Tạp chí CƠ HỌC, tập XIII, 1991, số 2 (1 — 7)

VA CHẠM CỦA VẬT RẮN VÀO THANH ĐÀN HỒI CÓ KỂ ĐẾN LỰC CẢN ĐÀN NHỚT Ở MẶT BÊN

NGUYỄN THÚC AN, NGUYỄN ĐÌNH TRIỀU

Nghiên cứu về va chạm dọc của vật rắn vào thanh đàn hồi mặt bên tự do đã được nhiều tác giả quan tâm [1, 2, 3] ... Để mô hình bài toán cơ học sát với mô hình bài toán thực tế, trong [4] đã xét đến bài toán về sự va chạm dọc của vật rắn vào thanh đàn hồi có kể đến sức cản ở mặt bên của thanh là cản nhớt. Trong bài báo này tác giả xét đến trường hợp sức cản mặt bên của thanh là đàn nhớt. Với phép biến đổi Laplace và phương trình Volter tác giả tìm nghiệm của bài toán với trường hợp thanh tựa trên nền cứng.

1. PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG CỦA THANH VÀ CÁC ĐIỀU KIỆN CỦA BÀI TOÁN

Ta xét một phân tố của thanh với giả thiết lực ma sát ở mặt bên của thanh là đàn hồi nhớt và coi gần đúng như lực khối. Vậy lực ma sát tác dụng lên một đơn vị thể tích của thanh là $\left(K, u + \lambda_1 \dfrac{\partial v}{\partial t}\right) \dfrac{r}{F}$. Trong đó k_1, λ_1 là hệ số lực chống đàn hồi và nhớt ở mặt bên; r và F là chu vi và diện tích thiết diện ngang.

Áp dụng nguyên lý Đa lăm be cho phân tố của thanh, rút gọn ta có phương trình chuyển động của thanh

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Ku + \lambda \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \tag{1.1}$$

Trong đó: $a = \sqrt{E/\rho}$ - vận tốc truyền sóng đàn hồi của thanh; $K = K_1 r/F$, $\lambda = \lambda_1 r/F$, u là dịch chuyển thiết diện ngang của thanh.

Điều kiện đầu của bài toán: ở tại thời điểm t = 0 thì

$$u = o, \qquad \dot{u}_t = 0. \tag{1.2}$$

Điều kiện biên của bài toán

$$\begin{aligned} &\sigma_x = E\frac{\partial u}{\partial x} = -f(t) && \text{tại đầu thanh} \quad x = 0, \\ &u = 0 && \text{tại đầu thanh} \quad x = \ell. \end{aligned} \tag{1.3}$$

2. SỰ TRUYỀN SÓNG TRONG THANH

Tìm hàm dịch chuyển $u(x,t)$ ta dùng phép biến đổi Laplace

$$u_0(p,x) = \int_0^\infty u(t,x)e^{-pt}dt.$$

Khi đó bài toán trên sẽ dẫn đến bài toán sau

$$\frac{d^2u_0}{dx^2} - \frac{(p^2+\lambda p + K)}{a^2}u_0 = 0. \tag{2.1}$$

Điều kiện biên của bài toán

$$\begin{aligned} &\frac{du_0}{dx} = -\frac{1}{E}f_0(p) \quad \text{với } x = 0, \\ &u_0(p,x) = 0 \qquad \text{tại } x = \ell. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Nghiệm tổng quát của (2.1) là

$$u_0(p,x) = C_1e^{-\alpha x} + C_2e^{\alpha x}. \tag{2.3}$$

Trong đó

$$\alpha = \frac{1}{a}\sqrt{(p+\frac{\lambda}{2})^2 + (K - \frac{\lambda^2}{4})}.$$

Các hằng số C_1, C_2 được xác định từ điều kiện biên (2.2) ta có

$$C_1 = \frac{f_0(p)e^{2\alpha\ell}}{\alpha E(1+e^{2\alpha\ell})}; \qquad C_2 = -\frac{f_0(p)}{\alpha E(1+e^{2\alpha\ell})}.$$

Thay vào (2.3) ta có

$$u_0(p,x) = \frac{f_0(p)}{\alpha E(1+e^{2\alpha\ell})}\left[e^{\alpha(2\ell - x)} - e^{\alpha x}\right]. \tag{2.3a}$$

