

# SỰ HỘI TỤ CỦA PHƯƠNG PHÁP BIẾN THỂ NGHIỆM ĐÀN HỒI TRONG LÝ THUYẾT QUÁ TRÌNH BIẾN DẠNG ĐÀN ĐÉO

VŨ KHẮC BẢY

Phương pháp biến thể nghiệm đàn hồi trong lý thuyết quá trình biến dạng đàn dẻo được trình bày trong [1], nhưng cho đến nay chưa có một chứng minh nào về sự hội tụ của nó cả về lý thuyết cũng như phương pháp số. Trong bài này khẳng định sự hội tụ của phương pháp biến thể nghiệm đàn hồi bằng phương pháp số thông qua việc giải hai bài toán đàn dẻo, đồng thời khảo sát tốc độ hội tụ trong cả quá trình đàn dẻo.

## 1. TRẠNG THÁI ĐÀN ĐÉO CỦA ỐNG DÀY CHỊU ÁP LỰC TRONG VÀ LỰC KÉO DỌC TRỤC

Xét ống dày, dài, bán kính trong bằng  $a$ , bán kính ngoài bằng  $b$ , chịu áp lực đều ở trong  $P(t)$  và lực kéo dọc trục  $Q(t)$ . Ống làm bằng vật liệu tái bền, không nén được ( $\nu = 0,5$ ), không lực khối.

Ta xét bài toán trong hệ tọa độ trụ. Do điều kiện đối xứng và ống dài vô hạn nên các biến dạng và ứng suất là hàm của  $r$  và  $t$ :

$$\begin{aligned} E_{zz} = e_{zz} &\equiv e_{zz}(t), & E_{rr} = e_{rr} &\equiv e_{rr}(r, t), \\ E_{\theta\theta} = e_{\theta\theta} &\equiv e_{\theta\theta}(r, t), & E_{r\theta} = E_{rz} = E_{\theta z} &= 0. \end{aligned}$$

Các thành phần ứng suất, biến dạng phải thỏa mãn các phương trình và các điều kiện biên:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad e_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}$$

$$\sigma_{rr} = \begin{cases} -P(t) & \text{khi } r = a \\ 0 & \text{khi } r = b, \end{cases}$$

$$Q(t) = 2\pi \int_a^b \sigma_{zz} r dr, \quad S_{ij} = 2G e_{ij} + \int_0^t R_{ijkl} de_{kl}.$$

Trong đó

$$R_{ijkl} = -2GW_1 \delta_{ik} \delta_{jl} + 3G(W_1 - W_2) \frac{S_{ij} S_{kl}}{\sigma_u^2}$$

với  $W_1 = 1 - \frac{\sigma_u k(s)}{3G}$ ,  $W_2 = 1 - \frac{\phi'(s)}{3G}$ ,  $\phi'(s)$  và  $k(s)$  là các hàm đặc trưng cho tính chất của vật liệu. Ở đây do vật liệu tái bền tuyến tính nên:  $\phi'(s) = E'$  khi  $s \geq s_0$ ,  $\phi'(s) = E$  khi  $s < s_0$  và  $k(s) = 1/s$ .

Chia quá trình đặt tải từ thời điểm ban đầu đến thời điểm đang xét thành  $n$  giai đoạn, khi đó ta có:

$$S_{ij}^{(n)} = 2Ge_{ij}^{(n)} + \sum_{m=1}^n \int_{t_{m-1}}^{t_m} R_{ijk\ell} \dot{e}_{k\ell} dt = 2Ge_{ij}^{(n)} + \Delta_{ij}^{(n)}$$

Với ước lượng tích phân:

$$\int_{t_{m-1}}^{t_m} R_{ijk\ell} \dot{e}_{k\ell} dt = \frac{1}{2} [R_{ijk\ell}^{(m-1)} + R_{ijk\ell}^{(m)}] \Delta e_{k\ell}^{(m)} = \Delta_m e_{ij}$$

Thuật giải ở đây là biết nghiệm ở cuối giai đoạn  $n-1$  (tức là sẽ biết được các  $\Delta_m e_{ij}$ ) ta xác định nghiệm của bài toán ở giai đoạn thứ  $n$ . Trong giai đoạn này ta giải gần đúng liên tiếp. Nghiệm gần đúng thứ  $k$  cần thỏa mãn:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^{(n,k)}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr}^{(n,k)}}{r} - \sigma_{\theta\theta}^{(n,k)} = 0 \quad (1.1)$$

$$e_{rr}^{(n,k)} = \frac{\partial u_r^{(n,k)}}{\partial r}, \quad e_{\theta\theta}^{(n,k)} = \frac{u_r^{(n,k)}}{r} \quad (1.2)$$

