Tạp chí CƠ HỌC, tập XIV, 1992, số 4 (19 — 26)

MÔ PHỎNG QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN DỪNG, KHÁC CHUẨN

NGUYỄN CAO MỆNH, TRẦN DƯƠNG TRÍ

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Việc mô phỏng quá trình ngẫu nhiên dừng theo các hàm mật độ phổ và mật độ phân bố xác suất đã được biết đến nhiều, chẳng hạn trong [3, 4, 7]... Đặc biệt trong [3] các công thức mô phỏng dựa trên khai triển Fourier rời rạc và biến đổi Fourier nhanh (FFT) [5] đã tỏ ra hơn hẳn các phương pháp khác về thời gian tính trên IBM-PC. Tuy vậy việc mô phỏng quá trình dừng có mật độ phân bố xác suất khác chuẩn chưa được xét đến nhiều, mặc dù chúng thường gặp trong thực tế. Chẳng hạn quá trình Rayleigh [2], quá trình Makxvell [5]...

Trong bài này chúng tôi đưa ra một cách giải quyết vấn đề trên theo quan điểm xấp xỉ hàm trong không gian các hàm bình phương khả tích L_2. Chương trình tính và đồ thị minh họa cho một thí dụ cụ thể được thực hiện trên PC nhờ ngôn ngữ TURBO-PASCAL.

2. MÔ PHỎNG QUÁ TRÌNH DỪNG, KHÁC CHUẨN

Bài toán: Hãy mô phỏng quá trình ngẫu nhiên dừng có hàm mật độ phổ $S_x(\omega)$ và hàm mật độ phân bố xác suất $f_x(x)$ cho trước.

Khi $f_x(x)$ là chuẩn bài toán đã được giải, vì vậy có thể giả thiết rằng: việc tạo ra các thể hiện của quá trình dừng, chuẩn có mật độ phổ cho trước luôn thực hiện được.

Giữa các hàm $S_x(\omega)$ và $f_x(x)$ cần có điều kiện sau:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f_x(x) dx = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega \tag{2.1}$$

2.1. Phát biểu một phương pháp mô phỏng

Giả sử quá trình ngẫu nhiên dừng $\{x(t)\}$ có các hàm mật độ phổ $S_x(x)$ và mật độ xác suất $f_x(x)$ cho trước. Khi đó công thức mô phỏng được chọn là:

$$x(t) = \eta(t) + \sigma a \cos(\omega_0 t + \varphi) + m_x \tag{2.2}$$

ở đây:

* $\eta(t)$ là quá trình dừng, chuẩn có:

$$\langle \eta(t) \rangle = 0, \qquad S_\eta(\omega) = S_x(\omega) \tag{2.3}$$

* $m_x = \langle x(t) \rangle$ là kỳ vọng của $\{x(t)\}$

* tham số a được chọn từ:

- trường hợp 1:
Nếu $f_x(x) \neq 0$ khi $x < 0$ và

$$V = 3\sigma^4 - \mu_4 \geq 0 \tag{2.4}$$

thì:

$$a = \frac{1}{\pi\sigma^2}\sqrt{5V/2} \tag{2.5}$$

- trường hợp 2:
Nếu $f_x(x) = 0$ khi $x < 0$ và

$$V = 32\mu_3\sigma + 15\sqrt{\pi}(3\sigma^4 - \mu_4) \geq 0 \tag{2.6}$$

thì

$$a = \frac{1}{\pi\sigma^2}\sqrt{\frac{V}{6\sqrt{\pi}}} \tag{2.7}$$

trong đó:

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k f_x(x)dx$$

* ω_0 là tham số tùy ý nằm ngoài miền xác định của hàm $S_x(\omega)$, tức là:
Nếu $S_x(\Omega)$, $\forall\omega \in [-B, B] = D_s (|B| < \infty)$ thì $\omega_0 \notin D_s$
* φ là đại lượng ngẫu nhiên có phân bố đều trên đoạn có độ dài 2π chẳng hạn $[0, 2\pi]$.

