Tạp chí CƠ HỌC, tập XIII, 1991, số 1 (17 — 21)

VỀ MỘT BÀI TOÁN GYROSCOP CÓ TRỤC ĐỐI XỨNG ĐÀN HỒI

NGUYỄN THÀNH MẬU

Gyroscop có cấu trúc đàn hồi đã được nghiên cứu từ những năm 60 của thế kỷ này [1]. Phần lớn các tác giả đã xem xét bài toán bằng phương pháp tuyến tính hóa. Vì vậy chưa thể phát hiện hết các đặc tính của nó.

Năm 1970 L. B. Anperin [2] dùng phương pháp tiệm cận để xem xét một gyroscop không đối xứng có trục đàn hồi trên đế di động. Ông đã chỉ ra sự ảnh hưởng đáng kể của lực đàn hồi đến tốc độ tiến động của gyroscop nếu tính đến các số hạng bậc cao của tham số bé.

Trong bài này các tác giả sử dụng phương pháp tách chuyển động [5] để khảo sát một gyroscop cân bằng có trục đối xứng đàn hồi, trong giá các đăng trên đế bất động. Kết quả thu đư~~ chứa một lượng tiến động bổ xung cho kết quả của công trình [1].

Tác giả chỉ ra độ chính xác của các phương trình tiến động Islinski.

1. PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG

Giả sử gyroscop cân bằng, treo trong giá các đăng, ở các ổ trục chỉ có ma sát nhớt. Mô men tương ứng là:

$$L_{x_2} = -N_1\dot{\alpha}, \qquad L_{y_1} = -N_2\dot{\beta}$$

Trục đối xứng của rô to đàn hồi tuyến tính, mô men lực đàn hồi tương ứng với góc quay các khung là:

$$M_{x_2} = -L_1\alpha, \qquad L_{y_1} = -L_2\beta$$

Theo [3] khi $u = 0$, phương trình chuyển động của gyroscop có dạng:

$$[A_2 + (A_0 + A_1)\cos^2\beta + C_1\sin^2\beta]\frac{d^2\alpha}{dT^2} - (A_0 + A_1 - C_1)\frac{d\alpha}{dT}\frac{d\beta}{dT}\sin 2\beta +$$
$$+H\frac{d\beta}{dT}\cos\beta = -L_1\alpha - N_1\frac{d\alpha}{dT},$$
$$(A_0 + B_1)\frac{d^2\beta}{dT^2} + (A_0 + A_1 - C_1)\left(\frac{d\alpha}{dT}\right)^2\sin\beta\cos\beta -$$
$$-H\frac{d\beta}{dT}\cos\beta = -L_2\beta - N_2\frac{d\beta}{dT}. \qquad (1.1)$$

Điều kiện đầu của (1.1) chọn như sau:

$$\alpha(0) = \alpha_0; \quad \dot\alpha(0) = 0; \quad \beta 90) = 0; \quad \dot\beta(0) = 0.$$

Hạ bậc (1.1) để đưa nó về dạng côsi:

$$\frac{d\alpha}{dT} = \Omega_1; \quad \frac{d\beta}{dT} = \Omega_2,$$
$$[A_2 + (A_0 + A_1)\cos^2\beta + C_1\sin^2\beta]\frac{d\Omega_1}{dT} - (A_0 + A_1 - C_1)\Omega_1\Omega_2\sin 2\beta +$$
$$+H\Omega_2\cos\beta = -L_1\alpha - N_1\Omega_1, \qquad (1.2)$$
$$(A_0 + B_1)\frac{d\Omega_2}{dT} + (A_0 + A_1 - C_1)\Omega_1^2\frac{\sin 2\beta}{2} -$$
$$-H\Omega_2\cos\beta = -L_2\beta - N_2\Omega_2.$$

Chuẩn hóa hệ (1.2) , đổi biến số:

$$T = T_* t, \quad A_i = a_i I_*, \quad \alpha = \alpha_* x; \quad \beta = \beta_* y,$$
$$L_j = L_* l_j, \quad N_j = N_* n_j, \quad \Omega_j = \Omega_* \omega_j, \qquad (1.3)$$
$$B_i = I_* b_i, v.v.\ldots j = 1, 2, \quad i = 0, 1, 2$$

ở đó I_*, L_*, ... được chọn như sau:

$$I_* = \max(A_i, B_i), \quad L_* = \max(L_1, L_2),$$
$$N_* = \max(N_1, N_2), \quad \Omega_* = \max(\alpha_*, \beta_*)/T_*,$$

I_*, L_*, N_*, Ω_*, T_*, ... là các giá trị đặc trưng của các đại lượng tương ứng đối với một lớp các chuyển động mà ta khảo sát.

