Tạp chí CƠ HỌC, tập XIII, 1991, số 1 (22 — 27)

BÀI TOÁN ĐỐI LƯU NHIỆT TỰ NHIÊN CỦA CHẤT LỎNG QUY LUẬT MŨ GIỮA HAI HÌNH TRỤ THẲNG ĐỨNG

VŨ DUY QUANG, NGUYỄN QUẾ

1. MỞ ĐẦU

Bài toán đối lưu nhiệt tự nhiên của chất lỏng phi Niutơn nói chung và chất lỏng quy luật mũ nói riêng đã được nhiều tác giả quan tâm do những ứng dụng của nó trong công nghiệp dầu hỏa, polimer ... (xem [1]). Trong [2] U. G. Xemakin đã xét bài toán đối lưu nhiệt tự nhiên của chất lỏng quy luật mũ nằm giữa hai thành thẳng đứng, phẳng, vô hạn, với nhiệt độ các thành cho trước. Trong [3] Vũ Duy Quang và P. Sulman đã xét bài toán trên nhưng với thành có bề dày với độ dẫn nhiệt hữu hạn (bài toán liên hợp) ngoài ra còn tính đến ảnh hưởng của các nguồn nhiệt trong thành cũng như trong chất lỏng.

Trong bài này chúng tôi xét bài toán đối lưu nhiệt tự nhiên của chất lỏng quy luật mũ nằm giữa hai hình trụ tròn thẳng đứng, đồng trục, dài vô hạn, có bề dày với độ dẫn nhiệt hữu hạn (*hình 1*). Ngoài ra giả thiết ở hình trụ ngoài, hình trụ trong và chất lỏng đều chứa nguồn nhiệt không đổi. Chúng tôi đã rút ra được biểu thức nghiệm của bài toán có chứa hệ số chưa biết. Các hệ số này đã được xác định trên máy tính. Kết cấu được phân tích và biểu diễn trên đồ thị.

2. PHƯƠNG TRÌNH VÀ BIỂU THỨC NGHIỆM

Gọi hệ số dẫn nhiệt của hình trụ ngoài và trong lần lượt là λ_n, λ_t. Nhiệt độ ở thành ngoài của hình trụ ngoài và thành trong của hình trụ trong giả thiết cho trước và bằng θ_{on}, θ_{0t}. Nguồn nhiệt ở hình trụ ngoài, hình trụ trong và chất lỏng giả thiết không đổi và bằng s_n, s_t và s.

Xét bài toán dừng một chiều. Trong hệ tọa độ trụ ta có các phương trình sau (ở dạng không thứ nguyên):

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\left|\frac{dv}{dr}\right|^{n-1}\frac{dv}{dr}\right)+\theta-\frac{dp}{dz}=0 \tag{2.1}$$

(ở đây n - hệ số mũ của chất lỏng; θ - nhiệt độ của chất lỏng)

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\Big(r\frac{d\theta}{dr}\Big) + s = 0; \quad r_2 < r < r_3 \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\Big(r\frac{d\theta_n}{dr}\Big) + s_n = 0; \quad r_3 < r < r_4 \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\Big(r\frac{d\theta_t}{dr}\Big) + s_t = 0; \quad r_1 < r < r_2 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Điều kiện biên:

$$\theta_n\big|_{r=r_4} = \theta_{n0}; \qquad \theta_t\big|_{r=r_1} = \theta_{t0} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} v = 0; \quad \theta_n = 0; \quad \lambda_n\frac{d\theta_n}{dr} = \frac{d\theta}{dr} \quad khi \quad r = r_3 \\ v = 0; \quad \theta_t = 0; \quad \lambda_t\frac{d\theta_t}{dr} = \frac{d\theta}{dr} \quad khi \quad r = r_2 \end{aligned} \tag{2.5}$$

