Tạp chí CƠ HỌC, tập XIII, 1991, số 1 (9 — 16)

TẦN SỐ RIÊNG CỦA DÂY MANG KHỐI LƯỢNG TẬP TRUNG

NGUYỄN VĂN ĐÌNH

ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong lý thuyết dao động, hàm Đirắc được sử dụng để biểu diễn các yếu tố tập trung (khối lượng, lực đàn hồi). Khi đó, dạng dao động riêng của hệ được khai triển thành chuỗi vô hạn theo các dạng dao động riêng của hệ tương ứng không yếu tố tập trung và phương trình tần số riêng được suy ra từ điều kiện không đồng thời triệt tiêu của các đại lượng thể hiện di chuyển trong dao động riêng của các điểm tại đó đặt các yếu tố tập trung. Một thí dụ về vấn đề này có thể tìm thấy trong [1], trang 319 - 329. Tuy nhiên, phương trình tần số riêng lập ra chỉ cho những tần số riêng không trùng với tần số riêng của hệ tương ứng không yếu tố tập trung. Nhận xét này được minh họa dưới đây qua thí dụ về dây mang khối lượng tập trung.

1. HỆ PHƯƠNG TRÌNH XÁC ĐỊNH DẠNG DAO ĐỘNG RIÊNG

Khảo sát dây mềm $OA = \ell$, đồng chất, khối lượng đơn vị dài μ, căng theo trục Ox nằm ngang với sức căng k và mang N khối lượng m_i tập trung trên dây tại các vị trí có hoành độ $x_i (i = 1, 2, \ldots, N; 0 < x_i < \ell)$. Phương trình vi phân đạo hàm riêng mô tả dao động riêng là:

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - k \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \delta(x - x_i) = 0 \tag{1.1}$$

với các điều kiện biên:

$$y(x,t)\big|_{x=0,\ell} = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\bigg|_{x=0,\ell} = 0 \tag{1.2}$$

trong đó: $\delta(x - x_i)$ hàm Đirắc; $y(x,t)$ di chuyển của phần tử của dây có hoành độ x.

Theo phương pháp phân ly biến [2], đặt $y(x,t) = Y(x)T(t)$ chúng ta lập được phương trình vi phân thường xác định dạng dao động riêng $Y(x)$:

$$k \frac{d^2 Y}{dx^2} + \omega^2 \Big[\mu + \sum_{i=1}^{N} m_i \delta(x - x_i)\Big] Y = 0 \tag{1.3}$$

với các điều kiện:

$$Y(x)|_{x=0,\ell} = \left.\frac{d^2Y(x)}{dx^2}\right|_{x=0,\ell} = 0 \tag{1.4}$$

trong đó : ω - tần số riêng cần tìm.

Dạng dao động riêng được tìm ở dạng chuỗi vô hạn:

$$Y(x) = \frac{2}{\ell}\sum_{s=1}^{\infty} \overline{Y}(s)\sin\frac{s\pi}{\ell}x \quad \text{với} \quad \overline{Y}(s) = \int_0^\ell Y(x)\sin\frac{s\pi}{\ell}x dx \tag{1.5}$$

Nhân hai vế của (1.3) với $\sin\frac{s\pi}{\ell}xdx$ rồi thực hiện tích phân từ 0 đến ℓ, chúng ta được hệ vô hạn phương trình xác định các hệ số $\overline{Y}(s)$ $(s = 1, 2, \dots)$

$$\left[k\left(\frac{s\pi}{\ell}\right)^2 - \mu\omega^2\right]\overline{Y}(s) = \omega^2\sum_{i=1}^{N} m_i \sin\frac{s\pi}{\ell}x_i \cdot Y(x_i) \tag{1.6}$$

2. VỀ MỘT PHƯƠNG TRÌNH TẦN SỐ RIÊNG

Theo [1], từ (1.6) rút ra:

$$\overline{Y}(s) = \frac{\omega^2}{k\left(\frac{s\pi}{\ell}\right)^2 - \mu\omega^2}\sum_{i=1}^{N} m_i \sin\frac{s\pi}{\ell}x_i \cdot Y(x_i) \tag{2.1}$$