Thế (1.3) vào (1.2) được:

$$\frac{dx}{dt} = \omega_1; \quad \frac{dy}{dt} = \omega_2,$$
$$\mu[a_2 + (a_0 + a_1)\cos^2 y + c_1\sin^2 y]\frac{d\omega_1}{dt} - \mu(a_0 + a_1 - c_1)\omega_1\omega_2\sin 2y +$$
$$+\omega_2\cos y = -l_1 x - \chi n_1\omega_1, \qquad (1.4)$$
$$\mu(a_0 + b_1)\frac{d\omega_2}{dt} + \mu(a_0 + a_1 - c_1)\frac{\omega_1^2}{2}\sin 2y -$$
$$-\omega_1\cos y = -l_2 y - \chi n_2\omega_2,$$
$$x(0) = x_0; \quad y(0) = 0; \quad \dot x(0) = 0; \quad \dot y(0) = 0,$$

ở đây $T_0 = I_*/H$, $T_1 = H/L_*$, $\chi = N_*/H$.

Xét lớp chuyển động của gyroscop diễn ra trong khoảng thời gian T_1 lớn. Chọn :

$T_1 = T_*$, $\alpha_* = \beta_* = 1$, $T_0/T_1 = T_0/T_* = \mu \ll 1$

Dễ thấy rằng hệ (1.4) thỏa mãn các điều kiện của định lý Tikhônôv-Vaxili-eva. Xây dựng tiệm cận nghiệm cho (1.4).

Để đơn giản hóa việc tính toán, coi $l = l_1 = l_2$, $n = n_1 = n_2$, x, y' nhỏ.

2. XÂY DỰNG NGHIỆM TIỆM CẬN

a. NGHIỆM Ở NGOÀI LỚP BIÊN

Ở gần đúng bậc 0 theo μ ta có:

$$\begin{aligned}
&\frac{dx^{(0)}}{dt} = \omega_1^{(0)}; \quad \frac{dy^{(0)}}{dt} = \omega_2^{(0)}, \\
&\omega_2^{(0)} \cos y^{(0)} = -lx^{(0)} - n\chi\omega_1^{(0)}, \\
&-\omega_1^{(0)} \cos y^{(0)} = -ly^{(0)} - n\chi\omega_2^{(0)}.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Hệ (2.1) chính là hệ suy biến của (1.4) và nó cũng chính là hệ phương trình tiến động của phương trình vi phân chuyển động gyroscop. Như vậy hệ phương trình tiến động chính là phương trình gần đúng bậc không của lý thuyết tách chuyển động. Do đó độ chính xác của các phương trình tiến động phụ thuọc vào độ lớn của tham số bé μ. Nhưng $\mu = T_0/T = I_*L_*/H^2$. Vì vậy nếu I_* và L_* không lớn lắm thì μ sẽ rất nhỏ. Thông thường [4]:

$$H \sim 10^3 \div 10^6; \quad I_* \sim 2 \cdot 10 \div 8 \cdot 10; \quad l_* \sim 10^2 \div 10^4$$

Cho nên $\mu \sim 10^{-5}$. Vì vậy phương trình tiến động có thể dùng cho những tính toán mà độ chính xác đòi hỏi đến bậc 10^{-5}