Mặt khác

$$\frac{1}{1+e^{2\alpha\ell}} = \frac{e^{-2\alpha\ell}}{1+e^{-2\alpha\ell}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{e^{-\alpha[2(n+1)\ell - x]}}{\alpha}$$

như vậy (2.3) được viết

$$u_0(p,x) = \frac{1}{E}f_0(p)\Big\{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{e^{-\alpha(x+2n\ell)}}{\alpha} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{e^{-\alpha[2(n+1)\ell - x]}}{\alpha}\Big\}.$$

Hay

$$u_0(p,x) = \frac{1}{E}f_0(p)\Big[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nV_n(p,x) - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nW_n(p,x)\Big]. \tag{2.3b}$$

Hàm dịch chuyển $u(x,t)$ được xác định khi biết hàm gốc của $V_n(p,x)$ và $W_n(p,x)$
Hàm

$$V_n(p,x) = \frac{e^{-\alpha(x+2n\ell)}}{\alpha} = a\,\frac{e^{-\sqrt{(p+\frac{\lambda}{2})^2 - (\frac{\lambda^2-4k}{4})}\,(\frac{x+2n\ell}{a})}}{\sqrt{(p+\frac{\lambda}{2})^2 - \frac{\lambda^2-4k}{a}}} = aH_n(p+\frac{\lambda}{2},x). \tag{2.4}$$

Theo [1]

$$H_n(p,x) = \frac{e^{-\sqrt{p^2 - \frac{\lambda^2-4k}{4}}\left(\frac{x+2n\ell}{a}\right)}}{\sqrt{p^2 - \frac{\lambda^2-4k}{4}}} \div h_n(t,x) =$$

$$= I_0\left[\frac{\sqrt{\lambda^2-4k}}{2}\sqrt{t^2 - \left(\frac{x+2n\ell}{a}\right)^2}\right]\eta\left(t - \frac{x+2n\ell}{a}\right).$$

Nếu $\lambda^2 - 4k < 0$ thì

$$h_n(t,x) = J_0\left[\frac{\sqrt{\lambda^2-4k}}{2}\sqrt{t^2 - \left(\frac{x+2n\ell}{a}\right)^2}\right]\eta\left(t - \frac{x+2n\ell}{a}\right).$$

Theo định lý dịch chuyển ta có

$$V_n(p,x) = aH_n\left(p + \frac{\lambda}{2}, x\right) \div e^{-\frac{\lambda}{2}t}ah_n(t,x) =$$

$$= ae^{-\frac{\lambda_2}{2}t} I_0\left[\frac{\sqrt{\lambda^2-4k}}{2}\sqrt{t^2 - \left(\frac{x+2n\ell}{a}\right)^2}\right]\eta\left(t - \frac{x+2n\ell}{a}\right). \qquad (2.4a)$$

Nếu $\lambda^2 - 4k < 0$ thì

$$V_n(p,x) \div ae^{-\frac{\lambda_2}{2}t} J_0\left[\frac{\sqrt{\lambda^2-4k}}{2}\sqrt{t^2 - \left(\frac{x+2n\ell}{a}\right)^2}\right]\eta\left(t - \frac{x+2n\ell}{a}\right). \qquad (2.4b)$$

Trong đó $\lambda_2 = \sqrt{\lambda^2 - 4k}$
Lý luận tương tự ta có

$$W_n(p,x) \div ae^{-\frac{\lambda_2}{2}t} I_0\left[\frac{\lambda_2}{2}\sqrt{t^2 - \left(\frac{2(n+1)\ell - x}{a}\right)^2}\right]\eta\left(t - \frac{2(n+1)\ell - x}{a}\right). \qquad (2.5a)$$

Nếu $\lambda^2 - 4k < 0$ thì

$$W_n(p,x) \div ae^{-\frac{\lambda_2}{2}t} J_0\left[\frac{\lambda_2}{2}\sqrt{t^2 - \left(\frac{2(n+1)\ell - x}{a}\right)^2}\right]\eta\left(t - \frac{2(n+1)\ell - x}{a}\right). \qquad (2.5b)$$

Áp dụng định lý hàm nhân ta có

$$u_0(p,x) \div u(t,x) = \frac{a}{E}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\eta\left(t - \frac{x+2n\ell}{a}\right)\int_{\frac{x+2n\ell}{a}}^{t} f(t-\tau)e^{-\frac{\lambda_2}{2}\tau}I_0\left[\frac{\lambda_2}{2}\sqrt{\tau^2 - \left(\frac{x+2n\ell}{a}\right)^2}\right]d\tau -$$

$$-\frac{a}{E}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\eta\left(t - \frac{2(n+1)\ell - x}{a}\right)\int_{\frac{2(n+1)\ell-x}{a}}^{t} f(t-\tau)e^{-\frac{\lambda_2}{2}\tau}\sqrt{\tau^2 - \left(\frac{2(n+1)\ell - x}{a}\right)^2}d\tau. \qquad (2.6)$$