Biểu thức (1.5) của dạng dao động riêng trở thành:

$$Y(x) = \frac{2}{\ell}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\omega^2}{k\left(\frac{s\pi}{\ell}\right)^2 - \mu\omega^2}\sin\frac{s\pi}{\ell}x \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \sin\frac{s\pi}{\ell}x_i \cdot Y(x_i) \tag{2.2}$$

Lần lượt thay x bởi $x_j (j = 1, 2, \dots, N)$, hệ thức (2.2) dẫn đến N phương trình bậc nhất đẳng cấp đối với $Y(x_i)$

$$\sum_{i=1}^{N}\left(A_{ij} - \delta_{ij}\right)Y(x_i) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, N) \tag{2.3}$$

trong đó:

$$A_{ij} = \sum_{s=1}^{\infty}\frac{2}{\ell}\frac{m_i\omega^2}{k\left(\frac{s\pi}{\ell}\right)^2 - \mu\omega^2}\sin\frac{s\pi}{\ell}x_i \sin\frac{s\pi}{\ell}x_j \tag{2.4}$$

Để hệ (2.3) có nghiệm không tầm thường, định thức của hệ phải triệt tiêu và cho chúng ta phương trình tần số:

$$|A_{ij} - \delta_{ij}| = 0 \tag{2.5}$$

Dễ dàng nhận thấy phương trình (2.5) được lập ra với giả thiết:

$$k\left(\frac{s\pi}{\ell}\right)^2 - \mu\omega^2 \neq 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots) \tag{2.6}$$

Những giá trị ω làm triệt tiêu vế trái của một trong các hệ thức (2.6) là những tần số riêng của dây trơn (không khối lượng tập trung). Vì vậy, phương trình (2.5) chỉ cho những tần số riêng không trùng với tần số riêng nào của dây trơn.

Mặt khác, phương trình (2.5) được suy ra từ điều kiện không đồng thời triệt tiêu của các đại lượng $Y(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ nghĩa là từ điều kiện có khối lượng tập trung tham gia dao động. Nhưng cũng chỉ với giả thiết (2.6) thì điều kiện đó mới tương đương với điều kiện dao động riêng $Y(x) \not\equiv 0$.

Thực vậy, nếu $Y(x_i) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ theo (2.2), hiển nhiên $Y(x) \equiv 0$. Ngược lại, nếu $Y(x) \equiv 0$, cũng từ (2.2), với chú ý rằng hệ hàm $\sin \frac{s\pi}{\ell} x$ tạo thành hệ cơ sở thỏa mãn (1.4), đủ, trực giao, suy ra hệ vô hạn phương trình bậc nhất đẳng cấp đối với $Y(x)$:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \sin \lambda_i \cdot Y(x_i) = 0, \quad 0 < \lambda_i = \frac{\pi x_i}{\ell} < \pi \tag{2.7}$$

Xét N phương trình đầu với định thức - sai kém thừa số hằng

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin \lambda_1 & \sin \lambda_2 & \ldots & \sin \lambda_N \\ \sin 2\lambda_1 & \sin 2\lambda_2 & \ldots & \sin 2\lambda_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin N\lambda_1 & \sin N\lambda_2 & \ldots & \sin N\lambda_N \end{vmatrix} \tag{2.8}$$

Nếu $\Delta = 0$ thì tồn tại hệ thức bậc nhất giữa các dòng nghĩa là tồn tại hàm:

$$f(\xi) = \sum_{j=1}^{N} a_j \sin j\xi \tag{2.9}$$

với hệ số $a_j (j = 1, 2, \ldots, N)$ không đồng thời triệt tiêu mà có $(N+2)$ nghiệm trong khoảng $[0, \pi]$ là $0, \lambda_i (i = 1, 2, \ldots, N), \pi$. Khi đó, dễ dàng thấy đạo hàm cấp $4M$ của hàm (2.9) nghĩa là hàm :

$$f^{(4M)}(\xi) = \sum_{j=1}^{N} a_j (j)^{4M} \sin j\xi \tag{2.10}$$

cũng có tính chất đó.