Giải (2.1) bằng phương pháp tách chuyển động được:

$$\begin{aligned}
&x^{(0)}(t) = x_0 e^{-\omega_0 \chi n t} \cos \omega_0 t, \\
&y^{(0)}(t) = x_0 e^{-\omega_0 \chi n t} \sin \omega_0 t, \quad \omega_0 = \frac{l}{1 + n^2\chi^2},
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Ở gần đúng bậc 1 theo μ ta có:

$$\begin{aligned}
&\frac{dy^{(1)}}{dt} + lx^{(1)} + n\chi\frac{dx^{(1)}}{dt} = -(a_2 + a_0 + a_1)(-x_0\omega_0 n\chi \cos\omega_0 t - x_0\omega_0 \sin\omega_0 t)e^{-\omega_0 n\chi t}, \\
&n\chi\frac{dy^{(1)}}{dt} + ly^{(1)} - \frac{dx^{(1)}}{dt} = -(a_0 + b_1)(-x_0\omega_0 n\chi \sin\omega_0 t + x_0\omega - 0\cos\omega_0 t)e^{-\omega_0 n\chi t}.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Nghiệm của (2.3) dễ dàng thu được:

$$
\begin{aligned}
x^{(1)}(t) &= (a\chi n\cos\omega_0 t - b\sin\omega_0 t)\frac{x_0\omega_0 t}{2}e^{-\omega_0\chi nt} + \\
&+ (x_0 b\chi n\sin\omega_0 t\cos^2\omega_0 t + x_0 a\sin^2\omega_0 t\cos\omega_0 t - a\frac{x_0\chi n}{2}\sin^3\omega_0 t)e^{-\omega_0\chi nt}, \\
y^{(1)}(t) &= (a\chi n\sin\omega_0 t - a\cos\omega_0 t)\frac{x_0\omega_0 t}{2}e^{-\omega_0\chi nt} + \\
&+ (cx_0 b\chi n\sin^2\omega_0 t\cos\omega_0 t - \frac{bx_0}{2}\sin\omega_0 t\cos^2\omega_0 t + \frac{ax_0}{2}\sin^3\omega_0 t)e^{-\omega_0\chi nt}, \\
& a = a_2 + a_1 + 2a_0 + b_1; \quad b = a_2 + a_1 - b_1; \quad c = a_2 + a_1 + a_0.
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

b. NGHIỆM Ở TRONG LỚP BIÊN

Phương trình vi phân chuyển động ở trong lớp biên có dạng:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dx}{d\varepsilon} = \mu\omega_1; \quad \frac{dy}{d\varepsilon} = \mu\omega_2; \quad \mu\varepsilon = t, \\
&[a_2 + (a_1 + a_0)\cos^2 y + c_1\sin^2 y]\frac{d\omega_1}{d\varepsilon} - \mu(a_1 + a_0 + c_1)\omega_1\omega_2\sin 2y + \\
&\qquad + \omega_2\cos 2y = -lx - n\chi\omega_1, \\
&(a_0 + b_1)\frac{d\omega_2}{d\varepsilon} + \mu(a_0 + b_1 - c_1)\omega_1^2\frac{\sin 2y}{2} - \omega_1\cos y = -ly - n\chi\omega_2,
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

Ở gần đúng bậc 0 theo μ có:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dx^{(0)}}{d\varepsilon} = 0; \quad \frac{dy^{(0)}}{d\varepsilon} = 0, \\
&[a_2 + (a_1 + a_0)\cos^2 y^{(0)} + c_1\sin^2 y^{(0)}]\frac{d\omega_1^{(0)}}{dt} + \omega_2^{(0)}\cos y^{(0)} = -lx^{(0)} - n\chi\omega_1^{(0)}, \\
&(a_0 + b_1)\frac{d\omega_2^{(0)}}{dt} - \omega_1^{(0)}\cos y^{(0)} = -ly^{(0)} - n\chi\omega_2^{(0)}.
\end{aligned} \tag{2.6}
$$

Điều kiện đầu của hai phương trình đầu của hệ (2.6) theo [5] là:

$$
x^{(0)}(\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} = 0; \qquad y^{(0)}(\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} = 0.
$$

Vì vậy $x^{(0)}(\varepsilon) = 0$, $y^{(0)}(\varepsilon) = 0$.