$$S_{ij}^{(n,k)} = 2Ge_{ij}^{(n,k)} + \sum_{m=1}^{n-1} \Delta_m e_{ij} + \Delta_n^{(k)} e_{ij} \quad (1.3)$$

với các điều kiện biên:

$$\sigma_{rr} = \begin{cases} -P(t_n) & \text{với } r = a \\ 0 & \text{với } r = b \end{cases} \quad (1.4a)$$

$$Q(t_n) = 2\pi \int_a^b \sigma_{zz}^{(n,k)} r dr \quad (1.4b)$$

Trong đó:

$$\Delta_n^{(k-1)} e_{ij} = \frac{1}{2} [R_{ijk\ell}^{(n-1)} + R_{ijk\ell}^{(n,k-1)}] [e_{k\ell}^{(n,k-1)} - e_{k\ell}^{(n-1)}]$$

và

$$R_{ijk\ell}^{(n,k-1)} = -2GW_1^{(n,k-1)} \delta_{ik} \delta_{j\ell} + 3G(W_1^{(n,k-1)} - W_2^{(n,k-1)}) \frac{S_{ij}^{(n,k-1)} \cdot S_{k\ell}^{(n,k-1)}}{[\sigma_u^{(n,k-1)}]^2} \quad (1.5)$$

Ở gần đúng thứ  $k=0$  lấy  $\Delta_n^{(0)} e_{ij} = 0$ .

Đặt

$$\sum_{m=1}^{n-1} \Delta_m e_{rr} + \Delta_n^{(k)} e_{rr} = R^{(n,k)}; \quad \sum_{m=1}^{n-1} \Delta_m e_{\theta\theta} + \Delta_n^{(k)} e_{\theta\theta} = B^{(n,k)} \quad (1.6)$$

Từ điều kiện  $e_{rr} + e_{\theta\theta} + e_{zz} = 0$  nên từ (1.2) ta được:

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} = -e_{zz} \Rightarrow u_r = -e_{zz} \frac{r}{2} + \frac{C}{r} \Rightarrow e_{rr} = -\frac{e_{zz}}{2} - \frac{C}{r^2}$$

và

$$e_{\theta\theta} = -\frac{e_{zz}}{2} + \frac{C}{r^2}; \quad C \text{ là hằng số.}$$

Thay vào (1.3) ta được:

$$S_{rr}^{(n,k)} = \sigma_{rr}^{(n,k)} - \sigma^{(n,k)} = -G \left[ e_{zz}^{(n,k)} + \frac{2C^{(n,k)}}{r^2} \right] + R^{(n,k)}$$

$$S_{\theta\theta}^{(n,k)} = \sigma_{\theta\theta}^{(n,k)} - \sigma^{(n,k)} = G \left[ -e_{zz}^{(n,k)} + \frac{2C^{(n,k)}}{r^2} \right] + B^{(n,k)}$$

$$S_{zz}^{(n,k)} = \sigma_{zz}^{(n,k)} - \sigma^{(n,k)} = 2Ge_{zz}^{(n,k)} - R^{(n,k)} - B^{(n,k)}$$

Dem thay vào phương trình cân bằng (1.1) ta được:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^{(n,k)}}{\partial r} = \frac{4GC^{(n,k)}}{r^3} + \frac{B^{(n,k)} - R^{(n,k)}}{r} \Rightarrow \sigma_{rr}^{(n,k)} = \int_a^r \frac{B^{(n,k)} - R^{(n,k)}}{r} dr - \frac{2GC^{(n,k)}}{r^2} + C_1^{(n,k)}$$

Xác định  $C^{(n,k)}$  và  $C_1^{(n,k)}$  từ điều kiện biên (1.4a):

$$C^{(n,k)} = \left\{ P(t_n) - \int_a^b \frac{B^{(n,k)} - R^{(n,k)}}{r} dr \right\} \frac{a^2 b^2}{2G(b^2 - a^2)}$$

$$C_1^{(n,k)} = 2GC^{(n,k)} \frac{1}{a^2} - P(t_n)$$

Thay vào ta được:

$$\sigma_{rr}^{(n,k)} = 2GC^{(n,k)} \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} \right) + \int_a^r \frac{B^{(n,k)} - R^{(n,k)}}{r} dr - P(t_n)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(n,k)} = \sigma_{rr}^{(n,k)} + \frac{4GC^{(n,k)}}{r^2} + B^{(n,k)} - R^{(n,k)}$$

Từ điều kiện biên (1.4b) ta được:

$$Q(t_n) = \pi \int_a^b \left\{ \sigma_{rr}^{(n,k)} - \sigma_{\theta\theta}^{(n,k)} - 3(R^{(n,k)} + B^{(n,k)}) \right\} r dr + 6G\pi \int_a^b e_{zz}^{(n,k)} r dr$$

$$\Rightarrow e_{zz}^{(n,k)} = \frac{1}{3G\pi(b^2 - a^2)} \left\{ Q(t_n) + \pi \int_a^b \left[ 3(R^{(n,k)} + B^{(n,k)}) - \sigma_{rr}^{(n,k)} - \sigma_{\theta\theta}^{(n,k)} \right] r dr \right\}$$