Giả thử $a_p \sin p\xi$ là số hạng có hệ số $a_p \neq 0$ với chỉ số p cao nhất. Khi M đủ lớn thì:

$$\left| a_p (p)^{4M} \right| \gg \left| \sum_{j=1}^{p-1} a_j (j)^{4M} \sin j\xi \right| \tag{2.11}$$

Vì vậy, các nghiệm của hàm $f^{(4m)}(\xi)$ phải thuộc lân cận các nghiệm của số hạng $a_p(p)^{4M} \sin p\xi$

Mặt khác, trong mỗi lân cận đó, nếu so sánh trị tuyệt đối của đạo hàm của số hạng cuối nói trên và của tổng của $(p-1)$ số hạng còn lại, chúng ta cũng có:

$$\left| a_p (p)^{4M+1} \cos p\xi \right| \gg \left| \sum_{j=1}^{p-1} a_j (j)^{4M+1} \cos j\xi \right| \tag{2.12}$$

Như thế, trong mỗi lân cận nói trên, nếu hàm $f^{(4m)}(\xi)$ có nghiệm thì chỉ có nghiệm đơn.

Nhưng số hạng $a_p(p)^{4M}\sin p\xi$ chỉ có $(p+1)$ nghiệm trong khoảng $[0,\pi]$ nên hàm $f^{(4M)}(\xi)$ không thể có quá $p+1 \leq N+1 < N+2$ nghiệm trong khoảng đó. Mâu thuẫn này chứng tỏ $\Delta \neq 0$, hệ N phương trình đầu và do đó toàn hệ (2.7) chỉ có nghiệm tầm thường $Y(x_i) = 0 (i = 1, 2, \ldots, N)$. Đó là điều cần chứng minh.

3. ĐIỀU KIỆN TRÙNG TẦN SỐ

Những nhận xét trên cho thấy cần xét trường hợp trùng tần số giữa dây có khối lượng tập trung và dây trơn (không khối lượng tập trung).

Giả sử tần số riêng thứ s_* của dây trơn nghĩa là giá trị ω_* xác định bởi hệ thức :

$$k\Big(\frac{s_*\pi}{\ell}\Big)^2 - \mu\omega_*^2 = 0 \tag{3.1}$$

cũng là tần số riêng của dây mang khối lượng tập trung.

Từ (1.6) với $s = s_*$, $\omega = \omega_*$ suy ra:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \sin\frac{s_*\pi}{\ell}x_i \cdot Y(x_i) = 0, \qquad \overline{Y}(s_*) \quad \text{tùy ý} \tag{3.2}$$

Với những giá trị khác của s, hệ số $\overline{Y}(s)$ vẫn có biểu thức (2.1) với $\omega = \omega_*$.

Dạng dao động riêng tương ứng tần số ω_* có biểu thức:

$$Y(x) = \frac{2}{\ell}\sum_{\substack{s=1\\ s\neq s_*}} \frac{\omega_*^2}{k\big(\frac{s\pi}{\ell}\big)^2 - \mu\omega_*^2}\sin\frac{s\pi}{\ell}x \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \sin\frac{s\pi}{\ell}x_i Y(x_i) + \frac{2}{\ell}\overline{Y}(s_*)\sin\frac{s_*\pi}{\ell}x \tag{3.3}$$

Trên cùng cơ sở đã nêu ở cuối mục 2, điều kiện để $Y(x) \not\equiv 0$ là các đại lượng $Y(x_i) (i = 1, 2, \ldots, N)$, $\overline{Y}(s_*)$ không đồng thời triệt tiêu. Các đại lượng này thỏa mãn hệ $(N+1)$ phương trình bậc nhất đẳng cấp gồm N phương trình có được từ (3.3) khi lần lượt thay x bởi x_j $(j = 1, 2, \ldots, N)$ và phương trình (3.2).

