Tạp chí CƠ HỌC, tập XIII, 1991, số 3 (13 — 21)

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TỔNG HỢP CÁC BÀI TOÁN DAO ĐỘNG CƯỠNG BỨC VÀ TỰ DO CỦA CÁC CÔNG TRÌNH ĐƯỢC TRÌNH BÀY THEO PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

LÊ VĂN MAI

Trong khi giải bài toán dao động của một kết cấu nào đó, ta thường tách ra thành hai bài toán:

- Bài toán dao động riêng (tự do)
- Bài toán dao động cưỡng bức.

Điểm qua các công trình từ trước tới nay, ta thấy chưa có một tác giả nào đề cập đến cách giải đồng thời cả hai bài toán đó.

Trong bài báo này, tác giả xin trình bày một phương pháp tổng hợp để giải đồng thời hai bài toán dao động nói trên được trình bày theo ngôn ngữ của phương pháp phần tử hữu hạn. Về mặt nội dung, chỉ giới hạn ở trường hợp dao động tuyến tính, bỏ qua ảnh hưởng của lực cản, lực kích thích tác dụng lên hệ là loại lực thay đổi theo chu kỳ. Đối với bài toán dao động phi tuyến và những vấn đề khác có liên quan, tác giả sẽ có dịp trình bày trong một số bài báo khác.

1. NỘI DUNG CỦA BÀI TOÁN DAO ĐỘNG

1.1. Bài toán dao động riêng

Khi giải bài toán dao động riêng, ta thường gặp hệ phương trình:

$$\Big([K] - \omega_i^2 [M] \Big) \{q_i\} = 0 \tag{1.1}$$

trong đó $[K]$ và $[M]$ lần lượt là ma trận độ cứng và ma trận khối lượng của hệ đã cho, nếu hệ có n bậc tự do thì đó là những ma trận vuông cấp n.

ω_i và $\{q_i\}$ lần lượt là tần số dao động riêng thứ i và vectơ biên độ dao động riêng thứ i tương ứng của hệ đã cho. Để xác định các tần số dao động riêng, ta đưa hệ (1.1) về dạng:

$$[A] \{q_i\} = \lambda_i \{q_i\} \tag{1.2}$$

trong đó

$$[A] = [K]^{-1}[M], \tag{1.3}$$

$$\lambda_i = \frac{1}{\omega_i^2}. \tag{1.4}$$

Từ hệ (1.2), ta có thể dùng một số phương pháp quen biết trong đại số tuyến tính để tìm λ_i, từ đó tính được ω_i.

1.2. Bài toán dao động cưỡng bức

Ta chỉ xét bài toán dao động không kể đến lực cản và lực kích thích là hệ lực thay đổi theo chu kỳ hay tổng các hệ lực thay đổi theo các chu kỳ khác nhau. Trường hợp chỉ có một hệ lực thay đổi theo chu kỳ r, ta có phương trình:

$$\Big([K] - r^2[M]\Big)\{q\} = \{R\} \tag{1.5}$$

trong đó

$[K]$ và $[M]$ lần lượt vẫn là ma trận độ cứng và ma trận khối lượng của hệ đã cho.

r - tần số của hệ lực kích thích tác dụng lên hệ.

$\{q\}$ và $\{R\}$ lần lượt là vectơ biên độ của chuyển vị nút và của lực kích thích tác dụng tại các nút của hệ.

Một khi đã biết r và $\{R\}$, giải hệ (1.5), ta sẽ xác định được $\{q\}$, từ đó xác định được nội lực phát sinh ra trong kết cấu đang xét. Cách làm như vậy, ta không lợi dụng được kết quả tính toán của bài toán dao động riêng. Hơn nữa, muốn biết tần số r của lực kích thích ở vào khoảng nào, trước hay sau miền cộng hưởng, bắt buộc ta phải giải bài toán dao động riêng. Ngoài ra, cần lưu ý đến một vấn đề rất quan trọng là khi lực kích thích là tổ hợp của nhiều hệ lực kích thích thay đổi theo các chu kỳ khác nhau, thì việc giải nhiều lần hệ (1.5) là không đơn giản, đặc biệt đối với hệ có số bậc tự do khá lớn.