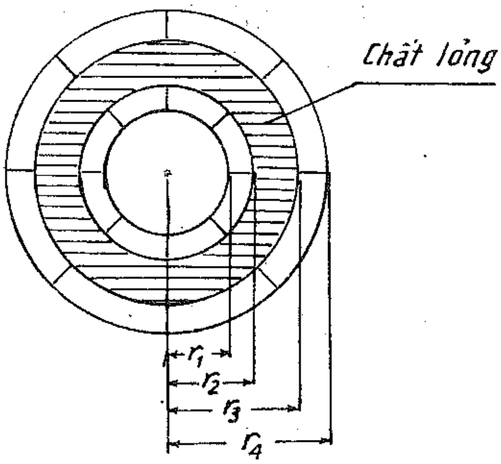
Điều kiện đóng kín:

$$\int_{r_2}^{r_3} v \cdot r dr = 0 \tag{2.6}$$

Bằng cách tích phân phương trình (2.3) và kết hợp với điều kiện biên có thể suy ra

$$\frac{1}{\lambda_t}\dot{\theta} = -\frac{1}{2}s_t r_2 + \big[\theta_{t0} - \theta + \frac{1}{4}s_t(r_1^2 - r_2^2)\big]/r_2\ln(r_1/r_2) \ khi \ r = r_2 \tag{2.7}$$

$$\frac{1}{\lambda_n}\dot{\theta} = -\frac{1}{2}s_n r_3 + \big[\theta_{n0} - \theta + \frac{1}{4}s_n(r_4^2 - r_3^2)\big]/r_3\ln(r_4/r_3) \ khi \ r = r_3 \tag{2.8}$$



Hình 1

Đây chính là 2 điều kiện đối với θ. Hai điều kiện này kết hợp với phương trình (2.2) sẽ cho phép ta xác định θ:

$$\theta = -Dr^2 + c\ln r + c_1 \tag{2.9}$$

ở đây $D = s/4$ còn các hệ số c, c_1 được xác định từ (2.7), (2.8)

$$\begin{aligned} c &= \Delta_c/\Delta; \quad c_1 = \Delta_{c_1}/\Delta \quad \text{với}: \\ \Delta &= \lambda_n\left[\ln(r_1/r_2) + \lambda_t \ln r_2\right] - \lambda_t\left[\ln(r_4/r_3) + \lambda_n \ln r_3\right] \\ \Delta_c &= A\lambda_n - B\lambda_t \\ \Delta_{c_1} &= B\left[\ln(r_1/r_2) + \lambda_t \ln r_2\right] - A\left[\ln(r_4/r_3) + \lambda_n \ln r_3\right] \end{aligned} \tag{2.10}$$

ở đây ký hiệu:

$$A = \frac{1}{2}sr_2^2\ln(r_1/r_2) + \frac{1}{4}sr_2^2\lambda_t - \frac{1}{2}s_t r_2^2\lambda_t\ln(r_1/r_2) + \theta_{t0}\lambda_t + \frac{1}{4}s_t\lambda_t(r_1^2 - r_2^2),$$
$$B = \frac{1}{2}sr_3^2\ln(r_4/r_3) + \frac{1}{4}sr_3^2\lambda_n - \frac{1}{2}s_n r_3^2\lambda_n\ln(r_4/r_3) + \theta_{n0}\lambda_n + \frac{1}{4}s_n\lambda_n(r_4^2 - r_3^2).$$

Thay biểu thức của θ từ (2.9) vào phương trình (2.1) ta được:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r|\dot{v}|^{n-1}\dot{v}) = F + Dr^2 - c\ln r - c_1$$

ở đây ký hiệu $F = dp/dz = \text{const}$ - hằng số tách biến; tích phân phương trình này ta thu được biểu thức $v(r)$:

$$v(r) = \int_{r_2}^{r} |w(t)|^{1/n}\,\mathrm{sign}\,w(t)dt = \int_{r_2}^{r} W(t)dt$$

Trong đó

$$w(r) = \frac{1}{2}c_2 r + \frac{1}{4}Dr^3 - \frac{c}{4}r\ln(r^2/e) + c_3/r$$
$$W(r) = |w(r)|^{1/n}\,\mathrm{sign}\,w(r)$$

ở đây ký hiệu $c_2 = F - c_1$; c_3 là hằng số tích phân.

