Tạp chí CƠ HỌC, tập XIII, 1991, số 2 (23 — 27)

MỘT PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN ỔN ĐỊNH CÁC CÔNG TRÌNH ĐƯỢC TRÌNH BÀY THEO PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

LÊ VĂN MAI

Trong khi giải bài toán ổn định các công trình theo phương pháp phần tử hữu hạn, ta phải xác định các thông số tới hạn của hệ đã cho. Đối với hệ có số phần tử hữu hạn khá lớn thì việc xác định các thông số đó đòi hỏi tốn nhiều công sức. Người ta đã tìm cách đưa vào một số giả thiết nhằm đơn giản hóa bài toán, từ đó dễ dàng xác định được thông số tới hạn, do vậy độ chính xác của kết quả bị giảm đi.

Bằng cách sử dụng khái niệm hệ số ổn định của Poincaré H., người ta có thể xác định được bất kỳ một thông số tới hạn nào, nhưng khối lượng tính toán rất lớn. Đối với công trình thực tế thường gặp, điều mà ta quan tâm là thông số tới hạn thứ nhất.

Trong bài báo này, tác giả nêu lên một phương pháp áp dụng hệ số ổn định để tìm thông số tới hạn thứ nhất.

1. MỘT SỐ KHÁI NIỆM

Khi giải bài toán ổn định các công trình theo phương pháp phần tử hữu hạn, ta thường gặp phương trình có dạng:

$$[K]\{q\} = 0 \tag{1.1}$$

trong đó: $[K]$ - ma trận độ cứng của toàn kết cấu đã cho, mỗi một phần tử của nó là một hàm của thông số tới hạn ν

$$k_{ij} = k_{ij}(\nu) \tag{1.2}$$

Đó là một ma trận vuông đối xứng có kích thước $n \times n$

Khi giải bài toán ổn định, ta phải khai triển định thức của ma trận K

$$D([K]) = 0 \tag{1.3}$$

để từ đó nhận được một phương trình đại số hay siêu việt đối với thông số ν, giải phương trình đó, ta sẽ xác định được thông số tới hạn. Đối với hệ gồm một số lớn phần tử hữu hạn thì việc làm trên không phải dễ dàng, do đó người ta phải dùng các phương pháp khác. Một trong những phương pháp nói trên là phương pháp sử dụng hệ số ổn định của Poincaré H.

Bằng cách dùng phép biến đổi Lagrange, ta đưa ma trận $[K]$ về dạng chuẩn tắc $[\overline{K}]$

$$[\overline{K}] = \begin{bmatrix} k_{11}(\nu) & k_{12}(\nu) & k_{13}(\nu) & \dots & k_{1\,n-1}(\nu) & k_{1n}(\nu) \\ 0 & k_{22}^{(1)}(\nu) & k_{23}^{(1)}(\nu) & \dots & k_{2\,n-1}^{(1)}(\nu) & k_{2n}^{(1)}(\nu) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_{n-1\,n-1}^{(n-2)}(\nu) & k_{n-1\,n}^{(n-2)}(\nu) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & k_{n\,n}^{(n-1)}(\nu) \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

Các hệ số

$$u_i(\nu) = k_{ii}^{(i-1)}(\nu) \qquad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{1.5}$$

được gọi là hệ số ổn định.

Dựa vào các hệ số ổn định đó, người ta đã xây dựng một khái niệm về bậc ổn định và bậc không ổn định của một kết cấu.

Nếu bây giờ trong ma trận $[K]$, ta gán cho ν một giá trị $\overline{\nu}$ nào đó thì trong (1.5) sẽ xuất hiện các hệ số $u_i(\overline{\nu}) > 0$ và $u_j(\nu) < 0$

Gọi bậc ổn định u_+ của một kết cấu là số số hạng $u_i(\overline{\nu})$ có giá trị dương. Ngược lại, bậc không ổn định u_- của một kết cấu là số số hạng $u_j(\overline{\nu})$ mang dấu âm.

Ứng với một giá trị $\overline{\nu}$ nào đó mà ta có sự đánh giá

$$\nu_i^{th} < \overline{\nu} < \nu_{i+1}^{th}$$

thì

$$\begin{aligned} u_+ &= n - i \\ u_- &= i \end{aligned} \tag{1.7}$$

trong đó, ν_i^{th} và ν_{i+1}^{th} là các thông số tới hạn thứ i và thứ i + 1

Nếu:

$$\nu_n^{th} < \overline{\nu} \tag{1.8}$$

thì

$$\begin{aligned} u_+ &= 0 \\ u_- &= n \end{aligned} \tag{1.9}$$

Trường hợp

$$\overline{\nu} < \nu_1^{th} \tag{1.10}$$

thì

$$\begin{aligned} u_+ &= n \\ u_- &= 0 \end{aligned} \tag{1.11}$$

2. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

Bây giờ ta sẽ áp dụng các khái niệm trên để xây dựng phương pháp xác định thông số tới hạn thứ nhất.