2. NỘI DUNG CỦA PHƯƠNG PHÁP TỔNG HỢP

Trước tiên ta biến đổi hệ (1.5) về dạng:

$$\{q\} = r^2[A]\{q\} + \{A_0\} \tag{2.1}$$

trong đó

$[A]$ - vẫn tính theo (1.3) còn $\{A_0\}$ tính theo biểu thức:

$$\{A_0\} = [K]^{-1}\{R\} \tag{2.2}$$

rồi dùng phương pháp lặp:

$$\{q\}_{m+1} = (r^2)^m[A]^m\{q\}_m + \{A_0\}, \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \tag{2.3}$$

để lập một dãy vectơ biên độ chuyển vị nút:

$$\{q\}_0,\ \{q\}_1,\ \{q\}_2, \dots \tag{2.4}$$

trong đó

$$\{q\}_0 = \{A_0\}. \tag{2.5}$$

Bây giờ ta hãy chứng minh một số định lý để lấy đó làm cơ sở cho việc xây dựng phương pháp

2.1. Định lý 1

Giả sử:

$$\omega_1 < r < \omega_2 \le \omega_3 \dots \tag{2.6}$$

thì:

$$\lim_{m\to\infty} \{F\}_m = \lim_{m\to\infty} \left(\{Z\}_m - \frac{r^2}{\omega_1^2}\{Z\}_{m-1}\right) = 0 \tag{2.7}$$

trong đó

ω_1, ω_2 và ω_3 lần lượt là tần số dao động riêng thứ nhất, thứ hai và thứ ba của hệ.

Còn

$$\begin{aligned} \{Z\}_m &= \{q\}_m - \{q\}_{m-1}, \\ \{Z\}_{m-1} &= \{q\}_{m-1} - \{q\}_{m-2}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Chứng minh:

Áp dụng các công thức (2.3) và (2.8), ta sẽ có:

$$\begin{aligned} \{Z\}_{m-1} &= (r^2)^{m-1}[A]^{m-1}\{A_0\}, \\ \{Z\}_m &= (r^2)^m[A]^m\{A_0\}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Phân tích $\{A_0\}$ theo các dạng chính của dao động, ta sẽ có:

$$\{A_0\} = a_1\{q_1\} + a_2\{q_2\} + \dots + a_n\{q_n\} \tag{2.10}$$

trong đó a_i là hằng số thứ i còn $\{q_i\}$ là véc tơ biên độ trực chuẩn của dạng chính thứ i ($i = 1, 2, \dots, n$)

Theo (1.2) và (1.4) thì:

$$[A]^m\{q_i\} = \frac{1}{(\omega_i^2)^m}\{q_i\} \tag{2.10a}$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, n; \qquad m = 1, 2, \dots).$$

Do đó:

$$\begin{aligned} \{Z\}_m &= (r^2)^m[A]^m\{A_0\} = \\ &= \left(\frac{r^2}{\omega_1^2}\right)^m a_1\{q_1\} + \left(\frac{r^2}{\omega_2^2}\right)^m a_2\{q_2\} + \dots \left(\frac{r^2}{\omega_n^2}\right)^m a_n\{q_n\}, \\ \{Z\}_m - \frac{r^2}{\omega_1^2}\{Z\}_{m-1} &= \sum_{i=2}^{n}\left(\frac{r^2}{\omega_i^2} - \frac{r^2}{\omega_1^2}\right)\left(\frac{r^2}{\omega_i^2}\right)^{m-1} a_i\{q_i\}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Vì $r/\omega_i < 1$ với $i = 2, 3, \dots, n$ nên khi $m \to \infty$ thì $\left(\frac{r^2}{\omega_i^2}\right)^{m-1} \to 0$. Vậy : $\lim_{m\to\infty}\{F\}_m = 0$.