Các hằng số c_2, c_3 được xác định từ điều kiện biên và điều kiện đóng kín đối với v

$$\int_{r_2}^{r_3} W(r)dr = 0 \tag{2.12}$$

$$\int_{r_2}^{r_3} r^2 W(r)dr = 0 \tag{2.13}$$

Điều kiện (2.12) suy từ điều kiện $v(r_3) = 0$ còn điều kiện (2.13) suy từ điều kiện đóng kín $\int_{r_2}^{r_3} vrdr = 0$ bằng cách tích phân từng phần.

Ngoài trường vận tốc $v(r)$ người ta còn quan tâm đến một đại lượng quan trọng, đó là dòng nhiệt Q mà chất lỏng mang dọc theo thành.

Đại lượng này được tính bởi công thức: $Q = \int_{r_2}^{r_3} v\theta rdr$

Bằng cách tích phân từng phần có thể biểu diễn Q qua W:

$$Q = \frac{1}{4}\int_{r_2}^{r_3} (Dr^4 - 2cr^2\ln r)W(r)dr \tag{2.14}$$

Xét trường hợp đặc biệt khi $r_2 = 0$ tức khi không có hình trụ trong. Khi đó do tính hữu hạn của θ và v tại $r = 0$ ta phải có $c = c_3 = 0$. Các biểu thức (2.9), (2.11) trở nên đơn giản hơn:

$$\begin{aligned}
&\theta(r) = -Dr^2 + c_1 \\
&v(r) = \int_r^1 W(t)dt \qquad (r_3 \text{ lúc này bằng } 1) \\
&\omega(r) = (1/2)c_2 r + (D/4)r^3; \quad W(r) = |w|^{1/n}\,\mathrm{sign}\,w
\end{aligned}$$

Điều kiện $v(1) = 0$ hiển nhiên, điều kiện đóng kín $\int_0^1 r^2 W(r)dr = 0$ cho phép ta xác định c_2.

Đối với chất lỏng Niutơn $n = 1$ ta dễ dàng tính được $c_2 = -D/3$, $v = (D/48)(3r^4 - 4r^2 + 1)$, còn $\theta(r)$ tính theo trên.

3.GIẢI BẰNG PHƯƠNG PHÁP SỐ. PHÂN TÍCH KẾT QUẢ

a. Giải bằng phương pháp số

Để xác định giá trị số của $v(r)$ và Q ta cần tìm các hệ số chưa biết c_2, c_3 trong (2.11) và (2.14). Chúng được xác định từ điều kiện (2.12) và (2.13).

Trước hết ta chuyển các điều kiện có chứa dấu tích phân sang dạng phương trình đại số, sử dụng công thức gần đúng Gauss. Sau đó hệ phương trình đại số phi tuyến thu được sẽ giải bằng phương pháp Niutơn. Bài toán được giải trên máy vi tính.

b. Phân tích kết quả

Trước hết từ biểu thức (2.11), (2.14) có thể thấy rằng $v(r)$ và Q không phụ thuộc vào c_1. Về ý nghĩa vật lý điều đó có nghĩa là nếu tăng hoặc giảm trường nhiệt độ một hằng số thì $v(r)$ và Q sẽ không thay đổi.

Hơn nữa đối với hai thông số còn lại là D và C ta có thể đưa về một thông số là tỷ số giữa chúng.

Thật vậy, từ biểu thức (2.11) và (2.14) do tính thuần nhất ta có thể viết (giả thiết $D \neq 0$):