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{N}\Big[\sum_{\substack{s=1\\ s\neq s_*}}^{\infty} \frac{2}{\ell}\frac{m_i - \omega_*^2}{k\big(\frac{s\pi}{\ell}\big)^2 - \mu\omega_*^2}\sin\frac{s\pi}{\ell}x_i \sin\frac{s\pi}{\ell}x_j - \delta_{ij}\Big]Y(x_i) + \frac{2}{\ell}\sin\frac{s_*\pi}{\ell}x_j \cdot \overline{Y}(s_*) = 0\\ \sum_{i=1}^{N} m_i \sin\frac{s_*\pi}{\ell}x_i \cdot Y(x_i) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, N)\end{gathered} \tag{3.4}$$

Vì $Y(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$, $\overline{Y}(s_*)$ không đồng thời triệt tiêu nên định thức của hệ (3.4) phải triệt tiêu. Sau khi thay ω_* bởi biểu thức của nó rút từ (3.1) và giản ước thừa số hằng, chúng ta được:

$$\begin{vmatrix} A_{ij}^* - \delta_{ij}\dfrac{\mu\ell}{2m_i} & \sin\dfrac{s_*\pi}{\ell}x_j \\ \sin\dfrac{s_*\pi}{\ell}x_i & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{3.5}$$

trong đó:

$$A_{ij} = \sum_{\substack{s=1 \\ s\neq s_*}} \frac{s_*^2}{s^2 - s_*^2} \sin\frac{s\pi}{\ell}x_i \sin\frac{s\pi}{\ell}x_j \tag{3.6}$$

Đây là phương trình xác định những giá trị s_* tương ứng tần số riêng ω_* chung cho dây mang khối lượng tập trung và dây trơn.

4. TRƯỜNG HỢP KHỐI LƯỢNG TẬP TRUNG TẠI NÚT

Xét trường hợp khi các hoành độ x_i khả ước với chiều dài ℓ nghĩa là khi có thể viết $x_i = p_i\ell/q_i(p_i, q_i \in N$, vô ước). Gọi q là bội số chung bé nhất của các mẫu số q_i, có thể viết $x_i = k_i\ell/q$. Dễ dàng nhận thấy, ở trường hợp này, tất cả các khối lượng tập trung đều đặt tại các nút của các dao động riêng thứ rq $(r = 1, 2, \dots)$ của dây trơn.

Hiển nhiên, phương trình (3.5) có các nghiệm $s_* = rq$ vì các yếu tố ở cột và dòng cuối của định thức ở vế trái (3.5) đều bằng không.

Mặt khác, chúng ta có:

$$A_{ij}^* = r^2q^2 \sum_{\substack{s=1 \\ s\neq rq}} \frac{1}{s^2 - r^2q^2} \sin\frac{s}{q}k_i\pi \sin\frac{s}{q}k_j\pi = \frac{rq}{2} \sum_{\substack{s=1 \\ s\neq rq}} \left(\frac{1}{s - rq} - \frac{1}{s + rq}\right) \sin\frac{s}{q}k_i\pi \sin\frac{s}{q}k_j\pi \tag{4.1}$$

Chú ý rằng hai số hạng

$$-\frac{1}{s + rq} \sin\frac{s}{q}k_i\pi \sin\frac{s}{q}k_j\pi \quad \text{và} \quad \frac{1}{(s + 2rq) - rq} \sin\frac{s + 2rq}{q}k_i\pi \sin\frac{s + 2rq}{q}k_j\pi \tag{4.2}$$

đối nhau nên trong tổng vô hạn ở (4.1) chỉ còn lại $2(rq - 1)$ số hạng

$$\begin{aligned} A_{ij}^* = \frac{rq}{2}\Big\{ & \frac{1}{1 - rq} \sin k_i\frac{\pi}{q} \sin k_j\frac{\pi}{q} + \frac{1}{2 - rq} \sin\frac{2}{q}k_i\pi \sin\frac{2}{q}k_j\pi + \dots + \\ & + \frac{1}{(rq - 1) - rq} \sin\frac{rq - 1}{q}k_i\pi \sin\frac{rq - 1}{q}k_j\pi + \\ & + \frac{1}{(rq + 1) - rq} \sin\frac{rq + 1}{q}k_i\pi \sin\frac{rq + 1}{q}k_j\pi + \\ & + \frac{1}{(rq + 2) - rq} \sin\frac{rq + 2}{q}k_i\pi \sin\frac{rq + 2}{q}k_j\pi + \dots + \\ & + \frac{1}{(2rq - 1) - rq} \sin\frac{2rq - 1}{q}k_i\pi \sin\frac{2rq - 1}{q}k_j\pi \Big\} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Những số hạng này cũng đôi một khử nhau nên $A_{ij}^* = 0$ và định thức ở vế trái (3.5) có dạng đơn giản:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} \tag{4.4}$$