Định lý 1 đã được chứng minh xong.

2.2 Định lý 2

Dãy

$$\{\bar{q}\}_m = \{q\}_m - \frac{r^2}{\omega_1^2}\{q\}_{m-1} \tag{2.12}$$

hội tụ.

Chứng minh

$$\begin{aligned}
\{\bar{q}\}_m &= \{q\}_m - \frac{r^2}{\omega_1^2}\{q\}_{m-1} = \{q\}_0 + \Big[\{q\}_1 - \{q\}_0 - \frac{r^2}{\omega_1^2}\{q\}_0\Big] + \\
&+ \Big[\{q\}_2 - \{q\}_1 - \frac{r^2}{\omega_1^2}(\{q\}_1 - \{q\}_0)\Big] + \\
&+ \Big[\{q\}_3 - \{q\}_2 - \frac{r^2}{\omega_1^2}(\{q\}_2 - \{q\}_1)\Big] + \cdots + \\
&+ \Big[\{q\}_m - \{q\}_{m-1} - \frac{r^2}{\omega_1^2}(\{q\}_{m-1} - \{q\}_{m-2})\Big] = \\
&= \{Z\}_0 + (\{Z\}_1 - \frac{r^2}{\omega_1^2}\{Z\}_0) + (\{Z\}_2 - \frac{r^2}{\omega_1^2}\{Z\}_1) + \\
&+ (\{Z\}_3 - \frac{r^2}{\omega_1^2}\{Z\}_2) + \cdots + (\{Z\}_m - \frac{r^2}{\omega_1^2}\{Z\}_{m-1}) = \\
&= \{F\}_0 + \{F\}_1 + \{F\}_2 + \{F\}_3 + \cdots + \{F\}_m.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Theo định lý 1 thì $\lim\limits_{m\to\infty}\{F\}_m = 0$, nên chuỗi (2.13) hội tụ. Ta sẽ chứng minh chuỗi đó có tổng là một vectơ $\{\bar{q}\}$ nào đó. Muốn thế, ta lập hiệu:

$$\begin{aligned}
\{\bar{q}\} - \{\bar{q}\}_m &= \{F\}_{m+1} + \{F\}_{m+2} + \{F\}_{m+3} + \cdots = \\
&= \Big(\frac{r^2}{\omega_2^2}\Big)^{m+1}\sum_{i=2}^{n}\Big(\frac{r^2}{\omega_i^2} - \frac{r^2}{\omega_1^2}\Big)\Big(\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}\Big)\Big[1 + \frac{r^2}{\omega_i^2} + \Big(\frac{r^2}{\omega_i^2}\Big)^2 + \ldots\Big].
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Theo giả thiết của định lý 1 thì:

$$\frac{r^2}{\omega_i^2} < 1 \qquad (i = 2, 3, \ldots, n) \tag{2.15}$$

nên:

$$1 + \frac{r^2}{\omega_i^2} + \Big(\frac{r^2}{\omega_i^2}\Big)^2 + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{r^2}{\omega_i^2}} \tag{2.15a}$$

do đó:

$$\{\bar{q}\} - \{\bar{q}\}_m = \Big(\frac{r^2}{\omega_2^2}\Big)^{m+1}\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{1 - \frac{r^2}{\omega_i^2}}\Big(\frac{r^2}{\omega_i^2} - \frac{r^2}{\omega_1^2}\Big)\Big(\frac{\omega_2^2}{\omega_i^2}\Big)^{m+1}. \tag{2.16}$$

Mặt khác, theo (2.6) thì:

$$\frac{r^2}{\omega_2^2} < 1 \qquad \text{và} \qquad \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} < 1 \tag{2.17}$$

nên

$$\lim_{m\to\infty} \left(\{\,\bar{q}\,\} - \{\,\bar{q}\,\}_m\right) = 0. \tag{2.18}$$

Do đó, dãy biên độ $\{\,\bar{q}\,\}_m$ hội tụ đến biên độ $\{\,\bar{q}\,\}$.
Định lý 2 đã được chứng minh xong.