Nếu ở tổng thứ hai của (2.6) ta đặt (n+1) = k và gọi phần nguyên $\|\frac{at-x}{2\ell}\| = n_1$ và $\|\frac{at+x}{2\ell}\| = n_2$ thì (2.6) được viết

$$u(x,t) = \frac{a}{E}\Big\{ \sum_{n=0}^{n_1}(-1)^n \int\limits_{\frac{2n\ell+x}{a}}^{t} f(t-\tau)e^{-\frac{\lambda_2}{2}\tau} I_0\Big[\frac{\lambda_2}{2}\sqrt{\tau^2 - (\frac{2n\ell+x}{a})^2}\Big]d\tau -$$

$$- \sum_{k=1}^{n_2}(-1)^k \int\limits_{\frac{2k\ell-x}{a}}^{t} f(t-\tau)e^{-\frac{\lambda_2}{2}\tau} I_0\Big[\frac{\lambda_2}{2}\sqrt{\tau^2 - (\frac{2k\ell-x}{a})^2}\Big]d\tau\Big\}. \qquad (2.6a)$$

Trường hợp $\lambda^2 - 4k < 0$ thì dịch chuyển $u(t,x)$ là

$$u(t,x) = \frac{a}{E}\Big\{ \sum_{n=0}^{n_1}(-1)^n \int\limits_{\frac{2n\ell+x}{a}}^{t} f(t-\tau)e^{-\frac{\lambda_2}{2}\tau} J_0\Big[\frac{\lambda_2}{2}\sqrt{\tau^2 - (\frac{2n\ell+x}{a})^2}\Big]d\tau -$$

$$- \sum_{k=1}^{n_2}(-1)^k \int\limits_{\frac{2k\ell-x}{a}}^{t} f(t-\tau)e^{-\frac{\lambda_2}{2}\tau} J_0\Big[\frac{\lambda_2}{2}\sqrt{\tau^2 - (\frac{2k\ell-x}{a})^2}\Big]d\tau\Big\} \qquad (2.6b)$$

(2.6a), (2.6b) chính là nghiệm của bài toán (1.1) và (1.2), (1.3)

3. VA CHẠM DỌC CỦA VẬT RẮN VÀO THANH

Theo kết quả của [4] khi xét bài toán va chạm của vật rắn vào thanh có kể đến bộ phận giảm chấn, ta đưa về bài toán xác định lực $f(t)$ như sau:

Tìm $f(t)$ thỏa mãn phương trình

$$\ddot{f}(t) + \frac{k}{M}f(t) + \frac{k}{f}\ddot{u}(t,0) = 0 \qquad (3.1)$$

và thỏa mãn điều kiện đầu

$$f(0) = 0, \qquad (3.2)$$

$$\dot{f}(0) = \frac{kV_0}{F}. \qquad (3.3)$$

Trong đó K là độ cứng của đệm, V_0 là vận tốc ban đầu của vật rắn khi va chạm vào thanh.

Trong (3.1) hàm $\ddot{u}(0,t)$ còn phụ thuộc vào $f(t)$, nên ta phải thực hiện các bước sau:

Từ (2.6a) ta có

$$u(t,0) = \frac{a}{E}\Big\{ \sum_{n=0}^{n_1}(-1)^n \int_{\frac{2n\ell}{a}}^{t} f(t-\tau)e^{-\frac{\lambda_2}{2}\tau} I_0\Big[\frac{\lambda_2}{2}\sqrt{\tau^2 - (\frac{2n\ell}{a})^2}\Big]d\tau -$$

$$- \sum_{k=1}^{n_2}(-1)^k \int_{\frac{2k\ell}{a}}^{t} f(t-\tau)e^{-\frac{\lambda_2}{2}\tau} I_0\Big[\frac{\lambda_2}{2}\sqrt{\tau^2 - (\frac{2k\ell}{a})^2}\Big]\Big\},$$

$$u(t,0) = \frac{a}{E}\Big\{ \int_0^t f(t-\tau)e^{-\frac{\lambda_2}{2}\tau} I_0(\frac{\lambda}{2}\tau)d\tau +$$

$$+ 2\sum_{n=1}^{N}(-1)^n \int_{\frac{2n\ell}{a}}^{t} f(t-\tau)e^{-\frac{\lambda_2}{2}\tau} I_0\Big[\frac{\lambda_2}{2}\sqrt{\tau^2 - (\frac{2n\ell}{a})^2}\Big]d\tau\Big\}.$$