Do vậy ta được:

$$\sigma_{zz}^{(n,k)} = \frac{1}{2} \left\{ 6Ge_{zz}^{(n,k)} - 3R^{(n,k)} - 3B^{(n,k)} - \sigma_{rr}^{(n,k)} - \sigma_{\theta\theta}^{(n,k)} \right\}.$$

Từ đó ta tính được:  $e_{\theta\theta}^{(n,k)}$ ,  $e_{zz}^{(n,k)}$ ,  $S_{rr}^{(n,k)}$ ,  $S_{\theta\theta}^{(n,k)}$ ,  $S_{zz}^{(n,k)}$  và

$$\sigma_u^{(n,k)} = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij}^{(n,k)} S_{ij}^{(n,k)}} = \sqrt{\frac{3}{2} \left\{ [S_{rr}^{(n,k)}]^2 + [S_{\theta\theta}^{(n,k)}]^2 + [S_{rr}^{(n,k)} + S_{\theta\theta}^{(n,k)}]^2 \right\}}$$

Do  $S^{(n)} = S^{(n-1)} + S_n$  nên  $S^{(n,k)} = S^{(n-1)} + S_n^{(k)}$  trong đó

$$S^{(n)} = \sqrt{\frac{2}{3}} \int_0^{t^n} \sqrt{\dot{e}_{ij} \dot{e}_{ij}} dt = \sqrt{\frac{2}{3}} \sum_{m=1}^n \int_{t_{m-1}}^{t_m} \sqrt{\dot{e}_{ij} \dot{e}_{ij}} dt$$

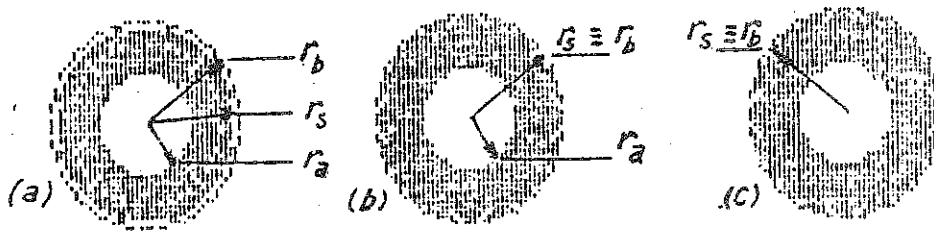
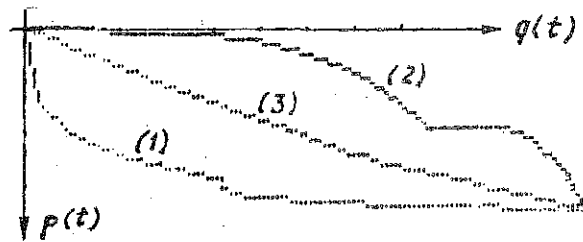
$$S_n^{(k)} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(e_{ij}^{(n,k)} - e_{ij}^{(n-1)}) \cdot (e_{ij}^{(n,k)} - e_{ij}^{(n-1)})}$$

Gọi  $\varphi$  là góc lệch giữa vectơ ứng suất và quỹ đạo biến dạng ta có:

$$\cos \varphi = \frac{S_{ij} \dot{e}_{ij}}{\sigma_u V_u} \quad \text{vậy} \quad (\cos \varphi)^{(n,k)} = \frac{S_{ij}^{(n,k)} \cdot (e_{ij}^{(n,k)} - e_{ij}^{(n-1)})}{\sigma_u^{(n,k)} S_n^{(k)}}$$

**Biểu đồ 1.** Đồ thị quỹ đạo tải ngoài kéo nén ống trụ dày.

- (1) - cách đặt tải 1
- (2) - cách đặt tải 2
- (3) - cách đặt tải 3



**Hình 1.** Hình ảnh đàn dẻo ở một số giai đoạn trong cách đặt tải 1.

- (a) Giai đoạn 22 :  $p = 0,50651, q = 0,98433$
- (b) Giai đoạn 23 :  $p = 0,50917, q = 1,0523$
- (c) Giai đoạn 24 :  $p = 0,5117, q = 1,1242$

Ở mỗi bước ta cần kiểm tra giá trị của  $(\cos \varphi)^{(n,k)}$ . Nếu:

- $(\cos \varphi)^{(n,k)} \geq 0$  - ứng với quá trình đặt tải.
- $(\cos \varphi)^{(n,k)} < 0$  - ứng với quá trình cất tải.