2.3. Định lý 3

Biên độ $\{q\}$ của hệ (1.5) hoặc (2.1) xác định theo biểu thức:

$$\{q\} = \frac{1}{1-\dfrac{r^2}{\omega_1^2}} \lim_{m\to\infty} \{\,\bar{q}\,\}_m \tag{2.19}$$

trong đó $\{\,\bar{q}\,\}_m$ tính theo (2.12).
Chứng minh
Lập biểu thức độ lệch biên độ Δ_m

$$\Delta_m = r^2[A]\frac{1}{1-\dfrac{r^2}{\omega_1^2}}\{\,\bar{q}\,\} + \{A_0\} - \frac{1}{1-\dfrac{r^2}{\omega_1^2}}\{\,\bar{q}\,\}_m. \tag{2.20}$$

Thay giá trị của $\{\,\bar{q}\,\}_m$ tính theo (2.12) vào (2.20), ta có:

$$\Delta_m = \frac{1}{1-\dfrac{r^2}{\omega_1^2}} \cdot r^2[A]\left(\{q\}_m - \frac{r^2}{\omega_1^2}\{q\}_{m-1}\right) + \{A_0\} - \frac{1}{1-\dfrac{r^2}{\omega_1^2}}\left(\{q\}_m - \frac{r^2}{\omega_1^2}\{q\}_{m-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{1-\dfrac{r^2}{\omega_1^2}}\left[r^2[A]\{q\}_m - r^2\frac{r^2}{\omega_1^2}[A]\{q\}_{m-1} + \left(1-\frac{r^2}{\omega_1^2}\right)\{A_0\} - \{q\}_m + \frac{r^2}{\omega_1^2}\{q\}_{m-1}\right] =$$

$$= \frac{1}{1-\dfrac{r^2}{\omega_1^2}}\left[\{q\}_{m+1} - \{A_0\} - \frac{r^2}{\omega_1^2}\left(\{q\}_m - \{A_0\}\right) + \left(1-\frac{r^2}{\omega_1^2}\right)\{A_0\} - \{q\}_m + \frac{r^2}{\omega_1^2}\{q\}_{m-1}\right] =$$

$$= \frac{1}{1-\dfrac{r^2}{\omega_1^2}}\left[\{q\}_{m+1} - \{q\}_m - \frac{r^2}{\omega_1^2}\left(\{q\}_m - \{q\}_{m-1}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{1-\dfrac{r^2}{\omega_1^2}}\left(\{Z\}_{m+1} - \frac{r^2}{\omega_1^2}\{Z\}_m\right) = \frac{1}{1-\dfrac{r^2}{\omega_1^2}}\{F\}_{m+1}. \tag{2.21}$$

Từ đó ta có:

$$\lim_{m\to\infty} \Delta_m = \frac{1}{1-\dfrac{r^2}{\omega_1^2}} \lim_{m\to\infty} \{F\}_{m+1} = 0. \tag{2.22}$$

Điều đó chứng tỏ rằng $\{q\}$ tính theo (2.19) là vectơ biên độ chuyển vị nút của hệ đã cho.