2.2. Chứng minh:

Ta có các nhận xét sau đây được suy trực tiếp từ định nghĩa:

Nhận xét 1:

Giả sử quá trình ngẫu nhiên dừng $\{x(t)\}$ có kỳ vọng m_x, phương sai $(\sigma_x)^2$, các hàm mật độ phân bố xác suất $f_x(x)$ và mật độ phổ $S_x(\omega)$. Khi đó quá trình ngẫu nhiên sau:

$$y(t) = \frac{x(t) - m_x}{\sigma_x} \tag{2.8}$$

cũng là quá trình dừng thỏa mãn:

$$m_x = 0, \quad S_y(\omega) = \frac{S_x(\omega)}{(\sigma_x)^2} \tag{2.9}$$

$$f_y(y) = \sigma_x f_x(\sigma_x y + m_x) \tag{2.10}$$

và nếu gọi μ_{ky}, μ_{kx} tương ứng là các mô men trung tâm bậc k của các quá trình $\{y(t)\}$, $\{x(t)\}$ thì ta có:

$$\mu_{ky} = \frac{\mu_{kx}}{(\sigma_x)^k} \tag{2.11}$$

Từ (2.8) :

$$x(t) = \sigma_x y(t) + m_x \tag{2.12}$$

và khi $\{y(t)\}$ có hàm mật độ xác suất (2.10) thì $\{x(t)\}$ ở (2.12) có hàm mật độ xác suất cho trước $f_x(x)$.

Nhận xét 2:

Quá trình ngẫu nhiên sau [12]:

$$h(t) = a\cos(\omega_0 t + \varphi) \tag{2.13}$$

trong đó a, ω_0 là các hằng số, φ là đại lượng ngẫu nhiên có phân bố đều trên đoạn $[0, 2\pi]$ cũng là quá trình dừng và có hàm mật độ phân bố xác suất cho bởi:

$$f_H(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}} & \text{khi} \quad |x| \le a \\ 0 & \text{khi} \quad |x| \ge a \end{cases} \tag{2.14}$$

Để chứng minh công thức (2.2) ta tìm mô phỏng cho $\{y(t)\}$, sau đó nhờ (2.12) ta có công thức cần tìm.

Từ (2.12) ta có:

$$\langle x(t) \rangle = m_x, \quad S_x(\omega) = S(\omega) + \frac{(\sigma a)^2}{2}\delta(\omega - \omega_0)$$

ở đây $\delta(\;)$ là hàm Delta Dirắc, từ đó:

$$S_x(\omega) = S(\omega) = S_x(\omega) \; \forall \omega_0 \notin [-B, B]$$

Gọi $\overline{\eta}$ là quá trình dừng, chuẩn có hàm mật độ phổ $S_x(\omega)/\sigma$ đã biết, ta đặt:

$$\Sigma(t) = \overline{\eta}(t) + a\cos(\omega_0 t + \varphi) \tag{2.15}$$

Khi xét các hàm mật độ phân bố xác suất $f_\Sigma(x)$, $f_y(x)$ như là các phần tử trong không gian các hàm bình phương khả tích L_2 [9] với Metric $\rho(\;,\;)$ được định nghĩa bởi:

$$\forall f_1, f_2 \in L_2, \quad \rho^2(f_1, f_2) = \int_{-\infty}^{\infty} (f_1(x) - f_2(x))^2 dx \tag{2.16}$$

như vậy có thể xem $\Sigma \approx y$ (tức là $f_\Sigma \approx f_y$) nếu như ρ^2 đủ bé. Nói cách khác để có thể lấy (2.15) làm công thức mô phỏng cho $y(t)$ tham số a cần ddược tìm từ điều kiện sau đây:

$$\varepsilon(a) = \rho^2(f_\Sigma, f_y) = \int_{-\infty}^{\infty} (f_\Sigma(x, a) - f_y(x))^2 dx \longrightarrow \text{Min} \tag{2.17}$$

Ta có:

$$f_\Sigma(x, a) = F_{\overline{\eta}} * f_H(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_H(y, a) f_{\overline{\eta}}(x - y) dy =$$

$$= \frac{\exp(-x^2/2)}{\pi\sqrt{2\pi}} \left[\int_0^a \frac{\exp(xy - y^2/2)}{(a^2 - y^2)^{1/2}} dy + \int_0^a \frac{\exp(-xy - y^2/2)}{(a^2 - y^2)^{1/2}} dy \right]$$

Đặt $y = a\sin(\varphi)$, khai triển Macloranh các hàm dưới dấu tích phân lấy đến số hạng bậc ba và áp dụng các công thức tích phân trong [6], ta có:

$$f_\Sigma(x, a) = \frac{\exp(-x^2/2)}{(2\pi)^{1/2}} \left[1 + \frac{(a\pi)^2(x^2 - 1)}{24} \right] \tag{2.18}$$

