

SỰ ỔN ĐỊNH CỦA DÒNG CHẢY CÓ VẬN TẢI BÙN CÁT TRONG KÊNH HỒ NGHIÊNG CÓ BIẾN DẠNG ĐÁY

ĐẶNG HỮU CHUNG

Bài toán về điều kiện ổn định của dòng chảy bị kích động bé đã được nhiều tác giả nghiên cứu trên cơ sở hệ phương trình Saint-Venant. Trong đó dòng chảy là thuần nhất, nghĩa là không có vận tải bùn cát lơ lửng, và kết quả thu được cho góc nghiêng tới hạn bảo đảm sự ổn định của dòng chảy thuần nhất trong kênh hồ nghiêng là $\text{tg}\alpha \leq \text{tg}\alpha_{cr} = 4C_f$ (xem [1]).

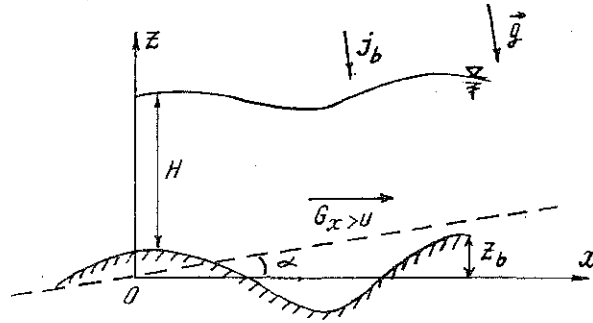
Trong bài báo này tác giả nghiên cứu tổng quát hơn điều kiện ổn định của dòng chảy có mang bùn cát lơ lửng trong kênh nghiêng có đáy biến đổi do lắng đọng hay bào xói. Kết quả thu được chứng tỏ thành phần bùn cát lơ lửng ảnh hưởng đến điều kiện ổn định của dòng và sự ảnh hưởng này đã được phân tích. Trong trường hợp đặc biệt kết quả cổ điển được thu nhận.

1. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TOÁN HỌC

Hệ phương trình mô tả dòng chảy có vận tải bùn cát lơ lửng trong kênh hồ nghiêng với đáy thay đổi [2] gồm:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} + U \frac{\partial H}{\partial x} + H \frac{\partial U}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} g H \frac{\gamma}{\rho} \cos \alpha \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} + g \cos \alpha \frac{\partial H}{\partial x} + g \frac{\rho_b}{\rho} \cos \alpha \frac{\partial Z_b}{\partial x} + \frac{\gamma}{\rho \rho_s} \left(\frac{\partial \bar{J}_x}{\partial t} + U \frac{\partial \bar{J}_x}{\partial x} \right) &= \\ &= g \sin \alpha - C_f \frac{U|U|}{H}, \\ \frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + U \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} + \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial \bar{J}_x}{\partial x} &= \frac{1}{H \rho_s} (J_b)^*, \\ \frac{\partial \bar{J}_x}{\partial t} + U \frac{\partial \bar{J}_x}{\partial x} + \gamma \bar{C} \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} \right) + D \bar{C} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} &= \gamma g \sin \alpha \bar{C} - \frac{1}{k} \bar{C} \bar{J}_x, \\ \frac{\partial Z_b}{\partial t} + \frac{\partial G_x}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho_s} (J_b)^*, \end{aligned} \tag{1.1}$$

với Z_b - độ cao đáy dòng, G_x - tốc độ tải bùn cát đáy theo phương nghiêng Ox , $(J_b)^*$ - tốc độ lắng (xói) bùn cát theo phương z , ρ_b - mật độ khối lượng của hỗn hợp hạt và nước tại đáy.