Từ (2.12) và (2.19) ta có:

$$\{q\} = \lim_{m\to\infty} \left(\{q\}_m - \frac{r^2}{\omega_1^2}\{q\}_{m-1}\right). \tag{2.23}$$

Khi m đủ lớn ta sẽ có:

$$\{q\} \approx \{q\}_m - \frac{r^2}{\omega_1^2}\{q\}_{m-1}. \tag{2.24}$$

Để tiện tính toán đồng thời cả hai bài toán dao động, ta sẽ chuyển công thức (2.24) về một dạng khác. Trước tiên, ta biến đổi $\{q\}_m$ về dạng

$$\begin{aligned}\{q\}_m &= \{q\}_0 + \{q\}_1 - \{q\}_0 + \{q\}_2 - \{q\}_1 + \cdots + \{q\}_{m-1} - \{q\}_{m-2} + \{q\}_{m-1} - \{q\}_m = \\ &= \{q\}_0 + \{Z\}_1 + \{Z\}_2 + \cdots + \{Z\}_{m-1} + \{Z\}_m.\end{aligned} \tag{2.25}$$

Nếu thay $\{q\}_0 = \{A\}_0$ và $\{Z\}_k = (r^2)^k[A]\{A_0\}$ với $k = 1, 2, \ldots, m$ thì:

$$\begin{aligned}\{q\}_m =& \{A_0\} + r^2[A]\{A_0\} + (r^2)^2[A]^2\{A_0\} + \cdots + \\ &+ (r^2)^{m-1}[A]^{m-1}\{A_0\} + (r^2)^m[A]^m\{A_0\}.\end{aligned} \tag{2.26}$$

Dựa vào (2.25) và (2.26), ta có thể viết công thức xác định biên độ $\{q\}$ của hệ đã cho khi m đủ lớn:

$$\{q\} \approx \{A_0\} + \{Z_1\}_1 + \{Z_1\}_2 + \cdots + \{Z_1\}_{m-1} + \frac{1}{1 - \dfrac{r^2}{\omega_1^2}}\{Z_1\}_m \tag{2.27}$$

hoặc:

$$\{q\} \approx \{A_0\} + r^2\{\overline{Z}\}_1 + (r^2)^2\{\overline{Z}\}_2 + \cdots + (r^2)^{m-1}\{\overline{Z}\}_{m-1} + \frac{1}{1 - \dfrac{r^2}{\omega_1^2}}(r^2)^m\{\overline{Z}\}_m \tag{2.28}$$

trong đó:

$$\{\overline{Z}\}_k = [A]^k\{A_0\}. \tag{2.29}$$

Nhiều trường hợp, ta nên dùng công thức sau đây để tính $\{q\}$ khi m đủ lớn:

$$\{q\} \approx [{}_0A]\{A_0\} \tag{2.30}$$

trong đó:

$$[{}_0A] = [I] + (r^2)^2[A]^2 + \cdots + (r^2)^{m-1}[A]^{m-1} + \frac{1}{1 - \dfrac{r^2}{\omega_1^2}}(r^2)^m[A]^m. \tag{2.31}$$

Các công thức (2.27), (2.28), (2.30) và (2.31) cũng có thể dùng cho trường hợp $r < \omega_1$, đặc biệt là khi r khá gần m, về bên trái hoặc bên phải, dùng các công thức trên rất thuận lợi.

Sau khi đã trình bày xong ba định lý và thiết lập một số công thức cần thiết, ta chuyển sang phần thứ tự tính toán.

1) Tính các phần tử của ma trận độ cứng $[K]$ và ma trận khối lượng $[M]$

2) Tính các phần tử của ma trận $[A]$ theo công thức (1.3).

3) Xác định lần lượt các vectơ $\{\overline{Z}\}_m$ theo công thức (2.29).

4) Xác định các tỷ số của các thành phần thứ i của hai vectơ $\{\overline{Z}\}_{m-1}$ và $\{\overline{Z}\}_m$ liên tiếp, đến một chỉ số m nào đó thì các tỷ số đó gần xấp xỉ nhau, dựa vào các tỷ số đó, xác định tần số cơ bản ω_1 theo công thức

$$\omega_1^2 = \frac{\overline{Z}^i_{m-1}}{Z^i_m} \tag{2.32}$$

hoặc:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\overline{Z}^i_{m-1}}{\overline{Z}^i_m}} \tag{2.33}$$