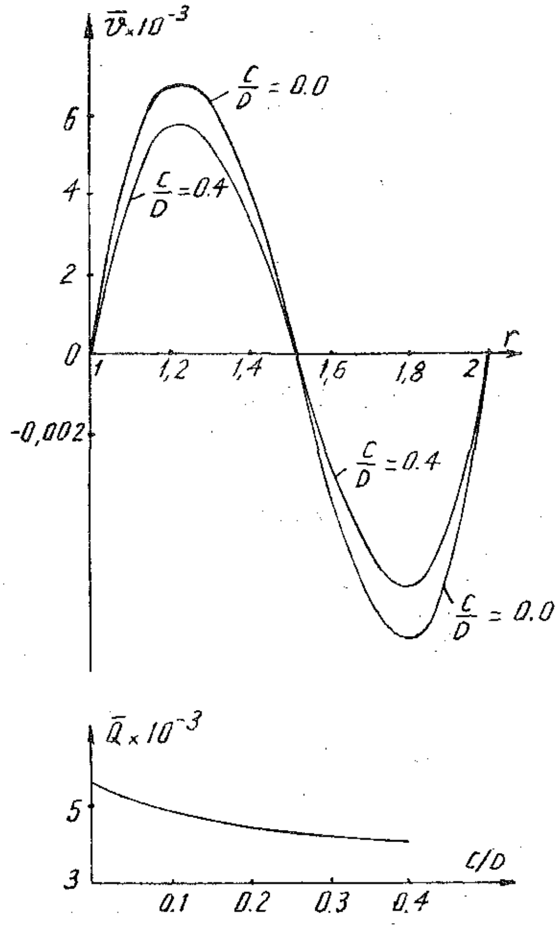
$$\begin{aligned}
v(r) &= |D|^{1/n}\,\mathrm{sign}\,D\,\overline{v}(n, C/D, r) \\
Q &= |D|^{1+1/n}\overline{Q}(n, C/D)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

ở đây $\overline{v}$, $\overline{Q}$ chỉ phụ thuộc vào tỷ số C/D mà thôi.

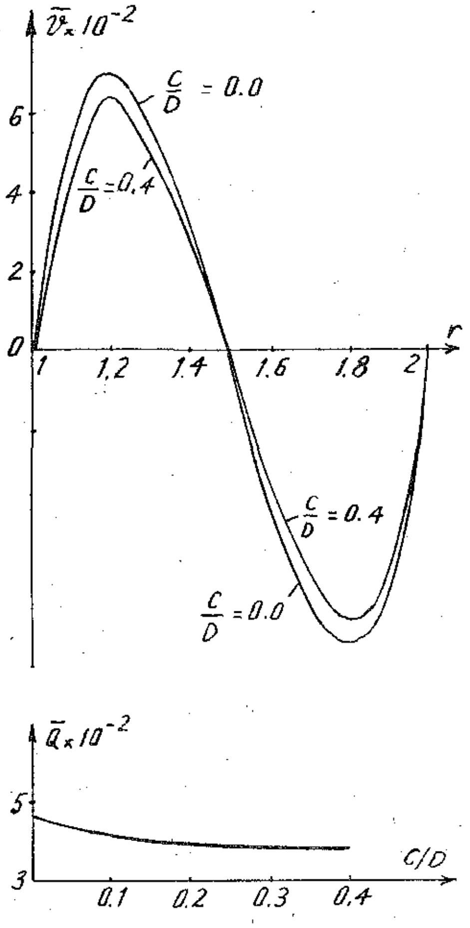
Trường hợp $D = 0$ ta có công thức tương tự:

$$\begin{aligned}
v(r) &= |C|^{1/n}\,\mathrm{sign}\,v^*(n, r) \\
Q &= |C|^{1+1/n}\,Q^*(n)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Kết quả tính toán cho thấy : với mỗi n cố định, khi (C/D) thay đổi từ $-\infty$ đến $+\infty$ lúc đầu $\overline{v}$ có 2 luồng (h.2 và h.3). Cùng với sự tăng (C/D) cường độ $\overline{v}$ giảm dần và đến giá trị $(C/D)_1$ nào đó (được xác định từ điều kiện $\overline{v}'(r_2) = 0$) luồng ở thành trong bắt đầu đi xuống. Lúc này xuất hiện 3 luồng : hai luồng đi xuống ở hai bên và luồng đi lên ở giữa. Nếu tiếp tục tăng (C/D) thì luồng ở thành ngoài thu hẹp dần và đến giá trị $(C/D)_2$ nào đó (được xác định từ điều kiện $\overline{v}'(r_3) = 0$) thì luồng này biến mất, khi đó chỉ còn hai luồng trong kênh: luồng đi xuống ở thành trong và đi lên ở thành ngoài. Cùng với sự tăng (C/D) hai luồng này tăng dần về cường độ. Các giá trị $(C/D)_1$, $(C/D)_2$ phụ thuộc vào n và r_2, r_3. Chẳng hạn với $n = 1$, $r_2 = 1$, $r_3 = 2$ thì $(C/D)_1 = 3,8$; $(C/D)_2 = 5,0$. Đối với trường hợp $D = 0$ thì v^* luôn có hai luồng : đi xuống ở thành trong và đi lên ở thành ngoài.



