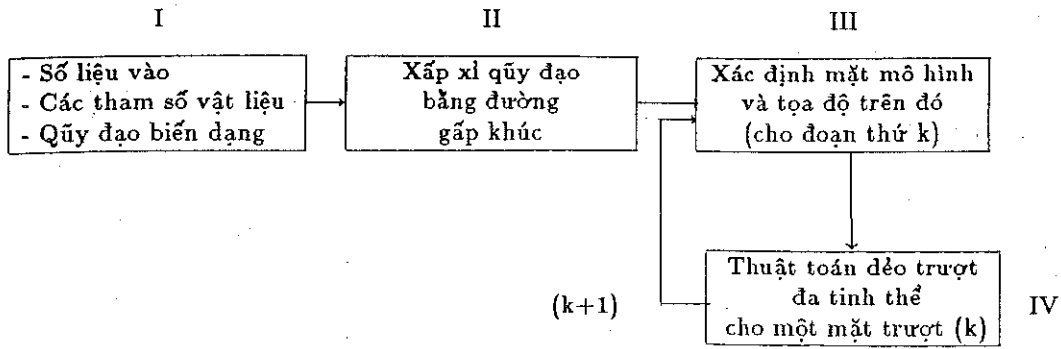
$$K = \text{sgn} \left( \frac{[\vec{n}(2), \vec{s}, \vec{\Delta e}']}{[\vec{n}(1), \vec{s}, \vec{f}_1(1)]} \right). \quad (2.14)$$

Như vậy các phương trình đại số tuyến tính (2.8'), (2.9'), (2.10) và (2.11) cho phép xác định đồng thời các thành phần của  $\vec{f}_1(2)$ ,  $\vec{f}_2(2)$  và  $A_1$ ,  $A_2$  theo các véc tơ tương ứng đã biết ở đoạn quỹ đạo biến dạng trước đó. Từ đây ta có đủ dữ liệu áp dụng thuật toán của mô hình dẻo trượt đa tinh thể với mặt trượt là mặt mô hình  $T_2$  cho toàn bộ đoạn thẳng mới của quỹ đạo gấp khúc. Thuật toán này lại được lặp lại cho các đoạn quỹ đạo tiếp theo.

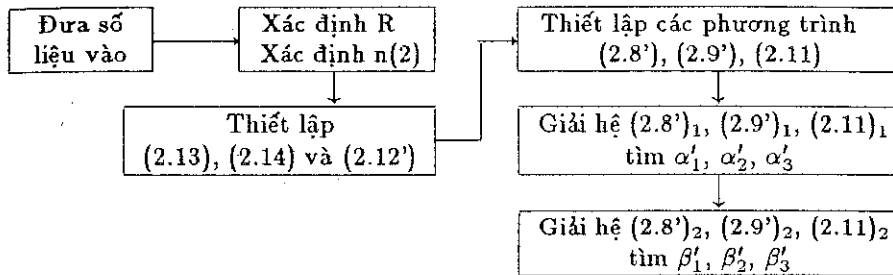
### 3. ỨNG DỤNG THUẬT TOÁN MỞ RỘNG

Rõ ràng với kết quả mở rộng ở phần trên, kết hợp với thuật toán dẻo trượt đa tinh thể cho một mặt trượt [2] ta có thể tính toán được cho các quỹ đạo biến dạng bất kỳ trong không gian biến dạng ba chiều. Toàn bộ quá trình này đã được thể hiện qua chương trình tính toán lắp ghép với chương trình của các tác giả mô hình [2, 4] và có sơ đồ tổng thể mô tả qua bốn khối chính:

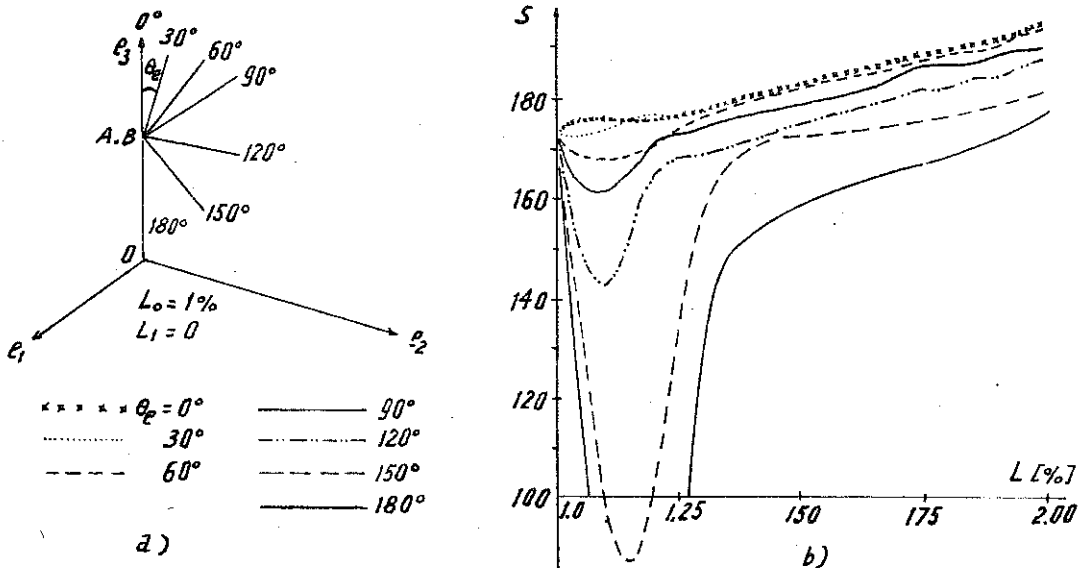
**Sơ đồ 1 : Sơ đồ tổng thể của thuật toán dẻo trượt đa tinh thể mở rộng**