Vì các đại lượng là hàm của  $r$  và  $t$  nên ta chia bán kính từ  $r_a$  đến  $r_b$  thành  $m+1$  điểm chia. Đưa vào các đại lượng không thứ nguyên:

$$q(t) = \frac{Q(t)}{\pi(a^2 - b^2)\sigma_s}, \quad p(t) = \frac{P(t)}{\sigma_s}, \quad \bar{S}_{ij} = \frac{S_{ij}}{\sigma_s}, \quad h = \frac{r_a}{r_b}, \quad \gamma = \frac{1 - h^2}{3 + h^4}$$

Áp dụng tính toán với thép 40X; có  $\frac{E'}{E} = 0,028, \sigma_s = 858 \frac{MN}{m^2}, G = 70000 \frac{MN}{m^2}$  với  $h = 0,5, m = 20, n = 25$ ; đặt tải theo 3 cách và với các cách chia giai đoạn theo tham số tải khác nhau. Bảng 1 ghi kết quả tính toán ở 3 giai đoạn theo cách đặt tải 1. Sai số giữa hai lần lặp thứ 3 và

thứ 2 của các đại lượng (tại các điểm có tọa độ  $r = r_0$ ) ở tất cả các giai đoạn khác đều nhỏ hơn ở 3 giai đoạn này.

Kết quả tính toán theo 3 cách đặt tải (như trong biểu đồ 1) cho thấy rằng: sai số giữa hai lần lặp thứ 3 và thứ 2 trong suốt quá trình của các đại lượng ứng suất đều nhỏ hơn 4,3%, của các đại lượng biến dạng đều nhỏ hơn 3%, của cường độ ứng suất đều nhỏ hơn 2%; sai số giữa hai lần lặp thứ 8 và thứ 7 ở mọi giai đoạn tải của các đại lượng ứng suất đều nhỏ hơn 3%, của các đại lượng biến dạng đều nhỏ hơn 2,4%, của cường độ ứng suất đều nhỏ hơn 1,5%.

Bảng 1

Tải	Số lần lặp	$\frac{\sigma_{\theta\theta}}{\sigma_s}$	$\frac{\sigma_{zz}}{\sigma_s}$	$\frac{\sigma_u}{\sigma_s}$	$e_{rr} \cdot 10^3$	$e_{\theta\theta} \cdot 10^3$	$e_{zz} \cdot 10^3$	$\cos \varphi$
Giai đoạn 22 $p = 0,50651$ $q = 0,98433$	2	0,52052	0,57975	1,0579	-6,64	3,06	3,579	0,8622
	3	0,50336	0,55578	1,0371	-6,72	3,12	3,602	0,9218
	sai số	3,4%	4,3%	2%	1,2%	1,86%	$6,3 \cdot 10^{-3}$	6,5%
	7	0,49263	0,54497	1,0263	-6,93	3,23	3,702	0,9693
	8	0,49627	0,54293	1,0269	-6,96	3,26	3,704	0,9764
	sai số	$7,3 \cdot 10^{-3}$	$3,7 \cdot 10^{-3}$	$5,7 \cdot 10^{-4}$	$4,4 \cdot 10^{-3}$	$8,8 \cdot 10^{-3}$	$5,4 \cdot 10^{-4}$	$7,3 \cdot 10^{-3}$
Giai đoạn 23 $p = 0,50917$ $q = 1,0253$	2	0,52696	0,63020	1,0914	-7,38	3,21	4,169	0,8562
	3	0,53511	0,64067	1,1009	-7,66	3,31	4,354	0,9303
	sai số	1,5%	1,6%	$8,5 \cdot 10^{-3}$	3,7%	3%	4,24%	7,9%
	7	0,52201	0,62523	1,0865	-8,58	3,70	4,878	0,9848
	8	0,52273	0,62357	1,0858	-8,77	3,79	4,983	0,9880
	sai số	$1,4 \cdot 10^{-3}$	$2,7 \cdot 10^{-3}$	$5,9 \cdot 10^{-4}$	2,2.10%	2,3%	2,1%	$3,2 \cdot 10^{-3}$
Giai đoạn 24 $p = 0,51176$ $q = 1,1242$	2	0,54973	0,71559	1,1534	-9,20	3,69	5,493	0,8384
	3	0,55750	0,72401	1,1615	-9,48	3,77	5,719	0,9119
	sai số	1,4%	1,2%	$7 \cdot 10^{-3}$	3%	2,1%	3,7%	8%
	7	0,56078	0,73235	1,1678	-10,65	4,10	6,479	0,9801
	8	0,56044	0,73227	1,1682	-10,93	4,28	6,658	0,9842
	sai số	$6 \cdot 10^{-4}$	$1,2 \cdot 10^{-4}$	$3,6 \cdot 10^{-4}$	2,5%	2,3%	2,6%	$4 \cdot 10^{-3}$

## 2. TRẠNG THÁI ĐÀN DẸO CỦA THANH TRÒN CHỊU XOẺN VÀ LỰC KÉO DỌC TRỰC

Xét thanh tròn, dài, bán kính bằng  $a$ , làm bằng vật liệu không nén được, tái bền tuyến tính, không lực khối; chịu lực kéo dọc trục  $P(t)$  và mômen xoắn  $M(t)$ .