Hàm mật độ $f_y(x)$ được khai triển theo chuỗi Gơram-Saclie [11] như sau:

$$f_y(x) = \frac{\exp(-x^2/2)}{(2\pi)^{1/2}} \left[1 + \frac{\mu_3}{3!\sigma^3}(x^3 - 3x) + \frac{\mu_4 - 3\sigma^4}{4!\sigma^4}(x^4 - 6x^2 + 3) + \dots \right] \tag{2.19}$$

ở đây do (2.16) ta có:

$$\mu_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k f_x(x)dx, \quad \sigma^2 = \mu_2 \tag{2.20}$$

Từ bài toán cực trị (2.17) nhờ (2.18), (2.19) và các công thức tích phân đã biết [6] ta đi đến phương trình sau cho nghiên cứu cần tìm a:

$$a^2 = \frac{5(3\sigma^4 - \mu_4)}{2\pi^2\sigma^4}$$

với điều kiện (2.4) thì (2.5) được chứng minh.

Khi $f_x(x) = 0$ với $x < 0$ bài toán cực trị (2.17) trở thành:

$$\varepsilon(a) = \int\limits_{0}^{\infty} ((f_\Sigma(x,a) - f_y(x))^2 dx \longrightarrow \text{Min} \tag{2.21}$$

Lý luận tương tự như trên, với điều kiện (2.6), hệ thức (2.7) được chứng minh.

Như vậy, khi mô phỏng quá trình dừng, khác chuẩn trước hết ta mô phỏng quá trình dừng, chuẩn theo hàm mật độ phổ đã cho, sau đó kiểm tra điều kiện (2.4) hoặc (2.6) cho hàm mật độ phân bố xác suất để xác định tham số a theo (2.5) hoặc (2.6) cho công thức mô phỏng (2.2).

3. MỘT VÀI THÍ DỤ

Giả sử các quá trình ngẫu nhiên được xét sau đây là dừng, $S_x(\omega)$ và $f_x(x)$ là các hàm mật độ phổ, mật độ phân phối xác suất của chúng. Tính các mômen trung tâm theo các mômen tương ứng xem trong [10].

Thí dụ 1

$$f_x(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2b} & \text{khi} \quad |x| \le b \\ 0 & \text{khi} \quad |x| > b \end{cases}$$

Ta có: $m_x = 0$, $\sigma^2 = b^2/3$, $\mu_4 = b^4/5$

Do (2.1) nên:

$$b = \left(6\int\limits_{0}^{\infty} S_x(\omega)d\omega\right)^{1/2}$$

Do $V = 2b^4/15 \geq 0$ nên $a = (3)^{1/2}/\pi$ cho nên:

$$x(t) = \eta(t) + \frac{b}{\pi}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

là mô phỏng cần tìm cho quá trình dừng, phân bố đều trên đoạn $[-b, b]$.

Thí dụ 2

$$f_x(x) = \frac{1}{\sigma(2\pi)^{1/2}} \exp\left(-x^2/2\sigma^2\right)$$

do

$$\mu_{2k-1} = 0, \qquad \mu_{2k} = \frac{(2k)!}{2^k k!}\sigma^{2k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

nên $\mu_4 = 3\sigma^4$ do đó $a = 0$ và $x(t) = \eta(t)$.

Như vậy đối với quá trình dừng, chuẩn thì công thức mô phỏng (2.2) với điều kiện (2.4) cho ta kết quả đúng (chứ không phải gần đúng) của hàm mật độ phân bố xác suất.

Thí dụ 3

$$f_x(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{c^2}\exp\left(-x^2/(2c^2)\right) & \text{khi} \quad x \geq 0,\ c > 0 \\ 0 & \text{khi} \quad x < 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

(Hàm mật độ Rayleigh)

Ta có:

$$m_x = c(\pi/2)^{1/2}, \quad \mu_2 = \sigma^2 = c^2(4-\pi)/2$$
$$\mu_3 = c^3(\pi-3)(\pi/2)^{1/2}, \quad \mu_4 = c^4(32-3\pi^2)/4$$

Để thỏa mãn (2.1) tham số c được chọn là:

$$c = \left(\frac{4}{4-\pi}\int_0^\infty S(\omega)d\omega\right)^{1/2} \tag{3.2}$$