**Sơ đồ 2 : Sơ đồ của khối IV**

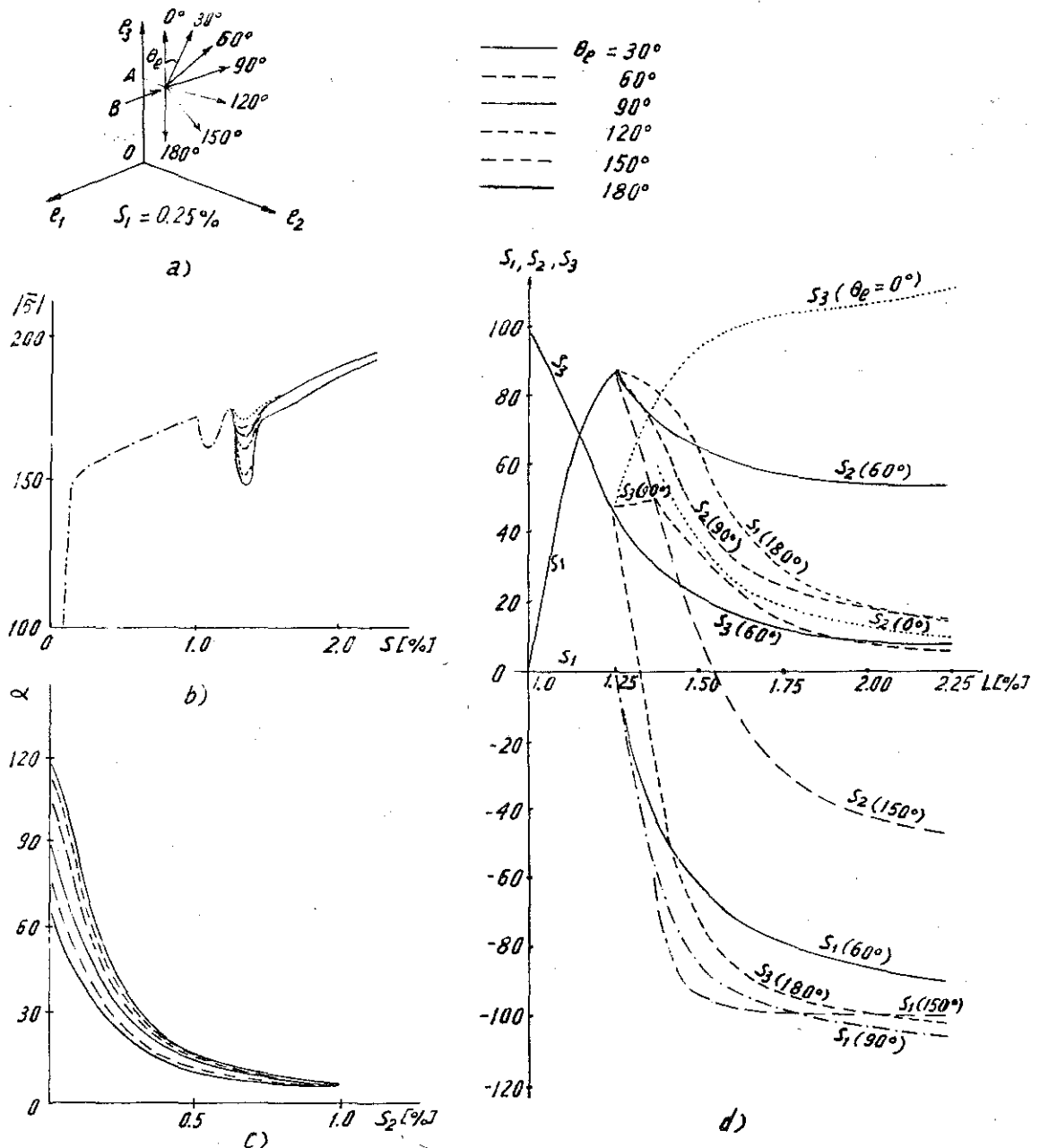


Sau đây là một số kết quả tính toán bằng số cho một số quỹ đạo biến dạng đặc trưng (từ hình 1-4) đối với vật liệu đồng đa tinh thể, với các hằng số vật liệu thực nghiệm đã dùng ở [2].



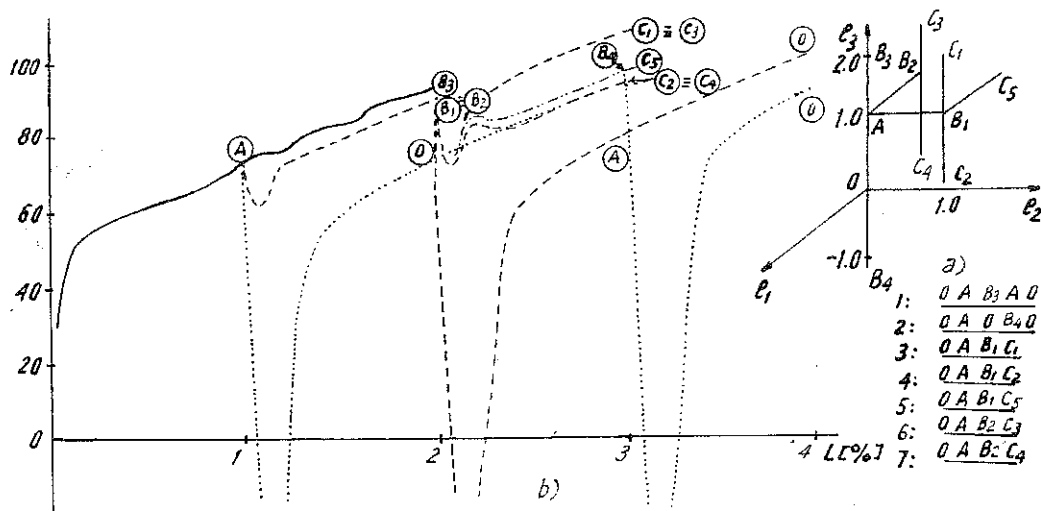
**Hình 1. Kết quả tính toán cho quỹ đạo gấp khúc 2 đoạn**