Đối với bài toán này ta vẫn dùng giả thiết bán kính thẳng và thiết diện phẳng. Ở đây vẫn xét bài toán trong hệ tọa độ trụ. Do tính chất của lực ngoài tác dụng nên ta thấy rằng các đại lượng biểu thị ứng suất và biến dạng không phụ thuộc vào góc  $\theta$  và  $z$ , các đại lượng biểu thị về chuyển dịch không phụ thuộc vào góc  $\theta$ . Các thành phần ứng suất chỉ còn lại thành phần  $\sigma_{zz}$  và  $\sigma_{\theta z}$  là khác không còn các thành phần khác đều bằng không, do vậy các phương trình cân bằng đều thỏa mãn.

Gọi  $\beta$  là góc quay giữa hai thiết diện cách nhau một đơn vị, khi đó do giả thiết thiết diện phẳng và bán kính thẳng chuyển dịch  $u_\theta = r.z$ , do vậy  $u_{\theta z} = \frac{1}{2}\beta r$ , và do giả thiết thiết diện phẳng nên  $e_{zz} = e_{zz}(t)$ . Do  $\theta_e = 0$  nên:

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} = -e_{zz} \rightarrow u_r = -\frac{1}{2}e_{zz}.r + \frac{C}{r}; \quad C \text{ là hằng số.}$$

Từ điều kiện  $r = 0$  thì  $u_r = 0$  nên  $C = 0$ , vậy  $u_2 = -\frac{1}{2}e_{zz}.r$ , do đó ta có:

$$e_{rr} = -\frac{1}{2}e_{zz}(t), \quad e_{\theta\theta} = -\frac{1}{2}e_{zz}(t), \quad e_{\theta z} = \frac{1}{2}\beta(t).r, \quad e_{zz} = e_{zz}(t) \quad (2.1)$$

còn các đại lượng  $e_{rz} = e_{r\theta} = 0$ .

Chia thời gian từ đầu đến thời điểm đang xét thành  $n$  đoạn, khi đó tại giai đoạn đang xét (thứ  $n$ ) nghiệm của bài toán sẽ được giải bằng phương pháp xấp xỉ liên tiếp trên cơ sở biết được nghiệm ở cuối giai đoạn trước (giai đoạn thứ  $n-1$ ). Tại gần đúng thứ  $k$  ở giai đoạn  $n$ , các thành phần ứng suất sẽ liên hệ với các thành phần biến dạng:

$$S_{ij}^{(n,k)} = 2G\epsilon_{ij}^{(n,k)} + \sum_{m=1}^{n-1} \Delta_m e_{ij} + \Delta_n^{(k)} e_{ij} \quad (2.2)$$

và các điều kiện biên:

$$P(t_n) = 2\pi \int_0^a \sigma_{zz}^{(n,k)} r dr, \quad M(t_n) = 2\pi \int_0^a S_{\theta z}^{(n,k)} r^2 dr \quad (2.3)$$

Trong đó:

$$\Delta_n^{(k-1)} e_{ij} = \frac{1}{2} [R_{ijkl}^{(n-1)} + R_{ijkl}^{(n,k-1)}] [e_{kl}^{(n,k-1)} - e_{kl}^{(n-1)}]$$

với

$$R_{ijkl}^{(n,k-1)} = -2GW_1^{(n,k-1)} \delta_{ik} \delta_{jl} + 3G(W_1^{(n,k-1)} - W_2^{(n,k-1)}) \frac{S_{ij}^{(n,k-1)} S_{kl}^{(n,k-1)}}{[\sigma_u^{(n,k-1)}]^2}$$

và

$$W_2 = 1 - \frac{E'}{E}, \quad W_1 = 1 - \frac{\sigma_u \cdot k(s)}{E}, \quad \text{do } k(s) = \frac{1}{s} \text{ nên } W_1 = 1 - \frac{\sigma_u}{\sigma_s + E \cdot s_1}$$

Trong đó  $s_1$  là độ dài cung biến dạng bắt đầu sau giai đoạn đàn hồi đến thời điểm đang xét. Ở gần đúng thứ  $k=0$  ta lấy  $\Delta_n^{(0)} e_{ij} = 0$ .