Trong đó $N = n_1 = n_2$ tại thiết diện $x = 0$
Thực hiện đạo hàm (3.3) hai lần theo thời gian ta có

$$\ddot{u}_0(t,0) = \frac{a}{E}\Big\{ \dot{f}(t) - \frac{\lambda}{2}f(t) + \frac{\lambda_2^2 E}{4}\int_0^t g(t-\xi)f(\xi)d\xi + 2\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\Big[e^{-\frac{\lambda_2 n\ell}{a}}\dot{f}(t - \frac{2n\ell}{a}) +$$

$$+ \frac{\lambda_2}{2}(\frac{\lambda_2 n\ell}{2a} - 1)f(t - \frac{2n\ell}{a}) + \frac{\lambda_2}{2}\int_0^{t-\frac{2n\ell}{a}} g_n(t-\xi)f(\xi)d\xi\Big]\Big\}. \tag{3.4}$$

Trong đó

$$g(y) = \Big[\dot{I}_1(\frac{\lambda_2}{2}y) - 2I_1(\frac{\lambda_2}{2}y) + I_0(\frac{\lambda_2}{2}y)\Big]e^{-\frac{\lambda_2}{2}y}$$

$$g_n(\tau) = \frac{d}{d\tau}e^{-\frac{\lambda_2}{2}\tau}\left[\frac{\tau \cdot I_1\Big(\frac{\lambda_2}{2}\sqrt{\tau^2 - \frac{4n^2\ell^2}{a^2}}\Big)}{\sqrt{\tau^2 - \frac{4n^2\ell^2}{a^2}}} - I_0\Big(\frac{\lambda_2}{2}\sqrt{\tau^2 - \frac{4n^2\ell^2}{a^2}}\Big)\right].$$

Thay kết quả này vào (3.1) và rút gọn ta có

$$\ddot{f}(t) + \frac{ka}{EF}\dot{f}(t) + \Big(\frac{k}{M} - \frac{ka\lambda_2}{2EF}\Big)f(t) + \frac{ka\lambda_2}{4F}\int_0^t g(t-\xi)f(\xi)d\xi +$$

$$+ \frac{2ak}{EF}\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\Big[e^{-\frac{\lambda_2 n\ell}{a}}\dot{f}(t - \frac{2n\ell}{a}) + \frac{\lambda_2}{2}(\frac{\lambda_2 n\ell}{2a} - 1)f(t - \frac{2n\ell}{a}) + \frac{\lambda_2}{2}\int_0^t g_n(t-\xi)f(\xi)d\xi\Big] = 0. \tag{3.5}$$

Đây là phương trình vi tích phân có độ chậm, ta có thể giải nó trong từng khoảng thời gian. Khi $0 < t < 2\ell/a$ thì $N = 0$, (3.5) có dạng

$$\ddot{f}(t) = \frac{ka}{EF}\dot{f}(t) + (\frac{k}{M} - \frac{ka\lambda_2}{2EF})f(t) + \frac{ka\lambda_2^2}{4F}\int_0^t g(t-\xi)f(\xi)d\xi = 0. \tag{3.6}$$

Theo [4] phương trình (3.6) tương đương với phương trình Volter

$$f(t) + \int_0^t K_0(t,\tau)f(\tau)d\tau = \frac{k}{F}V_0 t. \qquad (3.7)$$

Trong đó

$$K_0 = \frac{ka}{EF} + \int_a^t \Big[\big(\frac{k}{M} - \frac{ka\lambda_2}{2EF}\big) + \int_\tau^\theta \frac{ka\lambda_2^2}{4E} g(\xi - \tau)d\xi\Big]d\theta.$$

Giải phương trình (3.7) có nhiều phương pháp như lặp nghiệm, lặp nhân hay biểu diễn nghiệm qua hàm cho phép ... ở đây ta tìm nghiệm dưới dạng gần đúng liên tiếp:

$$f_0(t) = \frac{k}{F}V_0 t,$$

$$f_1(t) = \frac{k}{F}V_0(t) - \int_0^t K_0(t,\tau)f_0(\tau)d\tau.$$

....