- a) Quỹ đạo biến dạng
- b) Giá trị của véc tơ ứng suất



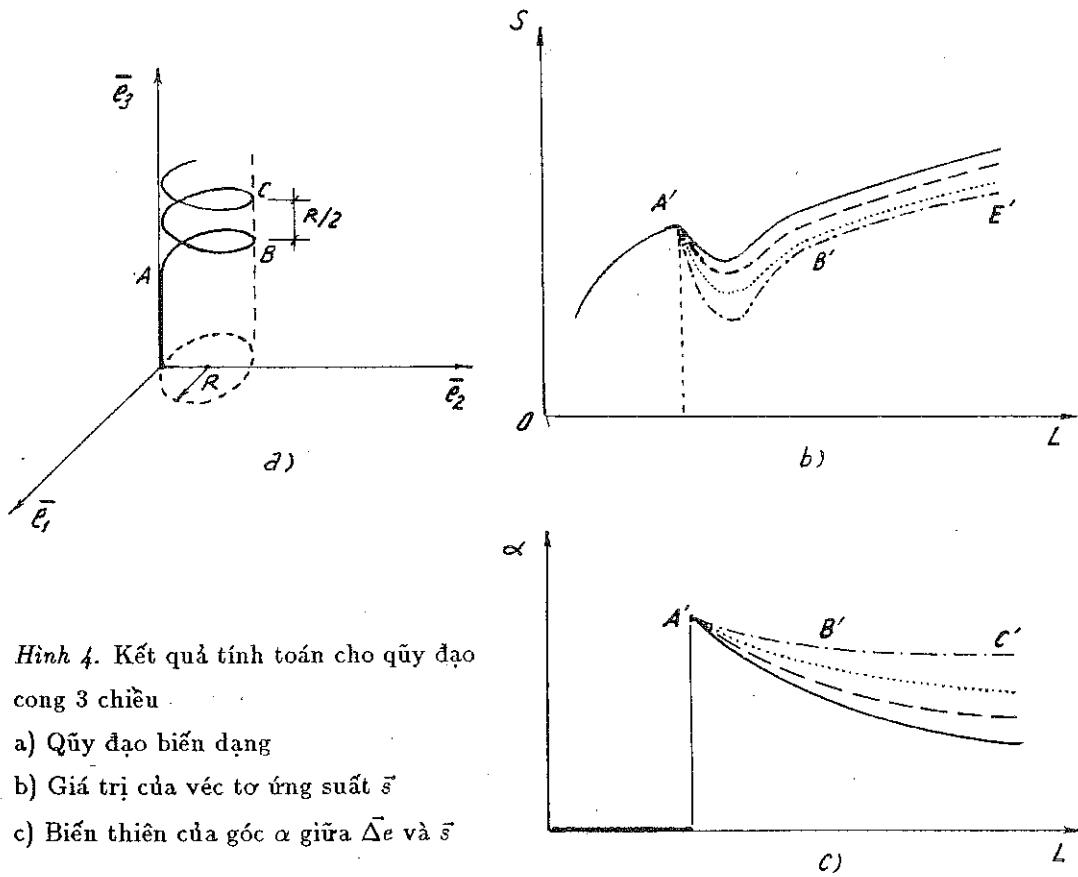
Hình 2. Kết quả tính toán cho quỹ đạo gấp khúc 3 đoạn.

- a) Quỹ đạo biến dạng
- b) Giá trị của véc tơ ứng suất
- c) Biến thiên của góc  $\alpha$  ở đoạn quỹ đạo thứ 3
- d) Giá trị của từng thành phần của véc tơ ứng suất



Hình 3. Kết quả tính toán cho quỹ đạo gấp khúc trong không gian 3 chiều.