Do  $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = 0$  nên từ (2.1) kết hợp với (2.2) ta luôn có  $\sum_m \Delta_m e_{rr} = \sum_m \Delta_m e_{\theta\theta}$  ở mọi giai đoạn. Ký hiệu:

$$\sum_{m=1}^{n-1} \Delta_m e_{rr} + \Delta_n^{(k)} e_{rr} = \sum_{m=1}^{n-1} \Delta_m e_{\theta\theta} + \Delta_n^{(k)} e_{\theta\theta} = R^{(n-1)} + \Delta_n^{(k)} e_{rr} = R^{(n,k)}$$

$$\sum_{m=1}^{n-1} \Delta_m e_{\theta z} + \Delta_n^{(k)} e_{\theta z} = F^{(n-1)} + \Delta_n^{(k)} e_{\theta z} = F^{(n,k)}$$

Khi đó từ (2.2) ta có:

$$\begin{aligned}
S_{rr}^{(n,k)} &= S_{\theta\theta}^{(n,k)} = -\sigma^{(n,k)} = -Ge_{zz}^{(n,k)} + R^{(n,k)} = -\frac{1}{3}\sigma_{zz}^{(n,k)}, \\
S_{zz}^{(n,k)} &= \sigma_{zz}^{(n,k)} - \sigma^{(n,k)} = 2Ge_{zz}^{(n,k)} - 2R^{(n,k)}, \\
S_{\theta z}^{(n,k)} &= 2Ge_{\theta z}^{(n,k)} + F^{(n,k)}.
\end{aligned} \tag{2.2a}$$

Thay vào điều kiện biên ta được:

$$P(t_n) = 2\pi \int_0^a 3(Ge_{zz}^{(n,k)} - R^{(n,k)}) r dr$$

Do vậy:

$$e_{zz}^{(n,k)} = \frac{1}{3\pi Ga^2} \left\{ P(t_n) + 6\pi \int_0^a R^{(n,k)} r dr \right\} \tag{2.4}$$

Do

$$e_{\theta z} = \frac{1}{2}\beta^{(n,k)} \cdot r \Rightarrow S_{\theta z}^{(n,k)} = G \cdot r \cdot \beta^{(n,k)} + F^{(n,k)} \tag{2.5}$$

Từ điều kiện biên thứ 2 của (2.3) thay vào ta có:

$$M(t_n) = 2G\pi \int_0^a \beta^{(n,k)} \cdot r^3 dr + 2\pi \int_0^a F^{(n,k)} \cdot r^2 dr$$

suy ra

$$\beta^{(n,k)} = \frac{1}{\pi Ga^4} \left[ 2M(t_n) - 4\pi \int_0^a F^{(n,k)} \cdot r^2 dr \right] \tag{2.6}$$

Có

$$S^{(n,k)} = S^{(n-1)} + S_n^{(k)} \quad \text{với} \quad S_n^{(k)} = \sqrt{\frac{2}{3}} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \sqrt{\dot{e}_{ij} \dot{e}_{ij}} dt,$$

thay vào ta được:

$$S_n^{(k)} = \sqrt{\left[ e_{zz}^{(n,k)} - e_{zz}^{(n-1)} \right]^2 + \frac{4}{3} \left[ e_{\theta z}^{(n,k)} - e_{\theta z}^{(n-1)} \right]^2} \tag{2.7}$$

và

$$\sigma_u^{(n,k)} = \sqrt{\left[ \sigma_{zz}^{(n,k)} \right]^2 + 3 \left[ S_{\theta z}^{(n,k)} \right]^2} \tag{2.8}$$

Gọi  $\varphi$  là góc lệch giữa vectơ ứng suất và quỹ đạo biến dạng ta có:

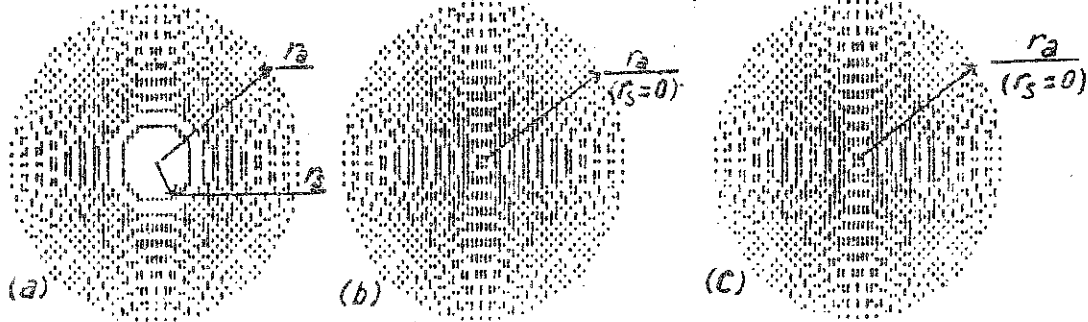
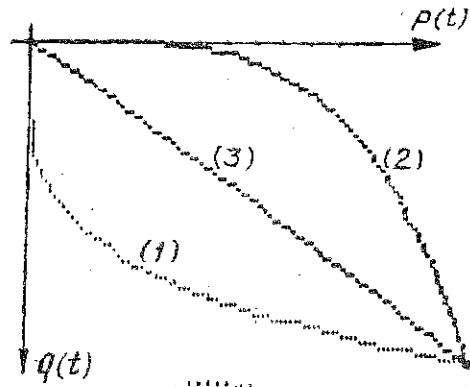
$$(\cos \varphi)^{(n,k)} = \frac{S_{ij}^{(n,k)} \cdot (e_{ij}^{(n,k)} - e_{ij}^{(n-1)})}{\sigma_u^{(n,k)} \cdot S_n^{(k)}} \tag{2.9}$$