Điều này chứng tỏ hệ phương trình (3.4) chỉ có họ nghiệm:

$$Y(x_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N), \qquad \overline{Y}(s_*) \quad \text{tùy ý} \tag{4.5}$$

và do đó dạng dao động riêng tương ứng tần số riêng $\omega_* = \dfrac{rq}{\ell}\pi\sqrt{\dfrac{k}{\mu}}$ là:

$$Y(x) = \frac{2}{\ell}\overline{Y}(s_*) \sin \frac{rq}{\ell}\pi x \tag{4.6}$$

trùng với dạng dao động riêng thứ rq của dây trơn; các khối lượng tập trung nằm tại nút nên không dao động.

Ngoài ra còn có thể có các nghiệm $s_* \neq rq$ nghĩa là còn có thể có những tần số riêng khác trùng với tần số riêng của dây trơn; khi đó có khối lượng tập trung tham gia dao động riêng.

5. THÍ DỤ

Để minh họa những điều vừa trình bày, chúng ta xét trường hợp có một khối lượng tập trung m đặt tại trung điểm của dây $x_i = \ell/2$

Phương trình (2.5) cho các tần số riêng không trùng với tần số riêng của dây trơn là:

$$\frac{2m}{\ell} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\omega^2}{k\left(\frac{s\pi}{\ell}\right)^2 - \mu\omega^2} - 1 = 0 \tag{5.1}$$

Phương trình (3.5) xác định các giá trị s_* tương ứng trùng với tần số riêng thứ s_* của dây trơn là:

$$\begin{vmatrix} \displaystyle\sum_{\substack{s=1 \\ s\neq s_*}} \frac{s_*}{s^2 - s_*^2} \sin^2 \frac{s\pi}{2} - \frac{\mu\ell}{2m} & \sin \dfrac{s_*\pi}{2} \\ \sin \dfrac{s_*\pi}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\sin^2 \frac{s_*\pi}{2} = 0 \tag{5.2}$$

Rút ra $s_* = 2, 4, 6, \dots$ Nghĩa là các tần số riêng bậc chẵn của dây trơn cũng là tần số riêng của dây mang khối lượng tập trung. Khi đó, định thức nằm ở vế trái (5.2) chỉ có một yếu tố nằm ở dòng một cột một là khác không và bằng: $(-\mu\ell/2m)$. Vậy

$$Y(x_1) = Y\left(\frac{\ell}{2}\right) = 0 \quad \text{và} \quad Y(x) = \sin \frac{s_*\pi}{2}x \quad \left(\text{chọn } \frac{2}{\ell}\overline{Y}(s_*) = 1\right) \tag{5.3}$$

Trường hợp có hai khối lượng tập trung $m_1 = m_2 = m$ đặt tại các vị trí $x_1 = \ell/3$, $x_2 = 2\ell/3$, phương trình (2.5) là:

$$\begin{vmatrix} A_{11} - 1 & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - 1 \end{vmatrix} = 0$$

trong đó

$$
\begin{aligned}
A_{11} &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2}{\ell} \frac{m\omega^2}{k(\frac{s\pi}{\ell})^2 - \mu\omega^2} \sin^2 \frac{s\pi}{3} \\
A_{22} &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2}{\ell} \frac{m\omega^2}{k(\frac{s\pi}{\ell})^2 - \mu\omega^2} \sin^2 \frac{2s\pi}{3} \\
A_{12} = A_{21} &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2}{\ell} \frac{m\omega^2}{k(\frac{s\pi}{\ell})^2 - \mu\omega^2} \sin \frac{s\pi}{3} \sin \frac{2s\pi}{3}
\end{aligned} \tag{5.4}
$$