- a) Các quỹ đạo biến dạng
- b) Giá trị của các véc tơ ứng suất  $\bar{s}$  tương ứng với các quỹ đạo biến dạng.



Hình 4. Kết quả tính toán cho quỹ đạo cong 3 chiều.

- a) Quỹ đạo biến dạng
- b) Giá trị của véc tơ ứng suất  $\bar{s}$
- c) Biến thiên của góc  $\alpha$  giữa  $\Delta \bar{e}$  và  $\bar{s}$

## 4. KẾT LUẬN

Thuật toán mở rộng ở trên cho phép tính toán được cho mọi quỹ đạo biến dạng cho trước trong không gian 3 chiều và cho các kết quả cần thiết; Xét các kết quả tính toán thu được: Cường độ ứng suất  $s = |\bar{s}|$ , góc tạo bởi véc tơ ứng suất và véc tơ gia số biến dạng (tiếp tuyến của quỹ đạo biến dạng):  $\alpha$  ta có một số nhận xét sau đây:

a) Cường độ ứng suất giảm đột ngột ngay sau mỗi điểm gấp khúc của quỹ đạo biến dạng, gấp khúc càng lớn thì sự giảm đó càng lớn và sẽ tăng dần khi quỹ đạo biến dạng có hướng cố định (đồ thị 1b, 2b, 3b, 4b).

b) Góc giữa véc tơ ứng suất  $\bar{s}$  và véc tơ gia số biến dạng  $\Delta e$  đổi đột ngột tại điểm góc và giảm dần khá nhanh (có thể tiến tới không -  $\bar{s}$  và  $\Delta e$  có cùng hướng - khi quỹ đạo biến dạng giữ nguyên hướng đủ lâu) (đồ thị 2c, 4c).

Nhận xét a) chỉ rõ tính chất có "trí nhớ" của quá trình biến dạng dẻo. Trạng thái biến dạng dẻo phụ thuộc quá trình biến dạng trước đó. Nhận xét a) và b) còn thể hiện hiệu ứng địa phương của biến dạng dẻo; trạng thái biến dạng dẻo phụ thuộc nhiều vào quá trình biến dạng ngay trước đó và giảm dần sự phụ thuộc đối với quá trình xảy ra càng xa về trước.

Các hiệu ứng Bauschinger và tái bền cũng được thể hiện qua kết quả tính toán: đó là ưu điểm vốn có của mô hình.

Địa chỉ:

Viện Cơ Viện KHAVN

Viện Vật lý Praha

Viện Chế tạo máy Praha

Nhận ngày 25/5/1991

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Ohashi Y., Tokuda M., Tanaka Y. J. Mech. Phys. Solids, Vol. 25, 1977.
2. Tokuda M., Kratochvil J., Ohashi Y. Mechanism of Induced Plastic Anisotropy on polycrystalline Metals, Phys. stat. sol. 63, 629, 1981.
3. Ilyushin A. A. Plasticity, Moscow 1963.
4. Bui H. D. The slip theory of plasticity and its application (luận án, Viện HLKH Tiệp khắc, 1983).
5. Kratochvil J. Constructive equations for plastic materials (Lectures on Nagoya University, Japan 1981).

## SUMMARY

### EXTENDING THE SLIP MODEL OF POLYCRYSTALLINE PLASTICITY FOR THE GENERAL PLANE DEFORMATION

The computation procedure of the slip model polycrystalline plasticity was extended for the general broken three - dimensions strain trajectories (approximately for arbitrary three - dimensions trajectories). The system of equations determining the model plane and the coordinate system on it was given and solved.

The procedure was applied for some special type of trajectories. The anisotropy, delay effect and saturated effect of the plastic deformation has been shown and estimated.