Đưa vào các đại lượng không thứ nguyên:

$$q(t) = \frac{2M(t)}{a^3 \pi \sigma_s}; \quad p(t) = \frac{P(t)}{3\pi a^2 \cdot \sigma_s}, \quad \alpha = a \cdot \beta, \quad \bar{S}_{ij} = \frac{S_{ij}}{\sigma_s}$$

Biểu đồ 2. Đồ thị tải ngoài kéo xoắn trụ tròn.

- (1) - cách đặt tải 1
- (2) - cách đặt tải 2
- (3) - cách đặt tải 3



Hình 2. Hình ảnh đàn dèo ở một số giai đoạn với tải đặt cách 1.

(a) - Giai đoạn 36:  $q = 0,82159$ ;  $p = 0,27000$

(b) Giai đoạn 39:  $q = 0,85512$ ;  $q = 0,31687$

(c) Giai đoạn 40:  $q = 0,86604$ ;  $p = 0,3333$

Áp dụng tính toán với thép 40X nên  $\frac{E'}{E} = 0,028$ ,  $\sigma_s = 858 \frac{MN}{m^2}$ ,  $G = 70000 \frac{MN}{m^2}$ . Chia đều các giai đoạn theo tham số tải  $t$  (tăng từ 0 đến 40) ở 3 cách đặt tải:

$$\text{Đặt tải cách 1: } q(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{t}{n}}, \quad p(t) = \frac{1}{3} \left(\frac{t}{n}\right)^2$$

$$\text{Đặt tải cách 2: } q(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{t}{n}\right)^2, \quad \frac{1}{3} \sqrt{\frac{t}{n}}$$

$$\text{Đặt tải cách 3: } q(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{t}{n}, \quad \frac{1}{3} \frac{t}{n}$$

Bảng 2 ghi kết quả tính toán các đại lượng ở 3 giai đoạn theo cách đặt tải 1 tại điểm  $r = a$ . Sai số giữa hai lần lặp thứ 4 và thứ 3 của các đại lượng ở tất cả các giai đoạn khác đều nhỏ hơn ở giai đoạn này.

Kết quả tính toán đối với cả 3 cách đặt tải cho thấy rằng: Sai số giữa hai lần lặp thứ 4 và 3 ở mọi giai đoạn đặt tải của các đại lượng ứng suất đều nhỏ hơn  $4 \cdot 10^{-3}$ , của các đại lượng biến dạng đều nhỏ hơn  $3 \cdot 10^{-3}$ , của cường độ ứng suất đều nhỏ hơn  $10^{-3}$ , của  $\cos \varphi$  đều nhỏ hơn 3,5%. Sai số giữa hai lần lặp thứ 8 và thứ 7 ở mọi giai đoạn đặt tải của các đại lượng ứng suất đều nhỏ hơn  $10^{-5}$ , của cường độ ứng suất và của các đại lượng biến dạng đều nhỏ hơn  $10^{-4}$ , của  $\cos \varphi$  đều nhỏ hơn hoặc ở mức  $10^{-3}$ .

Nhận xét: Qua việc giải hai bài toán trên ta nhận thấy:

+ Sai số giữa hai lần lặp thứ 4 và 3 ở mọi giai đoạn trong các quá trình đặt tải đã xét (ở cả hai bài toán) của các đại lượng ứng suất đều nhỏ hơn 4%, của các đại lượng biến dạng đều nhỏ hơn 3%, của cường độ ứng suất đều nhỏ hơn 2%.

+ Tốc độ hội tụ trong các cách đặt tải của bài toán I chậm hơn tốc độ hội tụ trong các cách đặt tải của bài toán II, lý do vì các cách đặt tải trong bài toán I phức tạp hơn.