$$f_n(t) = \frac{k}{F}V_0 t - \int_0^t K_0(t,\tau)f_{n-1}(\tau)d\tau.$$

Khi đó $\{f_n(t)\} \to f(t)$

Lý luận tương tự có thể tìm nghiệm $f(t)$ của (3.7) ở các khoảng liên tiếp sau với $2j\ell/a < t < 2(j+1)\ell/a$ khi đó $j = N$ và phương trình (3.7) có dạng

$$\ddot{f}(t) + \frac{ka}{EF}\dot{f}(t) + \big(\frac{k}{M} - \frac{ka\lambda_2}{2EF}\big)f(t) + \frac{ka\lambda_2^2}{4F}\int_{2j\ell/a}^t g(t-\xi)f(\xi)d\xi + m_j(t) = 0. \qquad (3.8)$$

Trong đó

$$m_j(t) = \frac{ka\lambda_2^2}{4F}\int_0^{2j\ell/a} g(t-\xi)f(\xi)d\xi + \frac{2ak}{EF}\sum_{n=1}^{j}(-1)^n\Big[e^{-\lambda_2 n\ell/a}\dot{f}\big(t - \frac{2n\ell}{a}\big) + $$
$$+ \frac{\lambda_2}{2}\big(\frac{\lambda_2 n\ell}{a} - 1\big)f\big(t - \frac{2n\ell}{a}\big) + \frac{\lambda_2}{2}\int_0^{t-\frac{2n\ell}{a}} g_n(t-\xi)f(\xi)d\xi\Big]$$

là hàm số đã biết của thời gian t.

Theo [4] phương trình tích phân này sẽ tương đương với phương trình Volter

$$f(t) + \int_{2j\ell/a}^t K_0(t,\tau)f(\tau)d\tau = X_j(t) + f\big(\frac{2l\ell}{a}\big) + \Big[\dot{f}\big(\frac{2j\ell}{a}\big) + \frac{ka}{EF}f\big(\frac{2j\ell}{a}\big)\Big]\big(t - \frac{2j\ell}{a}\big). \qquad (3.9)$$

Trong đó

$$X_j(t) = \int_{2j\ell/a}^t d\theta \int_{2j\ell/a}^\theta m_j(\xi)d\xi.$$

Tìm nghiệm của (3.9) dưới dạng gần đúng liên tiếp ta có

$$f_0(t) = \varsigma_j(t),$$

$$f_1(t) = \varsigma_j(t) - \int\limits_{2j\ell/a}^{t} K_0(t,\tau) f_0(\tau) d\tau,$$

....

$$f_n(t) = \varsigma_j(t) - \int\limits_{2j\ell/a}^{t} K_0(t,\tau) f_{n-1}(\tau) d\tau.$$

Trong đó

$$\varsigma_j(\tau) = X_j(t) + f\Big(\frac{2j\ell}{a}\Big) + \Big[\dot{f}\Big(\frac{2j\ell}{a}\Big) + \frac{ka}{EF} f\Big(\frac{2j\ell}{a}\Big)\Big]\Big(t - \frac{2j\ell}{a}\Big).$$

Sau khi tìm được hàm $f(t)$ thay vào (2.6a); (2.6b) ta xác định được dịch chuyển $u(t,x)$ ứng suất và vận tốc tại mỗi thiết diện của thanh. Mặt khác xác định được hàm $f(t)$ thì ta tìm được thời gian va chạm của vật rắn vào thanh.

4. KẾT LUẬN

Bài toán đặt ra được giải quyết trọn vẹn, đây là mô hình bài toán tổng quát hơn so với các bài toán [2, 3, 4] và nó sát với mô hình bài toán sự va chạm của búa rơi tự do vào cọc đàn hồi có đệm chịu sức cản đàn nhớt ở mặt bên và gặp nền cứng.

Địa chỉ:
Trường Đại học Thủy Lợi

Nhận ngày 25/5/1990

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Бейтман Г., Эрдейн А. Таблицы интергральных преобрязований. Т. 1, 2 "Наука" Москва 1969.
2. Бидерман В. И., Мялюкова Р. П. Усилия и деформация при продольном ударе. Сб. "Расчёты на прочность." изд - во Машиностроение, М. 1964.
3. Шехтер О. Я. Исследования распространения волн от нагрузки, приложенной к верхнему концу бесконечно длинного стержня. Основания и фундаменты. № 53, М. 1963.
4. Nguyễn Thúc An, Nguyễn Đăng Tộ. Sự va chạm của vật rắn vào thanh đàn hồi có kể đến lực ma sát nhớt ở mặt bên. Tạp chí Cơ học số 1, 1989.

SUMMARY

SHOCK BETWEEN ABSOLUTELY SOLID BODY AND ELASTIC BAR WITH THE ELASTIC VISCOUS FRICTIONAL RESISTANCE AT THE SIDE

The problem was solved completely in this paper.

In the technical point of view this is model of the problem about shock between hammer and pile.