Hình 2. Trường hợp $n = 0,6$



Hình 3. Trường hợp $n = 2$

Dựa vào những nhận xét trên ta phân tích ảnh hưởng của các thông số bài toán (như nguồn nhiệt, kích thước hình học . . .) đến dòng đối lưu trong kênh.

Ta khảo sát một số trường hợp đơn giản với giả thiết $\lambda_t = \lambda_n = \lambda^*$; $s_t = s_n = s^*$.

+ Xét trường hợp không có nguồn nhiệt trong chất lỏng và trong thành : $s = s_t = s_n = 0$. Khi đó v, Q có dạng (3.2). Mặt khác từ (2.10) ta tính được

$C = (\theta_{no} - \theta_{t}o)/\ln\varphi$ với $\varphi = (r_2 r_4/r_1 r_3)^{1/\lambda^*}(r_3/r_2) > 1$

Công thức trên cho ta thấy: thứ nhất, khi ta đổi chỗ nhiệt độ θ_{to} và θ_{no} cho nhau thì dòng đối lưu giữ nguyên cường độ nhưng đổi chiều, thứ hai, đối lưu trong kênh sẽ tăng nếu độ chênh nhiệt độ $|\theta_{no} - \theta_{to}|$ tăng hoặc hệ số φ giảm (bề dày thành giảm hoặc độ dẫn nhiệt của thành so với chất lỏng tăng).

+ Trường hợp khi $s \neq 0$; $s^* \neq 0$ thì, dựa vào (2.10) và nhận xét ở trên ta thấy sự tăng s^* và $(\theta_{n0} - \theta_{t0})$ sẽ thúc đẩy sự đi xuống của chất lỏng ở thành trong và sự đi lên ở thành ngoài. Đối với các thông số khác như s, λ^*, r_i thì ảnh hưởng lên dòng đối lưu không đơn chiều mà phụ thuộc vào các thông số khác nữa.

4. KẾT LUẬN

Ở bài này chúng tôi đã mở rộng kết quả trong [3] sang trường hợp kênh trụ, có xét đến trường hợp đặc biệt khi chỉ có thành trụ ngoài. Đã chỉ ra rằng khi thông số bài toán thay đổi có thể xuất hiện 3 luồng trong kênh cũng như đổi sang chiều ngược lại.

Địa chỉ:
Trường Đại học Bách khoa HN

Nhận ngày 6/3/1990

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Шульман З. П. и др. Тепло - и массообмен при свободной конвекции в неньютоновских жидкостях. Изд. Наука и техника, Минск 1975.
2. Семакин И. Г. Стационарная конвекция неньютоновской жидкости в вертикальном слое. МЖГ, №4, 1972.
3. Ву Зуй Куанг, Шульман З. П. Сопряженная задача естественной конвекции неньютоновской жидкости в вертикальном канале. И. Ф. Ж, Минск, Т. XLIII, №5, 1982.

РЕЗЮМЕ

ЗАДАЧА О ЕСТЕСТВЕННОЙ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ ЖИДКОСТИ СО СТЕПЕННЫМ ЗАКОНОМ МЕЖДУ ДВУМЯ ВЕРТИКАЛЬНЫМИ ЦИЛИНДРАМИ

В данной статье рассмотрена сопряженная задача естественной тепловой конвекции неньютоновской жидкости со степенным законом в канале, ограниченном двумя вертикальными цилиндрами. Получены формулы для скорости и потока тепла. численные результаты вычислены на ЭВМ и изображены на графиках.