Theo (2.6) thì:

$$V = c^4(\pi)^{1/2}\left[16(\pi-3)(4-\pi)^{1/2} + 15(3\pi^2 - 12\pi + 8)/2\right] \tag{3.3}$$

Tính trên PC-AT theo ngôn ngữ Turbo-Pascal số $\pi = 3,145926535897932385$ (chế độ dịch 8087/80287) ta có $V > 0$, nên có a được tính theo (2.7). Vậy:

$$x(t) = \eta(t) + \sigma a\cos(\omega_0 t + \varphi) + m_x \tag{3.4}$$

Ta biết rằng [2] vận tốc sóng biển là quá trình ngẫu nhiên dừng có mật độ phổ $S_x(\omega)$ là:

$$S_x(\omega) = \omega^2 S_{P-M}(\omega) \tag{3.5}$$

ở đây:

$$S_{P-M}(\omega) = \alpha\exp\left(-4\alpha g^2/((H_z)^2\omega^4))\right)/\omega^5 \tag{3.6}$$

là hàm mật độ phổ Pierson-Moskowitz trong đó α, H_z, g là các hằng số không ngẫu nhiên . Giả sử rằng hàm phân bố xác suất của vận tốc sóng biển là hàm Rayleigh (3.1) với tham số c xác định bởi (3.2).

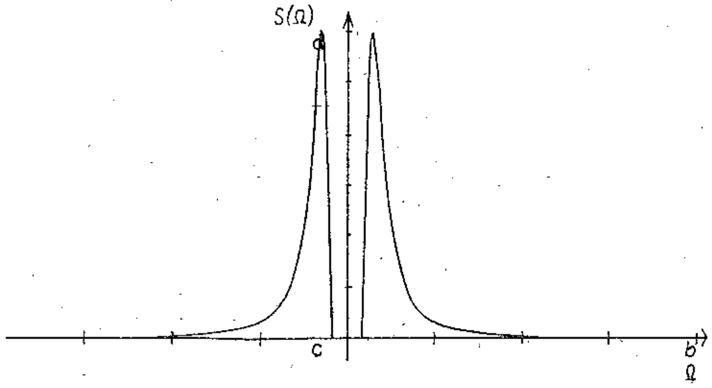
Với $\alpha = 0,0081$, $H_z = 4,3$, $g = 9,81$, $N = 512$ là số điểm tính cho mỗi thể hiện dạng (3.4), miền rời rạc cho $S_x(\omega)$ là $\{\omega\ :\ S_x < \varepsilon = 0,001\}$ thì đồ thị của $S_x(\omega)$, $f_x(x)$ cho bởi hình vẽ 1, 2. Thể hiện của quá trình đang được xét dạng (3.4) cùng với các hàm mật độ phổ, mật độ phân bố xác suất tính được từ thể hiện đó có đồ thị cho trên các hình vẽ 3, 4, 5. Không khó khăn có thể chứng minh rằng quá trình dừng Rayleigh qua một phép biến đổi tuyến tính vẫn là quá trình Rayleigh và bình phương của nó quá trình χ^2 (Khi - bình phương) hai bậc tự do [5] nên khi tính ước lượng của mật độ phổ từ thể hiện theo biến đổi Fourier rời rạc, có áp dụng biến đổi Fourier nhanh, phép làm trơn cũng được làm trơn như đã làm cho quá trình chuẩn. Việc tạo số ngẫu nhiên có phân bố đều trên đoạn $[0,1]$ xem [7, 8] được thể hiện trong chương trình có kết hợp với sử dụng hàm mẫu của Turbo - Pascal.

Thí dụ 4

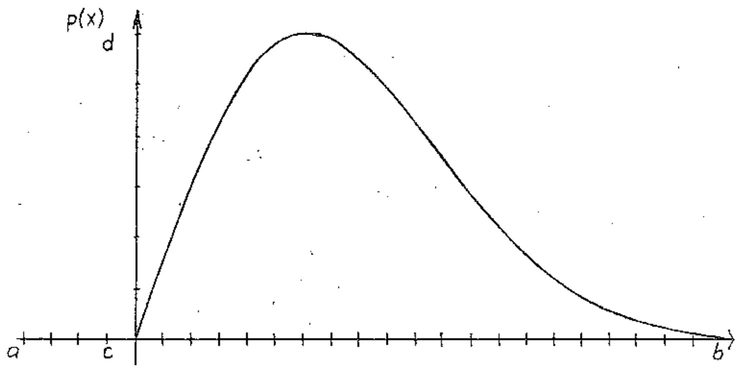
$$f_x(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{c^3}(2/\pi)^{1/2}\exp\left(-x^2/(2c^2)\right) & \text{khi} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{khi} \quad x < 0 \end{cases}$$

(Quá trình Makxvell) [5].