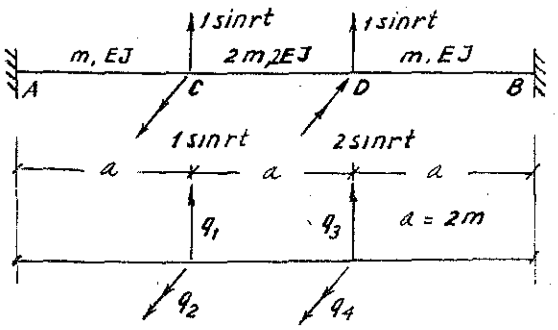
5) Tính tỷ số $\frac{r^2}{\omega_1^2}$, sau đó tính giá trị của đại lượng $1/(1 - \frac{r^2}{\omega_1^2})$

6) Xác định vectơ biên độ $\{q\}$ theo công thức (2.28).

Nhờ công thức (2.28), ta có thể xác định biên độ $\{q\}$ một cách dễ dàng trong trường hợp phải thay đổi nhiều lần giá trị của tần số r của lực kích thích. Trường hợp cần thay đổi đồng thời tần số r và biên độ $\{R\}$ thì ta nên dùng công thức (2.30).

3. THÍ DỤ

Một thanh chịu dao động uốn do một hệ lực kích thích đặt tại hai điểm C và D. Yêu cầu xác định tần số dao động cơ bản ω_1 và vectơ biên độ của chuyển vị nút.



Với hệ đã cho, phương trình (1.5) có dạng:

$$\left(\frac{EJ}{2}\begin{bmatrix} 9 & 3 & -6 & 6 \\ 3 & 12 & -6 & 4 \\ -6 & -6 & 9 & -3 \\ 6 & 4 & -3 & 12 \end{bmatrix} - \frac{2mr^2}{105}\begin{bmatrix} 114 & 38 & 27 & -13 \\ 31 & 12 & 13 & -6 \\ 27 & 13 & 117 & -33 \\ -13 & -6 & -33 & 12 \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{Bmatrix}. \tag{3.1}$$

Phương trình (2.1) ứng với trường hợp này có dạng:

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \frac{4mr^2}{EJ} \begin{bmatrix} 0,445893 & 0,135897 & 0,371787 & -0,126001 \\ 0,162875 & 0,056891 & 0,196227 & -0,063648 \\ 0,369344 & 0,121880 & 0,447259 & -0,141935 \\ -0,195220 & -0,061205 & -0,165678 & 0,058257 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} + $$
$$+ \frac{2}{EJ} \begin{Bmatrix} 0,86163533 \\ 0,47169800 \\ 0,80503133 \\ -0,54771700 \end{Bmatrix}. \tag{3.2}$$

Để cho đơn giản, ta chọn khối lượng phân bố m và độ cứng EJ của thanh sao cho:

$$\frac{4m}{EJ} = 1. \tag{3.3}$$

Áp dụng công thức (2.29), tính các thành phần của vectơ $\{\overline{Z}\}_k$, kết quả tính toán được ghi vào bảng 1.

Bảng 1

chu trình	$\frac{EJ}{2}\overline{Z}^1_K$	$\frac{EJ}{2}\overline{Z}^2_K$	$\frac{EJ}{2}\overline{Z}^3_K$	$\frac{EJ}{2}\overline{Z}^4_K$	$\frac{\overline{Z}^1_K}{\overline{Z}^1_{K-1}}$	$\frac{\overline{Z}^2_K}{\overline{Z}^2_{K-1}}$	$\frac{\overline{Z}^3_K}{\overline{Z}^3_{K-1}}$	$\frac{\overline{Z}^4_K}{\overline{Z}^4_{K-1}}$
0	0,86163533	0,47169800	0,80503133	-0,54771700				
1	0,81654365	0,35996938	0,81345047	-0,36233119	0,94766733	0,76313527	1,01045815	0,66152993
2	0,76109426	0,33615618	0,76070909	-0,33731676	0,93209236	0,93384660	0,93516338	0,93096253
3	0,71037322	0,31382869	0,71018736	-0,31483908	0,93335774	0,93358001	0,93358600	0,93336329
4	0,66310730	0,29295290	0,66290590	-0,29389094	0,93346326	0,93348030	0,93348029	0,93346398
5	0,61899154	0,27346344	0,61884173	-0,27433874	0,93347159	0,93347238	0,93347244	0,93347124
6	0,57781112	0,25527043	0,57767133	-0,25608747	0,93347176	0,93347187	0,93347184	0,93347174
7	0,53937039	0,23828775	0,53923991	-0,23905043	0,93347181	0,93347181	0,93347182	0,73347179
8	0,50348705	0,22243489	0,50336525	-0,22314684	0,93347180	0,93347178	0,93347180	0,93347182