Hình 1

Ta biến đổi (1.1) về dạng không thứ nguyên như sau [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ \chi \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\gamma}{\rho} \cos \alpha h \frac{\partial C}{\partial x} + \cos \alpha \frac{\partial h}{\partial x} + m \cos \alpha \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\gamma}{\rho} \beta_1 \left(\frac{\partial J}{\partial t} + u \frac{\partial J}{\partial x} \right) \right] &= \\ &= 1 - \frac{u^2}{F^2 h}, \\ \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial J}{\partial x} &= \frac{(J_b)^*}{\chi \sin \alpha \rho_s \sqrt{g H_0} h}, \\ \chi \left[\frac{\rho_s \beta_1}{\gamma} \left(\frac{\partial J}{\partial t} + u \frac{\partial J}{\partial x} \right) + EC \frac{\partial C}{\partial x} + C \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] &= C \left(1 - \frac{J}{J^*} \right), \\ \frac{\partial Z}{\partial t} + \beta_2 \frac{\partial q}{\partial t} &= - \frac{(J_b)^*}{\chi \sin \alpha \rho_s \sqrt{g H_0}}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

Trong đó $m = \rho_b / \rho$, $Z = z_b / H_0$, $q = G_x / Q_b$ - tốc độ tải không thứ nguyên của bùn cát đáy, $\beta_2 = Q_b / H_0 \sqrt{g H_0}$, Q_b - tốc độ tải đặc trưng của bùn cát đáy.

Bây giờ chúng ta nghiên cứu điều kiện ổn định cho mỗi trạng thái của dòng chảy.

2. KHẢO SÁT TUYẾN TÍNH

a. Trường hợp lực ứng suất tiếp đáy $|\tau_b|$ nhỏ hơn lực ứng suất tiếp tới hạn lắng τ_{cd} ($|\tau_b| < \tau_{cd}$) [3]:

Lúc này ta có:

$$G_x = 0 \quad \text{và} \quad J_b = - \left(\frac{dm}{dt} \right)_d \quad (2.1)$$

Theo Krone ta có:

$$\left(\frac{dm}{dt} \right)_d = C_b W_* \left(1 - \frac{|\tau_b|}{\tau_{cd}} \right) \quad (2.2)$$

Với W_* - vận tốc lắng các hạt, C_b - nồng độ bùn cát tại đáy ($C_b = rC$, $r = \text{const} \geq 1$). Do đó:

$$\frac{J_b}{\rho_s} = -rCW_* \left(1 - \frac{|\tau_b|}{\tau_{cd}}\right) \quad (2.2)$$

$|\tau_b|$ được xác định theo công thức Richards:

$$|\tau_b| = C_f \bar{\rho} U^2 \quad (2.4)$$

Do đó ta có :

$$\frac{|\tau_b|}{\tau_{cd}} = \frac{U^2}{U_{cd}^2} = \frac{u^2}{u_{cd}^2} \quad (2.5)$$

với U_{cd} , u_{cd} - lần lượt là vận tốc tới hạn lắng có thứ nguyên và không có thứ nguyên tương ứng. Mặt khác ta có:

$$(J_b)^* = J_b \cos \alpha \quad (2.6)$$

Sử dụng (2.1) - (2.6) hệ (1.2) trở thành:

$$\begin{aligned} h_t + u h_x + h u_x &= 0, \\ \chi \left[u_t + u u_x + \frac{1}{2} \frac{\gamma}{\rho} \cos \alpha h C_x + \cos \alpha h_x + m \cos \alpha Z_x + \frac{\gamma}{\rho} \beta_1 (J_t + u J_x) \right] &= 1 - \frac{u^2}{F^2 h}, \\ C_t + u C_x + \beta_1 J_x &= -\frac{\delta C}{\chi h} \left(1 - \frac{u^2}{u_{cd}^2}\right), \\ \chi \left[\frac{\rho_s \beta_1}{\gamma} (J_t + u J_x) + E C C_x + C (u_t + u u_x) \right] &= C \left(1 - \frac{J}{J^*}\right), \\ Z_t &= \frac{\delta C}{\chi} \left(1 - \frac{u^2}{u_{cd}^2}\right), \end{aligned} \quad (2.7)$$

với $\delta = 2W_0 \cot \alpha$, $W_0 = W_* / \sqrt{gH_0}$ (vận tốc lắng không thứ nguyên)

Ta dễ dàng tìm được nghiệm dừng của (2.7) là :

$$h = u_{cd}^2 / F^2, \quad u = u_{cd}, \quad Z = 0, \quad C = C^0, \quad J = J^*$$