Phương trình (3.5) là:

$$
\begin{vmatrix}
A_{11}^* - \frac{\mu\ell}{2m} & A_{12}^* & \sin \frac{s_*\pi}{3} \\
A_{21}^* & A_{22}^* - \frac{\mu\ell}{2m} & \sin \frac{2s_*\pi}{3} \\
\sin \frac{s_*\pi}{3} & \sin \frac{2s_*\pi}{3} & 0
\end{vmatrix} = 0 \tag{5.5}
$$

trong đó

$$
\begin{aligned}
A_{11}^* &= \sum_{\substack{s=1 \\ s\neq s_*}}^{\infty} \frac{s_*^2}{s^2 - s_*^2} \sin^2 \frac{s\pi}{3} = \sum_{\substack{s=1 \\ s\neq s_*}}^{\infty} \frac{s_*^2}{s^2 - s_*^2} \sin^2 \frac{2s\pi}{3} = A_{22}^* \\
A_{12}^* = A_{21}^* &= \sum_{\substack{s=1 \\ s\neq s_*}}^{\infty} \frac{s_*^2}{s^2 - s_*^2} \sin \frac{s\pi}{3} \sin \frac{2s\pi}{3}
\end{aligned} \tag{5.6}
$$

Các yếu tố của cột và dòng cuối triệt tiêu khi $s_* = 3, 6, 9, \ldots$ nghĩa là các tần số riêng bậc bội ba của dây trơn cũng là tần số riêng của dây mang khối lượng tập trung; trong các dạng dao động riêng này, các khối lượng tập trung nằm tại nút.

Phương trình (5.5) còn có thể có các nghiệm s_* khác. Xét giá trị $s_* = 1$. Các yếu tố của cột và dòng cuối đều bằng $\sqrt{3/2}$ và :

$$
\begin{aligned}
A_{11}^* = A_{22}^* &= \sum_{s=2}^{\infty} \frac{1}{s^2 - 1} \sin^2 \frac{s\pi}{3} = \\
&= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2^2 - 1} + \frac{1}{4^2 - 1} - \frac{1}{5^2 - 1} - \frac{1}{7^2 - 1} + \ldots\right) > 0 \\
A_{12}^* = A_{21}^* &= \sum_{s=2}^{\infty} \frac{1}{s^2 - 1} \sin \frac{s\pi}{3} \sin \frac{2s\pi}{3} = \\
&= \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2^2 - 1} - \frac{1}{4^2 - 1} + \frac{1}{5^2 - 1} + \frac{1}{7^2 - 1} - \ldots\right) < 0
\end{aligned} \tag{5.7}
$$

Vì vậy, với μ, ℓ cho trước, có thể chọn m đủ nhỏ để:

$$
A_{11}^* - \frac{\mu\ell}{2m} = A_{12}^* = A_{21}^* = A_{22}^* - \frac{\mu\ell}{2m} \tag{5.8}
$$

Khi đó, hai dòng đầu của định thức ở vế trái (5.5) đồng nhất nên phương trình (5.5) thỏa mãn. Như thế, tần số riêng thứ nhất của dây trơn cũng là tần số riêng của dây mang khối lượng tập trung. Trong dạng dao động riêng này, hai khối lượng tập trung tham gia dao động, cùng biên độ nhưng nghịch pha và trong khai triển của dạng dao động riêng không chứa ácmônic thứ nhất. Tần số riêng thứ nhất này của dây trơn là tần số riêng thứ hai của dây mang khối lượng tập trung vì có một nút.

KẾT LUẬN

Để kết luận, chúng ta chú ý thêm rằng hiện tượng trùng tần số xảy ra ở nhiều hệ khác và khi dùng hàm Đirắc để biểu diễn các yếu tố tập trung, việc thiết lập một phương trình tần số riêng duy nhất cho đầy đủ các tần số riêng còn gặp khó khăn.

Địa chỉ:
Viện Cơ Viện KHVN

Nhận ngày 14/2/1990

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И. Асимптотические решения уравнений в частных производных. Издательство Издательского объединения "Вища школа" Киев, 1976.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. Государственное издательство, Москва, 1972.

РЕЗЮМЕ

СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ СТРУНЫ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ МАССАМИ

В данной статье, по предложенному в [1] методу установлено частотное уравнение струны с сосредоточенными массами. Заметим, что при решении вышеуказанного уравнения неопределены те частоты, которые являются общими в обеих случаях: без масс и с сосредточенными массами у струны.