+ Do lấy điều kiện  $\sigma_u \geq \sigma_s$  ta áp dụng quy luật dèo,  $\sigma_u < \sigma_s$  ta áp dụng quy luật đàn hồi nên thấy rằng: Nếu  $t_{cd}$  là giá trị của tham số tải để tính toán ở cuối giai đoạn đàn hồi mà tại



đây  $\sigma_u$  sai khác  $\sigma_s$  khá lớn thì trong khoảng từ  $t_{cd}$  đến  $t_{cd+1}$  đáng lẽ ta áp dụng quy luật đàn hồi nhưng từ lần lặp thứ 2 trở đi ta đã áp dụng quy luật dẻo. Do vậy trong cách chia  $n$  giai đoạn để tính toán ta cần chú ý đến điểm này vì nó ảnh hưởng đến tốc độ hội tụ khá nhiều.

Bảng 2

Tải	Số lần lặp	$\frac{\sigma'_{zz}}{\sigma_s}$	$\frac{\tau_{\theta z}}{\sigma_s}$	$\frac{\sigma_u}{\sigma_s}$	$e_{zz} \cdot 10^3$	$a \cdot \beta \cdot 10^3$	$\cos \varphi$
Giai đoạn 36 $q = 0,82159$ $p = 0,27000$	3	0,76999	0,84458	1,6531	3,860	9,210	0,5666
	4	0,77188	0,84440	1,6538	3,870	9,208	0,5819
	sai số	$2,44 \cdot 10^{-3}$	$1,94 \cdot 10^{-4}$	$3,8 \cdot 10^{-4}$	$2,7 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-4}$	1,5%
	7	0,77220	0,84434	1,6538	3,874	9,200	0,5540
	sai số	$2,5 \cdot 10^{-4}$	$3,3 \cdot 10^{-5}$	$2,9 \cdot 10^{-5}$	$1,9 \cdot 10^{-4}$	$3,4 \cdot 10^{-5}$	$1,1 \cdot 10^{-3}$
Giai đoạn 39 $q = 0,85512$ $p = 0,31687$	3	0,95310	0,87218	1,7862	4,917	9,320	0,5931
	4	0,95690	0,87193	1,7868	4,950	9,310	0,5809
	sai số	$1,9 \cdot 10^{-3}$	$2,8 \cdot 10^{-4}$	$3,4 \cdot 10^{-4}$	$3,6 \cdot 10^{-3}$	$8,6 \cdot 10^{-4}$	2,1%
	7	0,95622	0,87176	1,7872	4,946	9,310	0,5745
	sai số	$6 \cdot 10^{-5}$	$9 \cdot 10^{-6}$	$10^{-5}$	$1,1 \cdot 10^{-4}$	$2,3 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-4}$
Giai đoạn 40 $q = 0,86604$ $p = 0,33333$	3	1,0176	0,88109	1,8343	5,311	9,350	0,6077
	4	1,0195	0,88084	1,8350	5,331	9,340	0,5953
	sai số	$1,9 \cdot 10^{-3}$	$2,8 \cdot 10^{-4}$	$3,8 \cdot 10^{-4}$	$3,8 \cdot 10^{-3}$	$9,3 \cdot 10^{-4}$	2%
	7	1,0210	0,88065	1,8355	5,341	9,340	0,5883
	sai số	$7,1 \cdot 10^{-5}$	$10^{-5}$	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$1,4 \cdot 10^{-4}$	$2,9 \cdot 10^{-5}$	$5,9 \cdot 10^{-4}$

## KẾT LUẬN

Với những kết quả tính toán và các nhận xét trên ta rút ra các kết luận sau:

1 - Phương pháp biến thể nghiệm đàn hồi thể hiện trên các bài toán được khảo sát có tính hội tụ ở mọi giai đoạn tải.

2 - Tốc độ hội tụ trong cả quá trình phụ thuộc nhiều vào mức độ phức tạp của quá trình đặt tải. Đối với các quá trình đặt tải đã xét, tốc độ hội tụ khá cao: Tại mọi giai đoạn tải, sai số giữa hai gần đúng thứ 4 và thứ 3 của các đại lượng ứng suất và biến dạng đều dưới 4%; còn sai số giữa hai gần đúng thứ 8 và 7 của chúng đều đã ở mức  $10^{-3}$  hoặc  $10^{-4}$ .

3 - Với 4 lần lặp trên mỗi giai đoạn tải (số giai đoạn từ 25 đến 35) thì thời gian tính toán cho mỗi cách đặt tải trên máy vi tính AT mất khoảng từ 45 giây cho đến 60 giây.

Tác giả chân thành cảm ơn GS TS Đào Huy Bích đã hướng dẫn thực hiện công trình này.

Địa chỉ:

Trường đại học Tổng hợp Hà Nội

Nhận ngày 7/5/1992

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Đào Huy Bích. Biến thể phương pháp nghiệm đàn hồi trong lý thuyết quá trình biến dạng đàn dẻo. Tạp chí khoa học Trường đại học Tổng hợp Hà Nội No 2, 1985.

(xem tiếp trang 26)