$$\frac{\overline{Z}^i_k}{\overline{Z}^i_{k-1}} = 0,93347180. \tag{3.4}$$

Từ đó ta có:

$$\omega_1^2 = \frac{1}{0,93347180} = 1,07126964, \tag{3.5}$$

$$\omega_1 = 1,03502157\frac{1}{sec}. \tag{3.6}$$

Bây giờ ta tự gán cho tần số r của lực kích thích một giá trị sao cho

$$\frac{r^2}{\omega_1^2} = \frac{0,93347180}{0,5} = 1,8669436. \qquad (3.7)$$

Tần số r thỏa mãn điều kiện (2.6). Trường hợp này hệ (3.2) sẽ có dạng:

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 0,445893 & 0,135897 & 0,371787 & -0,126001 \\ 0,162875 & 0,056891 & 0,196227 & -0,063648 \\ 0,369344 & 0,121880 & 0,447259 & -0,141935 \\ -0,195220 & -0,061205 & -0,165678 & 0,058257 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} +$$

$$+ \frac{2}{EJ} \begin{Bmatrix} 0,86163533 \\ 0,47169800 \\ 0,80505133 \\ -0,57717000 \end{Bmatrix}. \qquad (3.8)$$

Từ bảng 1, ta có thể xác định các thành phần $q_i (i = 1,2,3,4)$ của vectơ biên độ $\{q\}$ theo công thức (2.28):

$$\{q\} \approx \{A_0\} + 2\{\overline{Z}\}_1 + 2^2\{\overline{Z}\}_2 + 2^3\{\overline{Z}\}_3 + 2^4\{\overline{Z}\}_4 + 2^5\{\overline{Z}\}_5 +$$
$$+ 2^6\{\overline{Z}\}_6 + 2^7\{\overline{Z}\}_7 + \frac{1}{1 - \frac{r^2}{\omega_1^2}} 2^8\{\overline{Z}\}_8 \qquad (3.9)$$

trong đó:

$$\frac{r^2}{\omega_1^2} = 1,8669436; \qquad \frac{1}{1 - \frac{r^2}{\omega_1^2}} = -1,15347757.$$

Sau khi tính toán ta có:

$$\{q\} = \frac{2}{EJ}[-1,01596819 \quad -0,35974923 \quad -1,07884083 \quad 0,28412823]'. \qquad (3.10)$$

4. KẾT LUẬN

Áp dụng phương pháp này, ta có thể giải đồng thời hai bài toán dao động. Các số liệu và kết quả tính toán của bài toán dao động riêng được sử dụng để tìm ra một cách nhanh chóng lời giải của bài toán dao động cưỡng bức. Trường hợp cần thay đổi tần số r của lực kích thích, kể cả biên độ $\{R\}$ của lực kích thích, ta không phải tính toán lại từ đầu, mà có thể dùng các công thức (2.30) để tìm ra một cách nhanh chóng vectơ chuyển vị nút $\{q\}$.

Địa chỉ:
Trường Đại học Xây dựng

Nhận ngày 1/7/1990
(xem tiếp trang 32)