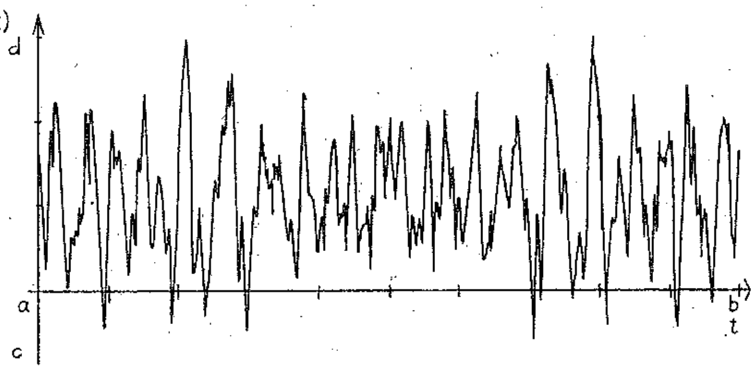
Tính trực tiếp, điều kiện (2.6) ở đây cũng được thỏa mãn. Hàm mật độ phân bố xác suất của quá trình Makxvell cũng bất biến qua phép biến đổi tuyến tính và bình phương của nó là quá trình χ^2 (Khi - Bình phương) với ba bậc tự do. Vì vậy thuật toán trên cũng áp dụng được cho quá trình này.



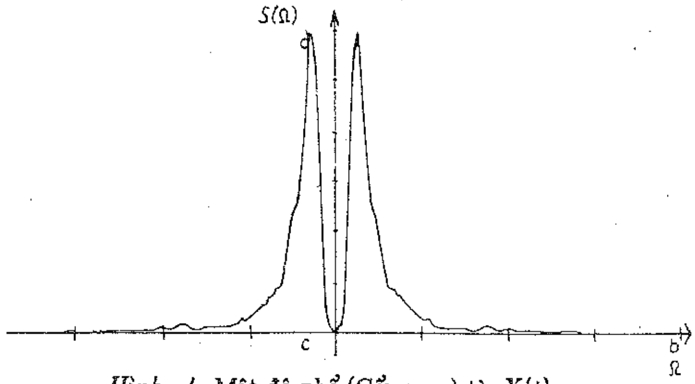
Hình. 1. Mật độ phổ vận tốc sóng từ mật độ phổ P-M.
$N = 512$ page $= 1$, maxpage $= 1$,
$a = -9.500E + 0000$, $b = 9.500E + 0000$, $c = 0.000E + 0000$, $d = 1.124E + 0000$.



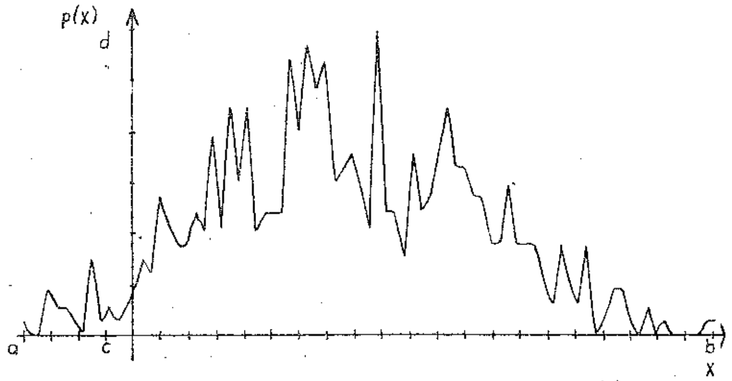
Hình. 2. Hàm mật độ xác suất Rayleigh.
$N = 80$ page $= 1$ maxpage $= 1$,
$a = -1.238E + 0000$, $b = 6.538E + 0000$, $c = 0.000E + 0000$, $d = 3.216R - 0001$.