Chúng ta xem $\beta_1 \ll 1$, $\beta_2 \ll 1$, $\delta = 0(1)$, $\chi = 0(1)$. Giả sử trong lân cận trạng thái dừng xuất hiện nhiễu bé:

$$h = \frac{u_{cd}^2}{F^2} + h', \quad u = u_{cd} + u', \quad C = C^0 + C', \quad Z = Z' \quad J = J^* + J' \quad (2.8)$$

với $|h'|$, $|u'|$, $|C'|$, $|Z'|$, $|J'| \ll 1$. Thay (2.8) vào (2.7) và bỏ dấu " ' " ta nhận được:

$$\begin{aligned} h_t + u_{cd} h_x + \frac{u_{cd}^2}{F^2} u_x &= 0, \\ u_t + u_{cd} u_x + \frac{\gamma}{2\rho_0} \cos \alpha \frac{u_{cd}^2}{F^2} C_x + \cos \alpha h_x + m \cos \alpha Z_x + \frac{2u}{\chi u_{cd}} - \frac{F^2 h}{\chi u_{cd}^2} &= 0, \\ C_t + u_{cd} C_x - \frac{2\delta C^0 F^2 u}{\chi u_{cd}^3} &= 0, \\ Z_t + \frac{2\delta C^0 u}{\chi u_{cd}} &= 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Ta tìm nghiệm của (2.9) dưới dạng chuỗi như đã biết:

$$\begin{aligned} h &= a_h e^{i(kx-\omega t)}, & u &= a_u e^{i(kx-\omega t)}, \\ C &= a_c e^{i(kx-\omega t)}, & Z &= a_z e^{i(kx-\omega t)}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Thay (2.10) vào (2.9) ta nhận được hệ phương trình đại số tuyến tính lần lượt theo a_h, a_u, a_c và a_z viết dưới dạng véc tơ:

$$AX = 0 \quad (2.11)$$

với

$$A = \begin{bmatrix} ku_{cd} - \omega & k \frac{u_{cd}^2}{F^2} & 0 & 0 \\ ik \cos \alpha - \frac{F^2}{\chi u_{cd}^2} & i(ku_{cd} - \omega) + \frac{2}{\chi u_{cd}} & \frac{\gamma}{2\rho_0} \cos \alpha \frac{u_{cd}^2}{F^2} ki & ikm \cos \alpha \\ 0 & -\frac{2\delta C^0 F^2}{\chi u_{cd}^3} & i(ku_{cd} - \omega) & 0 \\ 0 & \frac{2\delta C^0}{\chi u_{cd}} & 0 & -i\omega \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} a_h \\ a_u \\ a_c \\ a_z \end{bmatrix}$$

Điều kiện để (2.11) có nghiệm không tầm thường là $\det|A| = 0$. Khai triển định thức ta nhận được phương trình sau:

$$\begin{aligned} &(ku_{cd} - \omega) \left\{ \omega^3 - 2(ku_{cd} - \frac{i}{\chi u_{cd}}) \omega^2 + \right. \\ &\left. + \omega \left[k^2 u_{cd}^2 \left(1 - \frac{\cos \alpha}{F^2} \right) - i \left(\frac{k\delta C^0}{\chi u_{cd}} \left(\frac{\gamma}{\rho_0} - 2m \right) + \frac{3k}{\chi} \right) \right] - 2\delta C^0 m \cos \alpha \frac{k^2 i}{\chi} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Trước hết ta nhận được một nghiệm $\omega = ku_{cd}$, tương ứng với mode không hao tán, lan truyền xuôi dòng không thay đổi hình dạng với vận tốc pha $\frac{d\omega}{dx} = u_{cd}$. Bây giờ ta cần tìm điều kiện cho các mode còn lại luôn luôn ổn định. Để thực hiện vấn đề này ta sử dụng phương pháp của lý thuyết hàm biến phức [1] xét hàm phức:

$$\Phi(\omega) = \omega^3 - 2(ku_{cd} - \frac{i}{\chi u_{cd}}) \omega^2 + \omega \left[k^2 u_{cd}^2 \left(1 - \frac{\cos \alpha}{F^2} \right) - i \left(\frac{k\delta C^0 \cos \alpha \psi}{\chi u_{cd}} + \frac{3k}{\chi} \right) \right] - \frac{2\delta C^0}{\chi} m \cos \alpha k^2 i$$

với

$$\psi = \frac{\gamma}{\rho_0} - 2m = \frac{\gamma}{C^0 \gamma + \rho \omega} - 2m < 0$$