Ở gần đúng bậc 1 theo μ được:

$$
\frac{dx^{(0)}}{d\varepsilon} = \omega_1^{(0)}; \qquad \frac{dy^{(0)}}{d\varepsilon} = \omega_2^{(0)}, \tag{2.7}
$$

ở đó $\omega_1^{(0)}(\varepsilon)$ và $\omega_2^{(0)}(\varepsilon)$ xác định bằng (2.6) dễ thấy $x^{(0)}(\varepsilon)$, $y^{(0)}(\varepsilon)$ là tổng của các hàm sin và cosin nhân với hàm $\exp(-t/\mu)$. Nói cách khác $x^{(0)}(\varepsilon)$, $y^{(0)}(\varepsilon)$. là một dao động điều hòa tắt dần. Độ tắt dần $\sim 1/\mu$. Vì vậy các dao động này khi $\mu \to 0$ sẽ nhanh chóng bị dập tắt.

Tóm lại nghiệm của phương trình vi phân chuyển động gyroscop (1.4) có dạng:

$$
\begin{aligned}
x(t,\mu) =&\{x_0 \cos\omega_0 t + \mu[(an\chi\cos\omega_0 t - b\sin\omega_0 t)\frac{x_0\omega_0}{2}t+ \\
&+\frac{bx_0\chi n}{2}\sin 2\omega_0 t\cos\omega_0 t + ax_0\sin^2\omega_0 t\cos\omega_0 t - \frac{a}{2}x_0\chi n\sin^3\omega_0 t]\}e^{-\omega_0\chi nt}, \\
y(t,\mu) =&\{x_0 \sin\omega_0 t + \mu[(an\chi\sin\omega_0 t - a\cos\omega_0 t)\frac{x_0\omega_0}{2}t+ \\
&+cx_0\chi n\sin^2\omega_0 t\cos\omega_0 t - \frac{bx_0}{2}\sin\omega_0 t\cos^2\omega_0 t + \frac{ax_0}{2}\sin^3\omega_0 t]\}e^{-\omega_0\chi nt},
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

Nhận xét

+ Phương trình tiến động có độ chính xác bậc μ.

+ Nếu $\mu = 0$, ℓ nhỏ gyroscop chuyển động giống như gyroscop nặng. Kết quả này Magnus [1] đã thu được bằng phương pháp tuyến tính hóa các phương trình vi phân chuyển động.

+ Nếu $\mu \neq 0$, gyroscop có thêm một tiến động hệ thống phụ thuộc tường ở thời gian. Nếu chỉ khảo sát phương trình vi phân chuyển động ở dạng tuyến tính hoặc trong khuôn khổ của lý thuyết tiến động thì không phát hiện được tiến động này.

Khi $t \to \infty$ thì lượng bổ xung này không được bỏ qua.

Tác giả chân thành cảm ơn giáo sư tiến sĩ Phạm Huyễn, tiến sĩ Nguyễn Văn Khang đã đóng góp nhiều ý kiến qúy báu và giúp đỡ tác giả hoàn chỉnh bài báo này.

Địa chỉ:
Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 1.

Nhận ngày 3/8/1990

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Магнус К. Результаты и задачи общей теории гироскопов стр. 20 Проблемы гироскопии. Мир, 1967.
2. Альперин Л. Б. Уравнение движения не вполне симметричного гироскопа с гибкой осью, установленного на подвижном основании с учётом рассеяния анергии. Сбр. науч. труд. Новосибир. электротех инс. вып. 2, 1970.
3. Ишлинскии А. Ю. Лекции по теории гироскопов МГУ 1982.
4. Ройтенберг Я. Н. Гироскопы. М. 1972.
5. Новожилов И. В. Методы разделения движении. Конспект лекции М. Э. Й. 1981.

РЕЗЮМЕ

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ГИРОСКОПА С ГИБКОЙ СИММЕТРИЧНОЙ ОСЬЮ

В данной работе рассматривается движение астатического гироскопа в кардановом подвесе с гибкой осью на неподвижном основании. Введением безразмерных величин, система уравнении движения приведена к стандартной форме, для которой можно исследовать методом разделения движении. Выведен систематический уход, который зависит явно от времени.