Hình. 3. Mô phỏng từ mật độ phổ & mật độ Rayleigh.
$N = 511$ page $= 1$ maxpage $= 1$,
$a = 0.000E + 0000$, $b = 1.693E + 0002$, $c = -1.233E + 0000$, $d = 6.538E + 0000$.



Hình. 4. Mật độ phổ (Cổng cos) từ $X(t)$.
$N = 512$ page $= 1$ maxpage $= 1$,
$a = -9.500E + 0000$, $b = 9.500E + 0000$, $c = 2.329E - 0003$, $d = 1.120E + 0000$



Hình. 5. Mật độ xác suất thực nghiệm từ $X(t)$.
$N = 80$ page $= 1$ maxpage $= 1$,
$a = -1.238E + 0000$, $b = 6.538E + 0000$, $c = 0.000E + 0000$, $d = 4.019E - 0001$

4. KẾT LUẬN

Phương pháp mô phỏng quá trình dừng, khác chuẩn đã nêu trên dựa trên quan điểm xấp xỉ hàm và mô phỏng của quá trình dừng, chuẩn đã biết. Có thể mở rộng kết quả trên khi hàm mật độ phân bố xác suất không thỏa mãn điều kiện (2.4) hay (2.6) bằng cách lấy thêm các số hạng trong khai triển (2.18), (2.19). Sau đó tham số a sẽ là nghiệm thực của một phương trình đại số bậc lớn hơn hai. Nếu nghiệm đúng không tìm được có thể áp dụng cách tìm gần đúng [1].

Địa chỉ:
Viện Cơ Viện KHVN

Nhận ngày 29/4/1992

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Brice Carnahan, Luther H. A. Applied Numerical Methods. The University of Michigan, 1969.
2. Karadeniz Dr. H. Spectral Analysis and stochastic fatigue reliability calculation of offshore steel structures. April. 1983. Department of Civil Engineering. Delft University of Technology.

3. Styles D. D. and Dodd C. J. Simulation of Random Environments for Structural Dynamic Testing. J. Exprimential Mechanic. November 1976.
4. Shinozuka M. Simulation of Multivariante and Multidimensional Random Processes. The Journal of the Acoustical Society of Americal, 1980.
5. Бендат Д. Ж., Пирсон А. Прикладной анализ случайных данных. Изд. Мир. Москва 1981.
6. Бронштейн Н. Н., Семендяет К. А. Справочник по математике для инженеров и учаищинся. Изд. Втузов Наука, Москва 1980.
7. Ермаков С. М., Михайлов Г. А. Курс статистического моделирования. Изд. Наука, Москва 1976.
8. Ермаков С. М. Метод Монте - Карло и смежные вопросы. изд. Наука, Москва 1976.
9. Кормогоров А. Н., Фомин С. В. элементы теории функции и функционального анализа. Изд. Наука, Москва 1972.
10. Gnedenco B. V., Beliaeb I. O., Xolovieb A. D. Những phương pháp toán học trong lý thuyết độ tin cậy. NXB Khoa học kỹ thuật, Hà Nội, 1981.
11. Pugatrep V. C. Lý thuyết hàm ngẫu nhiên, T1, T2. NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà Nội, 1978.
12. Ventxel A. D. Giáo trình lý thuyết quá trình ngẫu nhiên. Nxb. Hayka & Đại học và Trung học chuyên nghiệp. Hà Nội & Mockva,

SUMMARY

SIMULATION OF STATIONARY, NON-NORMAL RANDOM PROCESS

Simulation of stationary random processes specified by spectral density function and Non-Normal probability density function has been rarely studied, though the these processes are often met in both theory and pratice.

In this paper we consider a simulation method which can apply to the mention - above processes. The main idea based on the simulation of the Normal process and approximation of functions in the space of quadratically intergrable functions. The numerical program for illustration of the method is written by Turbo - Pascal language.

SỰ HỘI TỤ CỦA PHƯƠNG PHÁP BIẾN THỂ . . .

(tiếp trang 9)

SUMMARY

ON THE CONVERGENCE OF THE MODIFIED METHOD OF ELASTIC SOLUTION IN THE THEORY OF ELASTO-PLASTIC DEFORMATION PROCESSES

The modified method of elastic solution in the theory of elasto-plastic deformation processes had been proposed in [1]. In this paper, through the numerical solutions of two elasto-plastic problems, the convergence and the convergence rate of this iteration method are considered.