Ta cần tìm điều kiện để cho phương trình $\Phi(\omega) = 0$ không có nghiệm trong nửa trên của mặt phẳng phức ω hay trong miền giới hạn bởi nửa đường tròn $\omega = Re^{i\varphi}$ khi $R \rightarrow +\infty, 0 \leq \varphi \leq \pi$ và trục thực. Khi ω ở trên trục thực ta tách $\Phi(\omega)$ thành hai phần:

$$\operatorname{Re}\Phi(\omega) = \omega \left[\omega^2 - 2ku_{cd}\omega + k^2 u_{cd}^2 \left(1 - \frac{\cos \alpha}{F^2} \right) \right],$$

$$\operatorname{Im}\Phi(\omega) = \frac{1}{\chi u_{cd}} \left[2\omega^2 - \omega(k\delta C^0 \cos \alpha \psi + 3ku_{cd}) - 2\delta C^0 \cos \alpha k^2 u_{cd} \right] = \frac{1}{\chi u_{cd}} f(\omega)$$

Phương trình $\text{Re}\Phi(\omega) = 0$ có ba nghiệm thực:

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_{2,3} = ku_{cd} \left(1 \mp \frac{\sqrt{\cos \alpha}}{F}\right), \quad \forall k$$

và phương trình $\text{Im}\Phi(\omega) = 0$ hay $f(\omega) = 0$ luôn luôn có hai nghiệm thực:

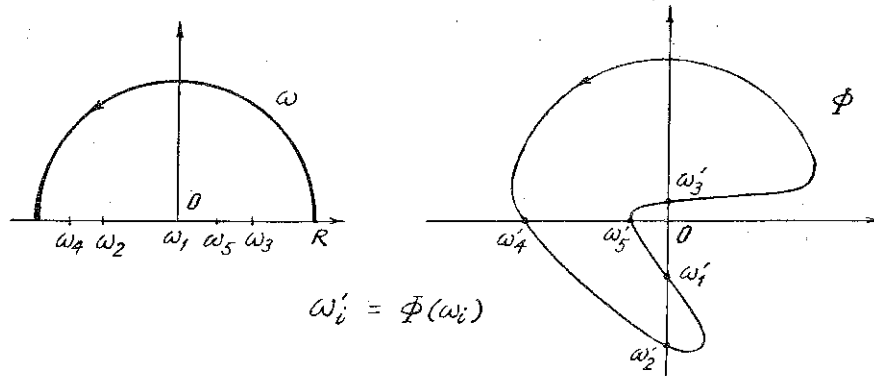
$$\omega_4 < 0 < \omega_5 \quad \forall k$$

Cuối cùng ta chỉ nhận được ba trường hợp thỏa mãn điều kiện bài toán đối với $k > 0$ (còn $k < 0$ dẫn đến cùng kết quả) như sau:

- Trường hợp 1:

Điều kiện:

$$f(\omega_2) \leq 0, \quad \omega_2 \leq 0, \quad f(\omega_3) \geq 0, \quad \omega_3 \geq 0. \quad (2.13)$$

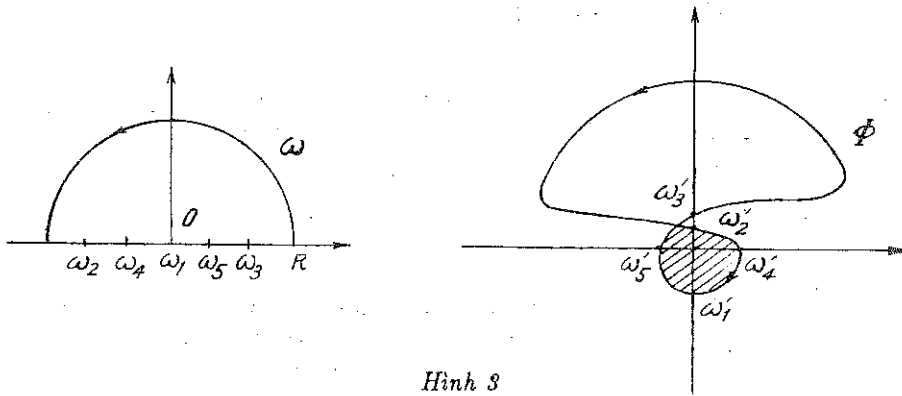


Hình 2

- Trường hợp 2:

Điều kiện :

$$f(\omega_2) \geq 0, \quad \omega_2 \leq 0, \quad f(\omega_3) \geq 0, \quad \omega_3 \geq 0. \quad (2.14)$$

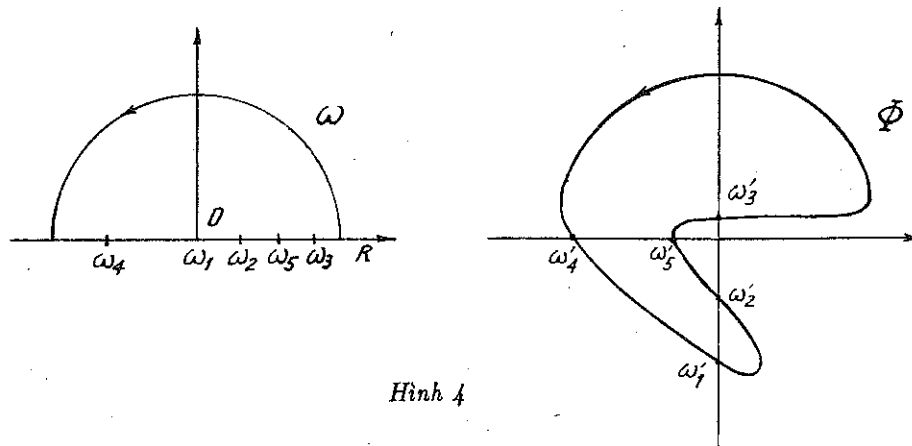


Hình 3

- Trường hợp 3:

Điều kiện :

$$f(\omega_2) \leq 0, \quad \omega_2 \geq 0, \quad f(\omega_3) \geq 0, \quad \omega_3 \geq 0. \quad (2.15)$$



Hình 4

với

$$\frac{F^2}{k^2 u_{cd}} f(\omega_2) = 2u_{cd}(F - \sqrt{\cos \alpha})^2 - F(F - \sqrt{\cos \alpha})(\delta C^0 \cos \alpha \psi + 3u_{cd}) - 2\delta C^0 \cos \alpha F^2,$$

$$\frac{F^2}{k^2 u_{cd}} f(\omega_3) = 2u_{cd}(F + \sqrt{\cos \alpha})^2 - F(F + \sqrt{\cos \alpha})(\delta C^0 \cos \alpha \psi + 3u_{cd}) - 2\delta C^0 \cos \alpha F^2.$$

Kết hợp nghiệm của các hệ (2.13) - (2.15) ta nhận được điều kiện ổn định là

$$F \leq F_2 = \frac{\sqrt{\cos \alpha}}{2} \cdot \frac{u_{cd} - \delta C^0 \cos \alpha \psi + \sqrt{\Delta}}{u_{cd} + \delta C^0 \cos \alpha (\psi + 2)} \quad (2.16)$$

với

$$\Delta = 9u_{cd}^2 + 2u_{cd}\delta C^0 \cos \alpha (3\psi + \gamma) + (\delta C^0 \cos \alpha \psi)^2$$

Ta dễ dàng chứng minh được rằng $F_2 \leq 2\sqrt{\cos \alpha}$ khi $\psi \geq -\frac{1}{3}$. Điều này hoàn toàn thỏa mãn khi nồng độ bùn cát $C^0 < 20\%$. Khi dòng chảy không có bùn cát lơ lửng, nghĩa là $C^0 = 0$ lúc đó $F_2 = 2\sqrt{\cos \alpha}$ ta thu nhận được điều kiện cổ điển [1]:

$$F \leq 2\sqrt{\cos \alpha} \iff \operatorname{tg} \alpha \leq 4C_f$$

Điều kiện (2.16) có thể được viết dưới dạng:

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \frac{1}{4} \left[\frac{u_{cd} - \delta C^0 \cos \alpha \psi + \sqrt{\Delta}}{u_{cd} + \delta C^0 \cos \alpha (\psi + 2)} \right]^2 C_f \quad (2.17)$$

Như vậy dòng chảy mang bùn cát với nồng độ nhỏ sẽ sớm mất ổn định hơn trường hợp không có bùn cát.