Thông thường, đối với từng loại kết cấu, ta có thể nhận biết được yếu tố nào gây ra sự mất ổn định, đồng thời cũng có thể ước lượng được khoảng xác định của thông số tới hạn thứ nhất.

Giả sử yếu tố gây mất ổn định lần thứ nhất của một kết cấu đã cho là sự xuất hiện chuyển vị nút thứ n: q_n. Trường hợp này, nếu ta thay $\nu = \nu_1^{th}$ thì:

$$u_i(\nu) > 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{2.1}$$

$$u_n(\nu) = 0 \tag{2.2}$$

Từ đó, ta suy ra ma trận $[K]_{n-1}$ sẽ xác định dương, trong đó $[K]_{n-1}$ được suy từ ma trận $[K]$ trong (1.1) bằng cách bỏ đi hàng thứ n và cột thứ n.

Vậy khi tìm ν_1^{th}, ta chỉ cần quan tâm đến $u_n(\nu)$ mà thôi. Lúc đó, ta có:

$$\text{Nếu} \quad \nu < \nu_1^{th} \quad \text{thì} \quad u_n(\nu) > 0 \tag{2.2}$$

$$\text{Nếu} \quad \nu > \nu_1^{th} \quad \text{thì} \quad u_n(\nu) < 0 \tag{2.3}$$

Để tìm $u_n(\nu)$, ta không dùng phép biến đổi Lagrange mà dùng một phương pháp nhanh hơn và hiệu quả hơn.

Sau đây là cách xác định $u_n(\nu)$

1) Cho trước một giá trị $\nu = \overline{\nu}$, tính các $k_{ij}(\overline{\nu})$

2) Giải hệ phương trình:

$$[K]_{n-1}\{q\}_{n-1} + \{k\}_{n-1} = 0 \tag{2.4}$$

trong đó

$$\{q\}_{n-1} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{n-1} \end{Bmatrix}; \qquad \{k\}_{n-1} = \begin{Bmatrix} k_{1n}(\nu) \\ k_{2n}(\nu) \\ \vdots \\ k_{n-1\,n}(\nu) \end{Bmatrix} \tag{2.5}$$

Vì $[K]_{n-1}$ xác định dương nên ta có thể dùng phương pháp lặp Zayden để giải hệ (2.4).

3) Xác định $u_n(\overline{\nu})$ theo công thức:

$$u_n(\overline{\nu}) = k_{nn}(\overline{\nu}) + \sum_{i=1}^{n-1} k_{ni}(\nu) q_i \tag{2.6}$$

4) Nếu $u_n(\overline{\nu}) > 0$, để có được ν_1^{th} ta phải thay $\overline{\nu}$ bằng một giá trị $\overline{\nu}' > \overline{\nu}$

5) Nếu $u_n(\overline{\nu}) < 0$, để có được ν_1^{th} ta phải thay $\overline{\nu}$ bằng một giá trị $\overline{\nu}' < \overline{\nu}$

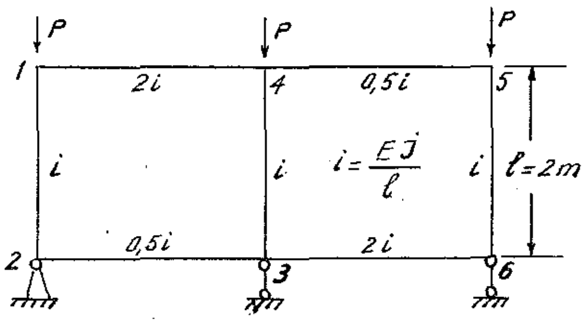
6) Nếu $u_n(\overline{\nu}) = 0$ thì $\overline{\nu} = \nu_1^{th}$. Trong thực tế tính toán, ta chỉ có thể xác định được giá trị của $u_n(\overline{\nu})$ một cách gần đúng, tức là:

$$u_n(\overline{\nu}) \approx 0 \tag{2.7}$$

Do đó, ta cũng chỉ có thể xác định được ν_1^{th} một cách gần đúng.

3. THÍ DỤ

Xác định lực tới hạn thứ nhất P_1^{th} của hệ thanh cho trên *hình 1*



Hình 1

Bằng cách sử dụng công thức ma trận độ cứng của phần tử thanh chịu uốn ngang và uốn dọc đồng thời ta thiết lập được ma trận độ cứng $[K]$ của hệ đã cho như sau:

$[K] =$

$$\begin{bmatrix} 4i(3-2\nu) & 2i(1+\nu) & 0 & 4i & 0 & 0 & -3i(1-\nu) \\ 2i(1+\nu) & 4i(1,5-2\nu) & i & 0 & 0 & 0 & -3i(1-\nu) \\ 0 & i & 4i(3,5-2\nu) & 2i(1+\nu) & 0 & 4i & -3i(1-\nu) \\ 4i & 0 & 2i(1+\nu) & 4i(3,5-2\nu) & i & 0 & -3i(1-\nu) \\ 0 & 0 & 0 & i & 4i(1,5-2\nu) & 2i(1+\nu) & -3i(1-\nu) \\ 0 & 0 & 4i & 0 & 2i(1+\nu) & 4i(3-2\nu) & -3i(1-\nu) \\ -3i(1-\nu) & -3i(1-\nu) & -3i(1-\nu) & -3i(1-\nu) & -3i(1-\nu) & -3i(1-\nu) & -9i(1-6\nu) \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

trong đó:

$$\nu = \frac{P\ell^2}{60EJ} \tag{3.2}$$

còn $[K]$ là ma trận vuông đối xứng có kích thước 7×7.

Người ta nhận thấy rằng hệ đã cho bị mất ổn định khi và chỉ khi trong hệ xuất hiện chuyển vị ngang của các nút ở phía trên.

Lần lượt gán cho ν những giá trị khác nhau, sau đó giải hệ (2.4) và áp dụng công thức (2.6) ta sẽ xác định được các giá trị $u_n(\nu) = u_7(\nu)$ tương ứng với các giá trị khác nhau của ν.

$\nu = 0,1$, $u_7(0,1) = -0,06083 < 0$, hệ mất ổn định

$\nu = 0,095$, $u_7(0,095) = 0,084420 > 0$, hệ chưa mất ổn định

$\nu = 0,09875$, $u_7(0.09875) = 0.000488 > 0$, hệ chưa mất ổn định

$\nu = 0.09876$, $u_7(0,09876) = 0,000002 \approx 0$, hệ ở trạng thái tới hạn thứ nhất

Vậy $\nu_1^{th} = 0,09876$ suy ra

$$P_1^{th} = \frac{60EJ\nu_1^{th}}{\ell^2} = 1,4814EJ$$

4. KẾT LUẬN

Bằng cách dùng phương pháp vừa nêu trên, trong khi giải bài toán ổn định của một kết cấu bất kỳ để tìm thông số tới hạn thứ nhất, ta có thể bỏ qua được các bước tính toán hệ số $u_i(\nu)$ với $i = 1, 2, \ldots, n-1$, làm cho khối lượng tính toán giảm đi một cách đáng kể. Điều đó càng có ý nghĩa đối với những hệ phức tạp.

Địa chỉ:
Trường Đại học Xây dựng

Nhận ngày 1/7/1990

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Oden J. T. Finite elements of nonlinear continua. McGraw - Hill Book Company. 1972.
2. Матевосян Р. Р. Устойчивость сложных стержневых систем. Государственное издательство литературы по строительству, Архитектуре и строительным материалам. 1961
3. Hồ Anh Tuấn, Trần Bình. phương pháp phần tử hữu hạn. Nxb. Khoa học và Kỹ thuật. 1978.

RÉSUMÉ

MÉTHODE DE RÉSOLUTION DES PROBLÈMES DE STABILITÉ DES STRUCTURES SUIVANT LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

Quand au problème de stabilité des structures, il y a eu plusieurs méthodes de détermination des paramètres critiques, dans lesquelles il faut tenir compte de la méthode d'application des coefficients Poincaré H. C'est une méthode très efficace pendant le calcul de n'import quel paramètre critique. Mais, dans la pratique, ce qu'on s'en occupe, c'est le premier paramètre. En appliquant avec création les coefficients précédents, l'auteur a présenté une nouvelle méthode afin de déterminer facilement le premier paramètre.

SỰ ỔN ĐỊNH CỦA DÒNG CHẢY . . .

(tiếp trang 14)

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Eglit M. E. The unsteady flow in an inclined channel. Moscow University 1986 (in Russian)
2. Nguyễn Văn Điệp, Đặng Hữu Chung. Sự mất ổn định của dòng chảy có mang bùn cát lơ lửng trong kênh hở nghiêng. Tạp chí Cơ học số 2, 1990.
3. Nguyễn Văn Điệp, Đặng Hữu Chung. Lý thuyết khuếch tán suy rộng của chuyển động lơ lửng của bùn cát trong dòng chảy có đáy biến đổi. Tạp chí Cơ học số 1, 1990.

SUMMARY

THE STABILITY OF FLOW WITH SUSPENDED SEDIMENT IN AN INCLINED CHANNEL OF MOVABLE BED

In this work the author has studied the stability of flow with suspended sediment in an inclined channel of movable bed at different stages of flow. The obtained result shows that when the flow with suspended sediment is at the stage of deposition or erosion then the critical inclined angle is less than that one of homogeneous flow, e. g., the flow with suspended sediment is earlier unstable. If the exchange between suspended sediment and bed-load doesn't occur, the existence of sediment will not act on the condition of stability. In particular when $C^0 = 0$ the classical result is obtained.
The author would like to thank to Prof-Doctor Nguyen Van Diep for useful helping.