b. Trường hợp dòng không lắng và không vận tải bùn cát đáy

$$(\tau_{cd} < |\tau_b| < \tau_{cr})$$

Lúc này $G_x = 0$ và $J_b = 0$ và hệ (1.1) chỉ gồm 4 phương trình đầu do không có biến dạng đáy. Điều kiện ổn định trùng với điều kiện cổ điển. Đặc biệt trong trường hợp này sự phát triển phi tuyến của nhiễu đã được xét [2].

c. Trường hợp dòng không lắng và có vận tải bùn cát đáy

$$(\tau_{cr} < |\tau_b| < \tau_{ce})$$

Trường hợp này $G_x > 0$ và $J_b = 0$. Phương trình cuối của (1.2) trở thành:

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \beta_2 \left(\frac{\partial q}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.18)$$

Nghiệm nhận được bằng cách thay u_{cd} bởi F trong trường hợp a. Lúc này (2.9) trở thành:

$$\begin{aligned} h_t + F h_x + u_x &= 0, \\ u_t + F u_x + \cos \alpha h_x + \frac{2u}{\chi F} - \frac{h}{\chi} &= -\frac{\gamma}{2h} \cos \alpha C_x - m \cos \alpha \phi_x, \\ C &= S(x - Ft), \\ Z &= \phi(x) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Với S và ϕ là các hàm được xác định từ điều kiện ban đầu.

Điều kiện ổn định hoàn toàn như trường hợp b. Khi dòng chảy ở trạng thái góc nghiêng tới hạn $\text{tg} \alpha = \text{tg} \alpha_{cr} = 4C_f$ ta chứng minh được rằng mọi kích động sẽ được phân thành bốn mode: F , $3F/2$, $F/2$ và mode dừng ([2])

d. Trường hợp bùn cát đáy tham gia vào chuyển động lơ lửng ($|\tau_b| \geq \tau_{ce}$)

Lúc này $G_x = 0$ và $J_b = \left(\frac{dm}{dt}\right)_e$

Theo Partheniades:

$$J_b = M_e \left(\frac{|\tau_b|}{\tau_{ce}} - 1 \right), \quad M_e - \text{hằng số thực nghiệm.}$$

Hệ phương trình nhận được hoàn toàn giống (2.9) nhưng thay u_{cd} và δC^0 lần lượt bởi u_{ce} và δ_1 (u_{ce} - vận tốc giới hạn xói không thứ nguyên). Điều kiện ổn định tương tự với (2.19):

$$\text{tg} \alpha \leq \frac{1}{4} \left[\frac{u_{ce} - \delta_1 \cos \alpha \psi + \sqrt{\Delta_1}}{u_{ce} + \delta_1 \cos \alpha (\psi + 2)} \right]^2 C_f \quad (2.20)$$

với

$$\delta_1 = \frac{M_e \cot \alpha}{\rho_s \sqrt{gH_0}}, \quad \Delta_1 = 9u_{ce}^2 + 2u_{ce}\delta_1 \cos \alpha (3\psi + 8) + (\delta_1 \cos \alpha \psi)^2$$

5. KẾT LUẬN

Trong bài báo này tác giả đã nghiên cứu sự ổn định của dòng chảy có mang bùn cát lơ lửng trong kênh có đáy nghiêng, có đáy thay đổi với các trạng thái khác nhau của dòng. Kết quả thu được chứng tỏ rằng khi dòng có chứa bùn cát ở các trạng thái lắng hay xói (bùn cát đáy tham gia vào chuyển động lơ lửng) thì góc nghiêng tới hạn bé hơn trường hợp dòng thuần nhất, nghĩa là dòng sớm mất ổn định hơn. Còn nếu bùn cát lơ lửng và bùn cát đáy không có sự trao đổi thì sự tồn tại của chuyển động bùn cát không gây ảnh hưởng đến điều kiện ổn định của dòng. Trong trường hợp đặc biệt $C^0 = 0$ kết quả cổ điển được thu nhận.

Tác giả chân thành cảm ơn Giáo sư tiến sĩ Nguyễn Văn Điệp về những chỉ dẫn bổ ích.

Địa chỉ:
Viện Cơ học
Trường Đại học Tổng hợp Huế

Nhận ngày 27/6/1990

(xem tiếp trang 27)