

TÍNH TOÁN BẰNG SỐ DAO ĐỘNG UỐN CỦA DẦM LIÊN TỤC DƯỚI TÁC DỤNG CỦA TẢI TRỌNG DI ĐỘNG

ĐỖ XUÂN THỌ, NGUYỄN VĂN KHANG

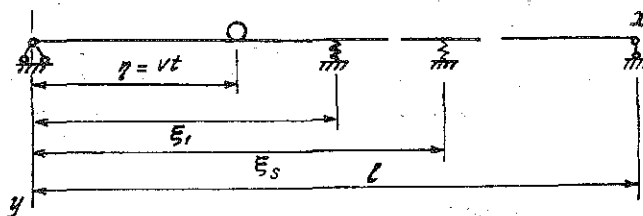
1. MỞ ĐẦU

Nhiều bài toán kỹ thuật, đặc biệt trong ngành giao thông vận tải, dẫn đến việc khảo sát dao động uốn của dầm liên tục dưới tác dụng của tải trọng di động.

Trong [1, 2, 3, 4] đã xét nhiều bài toán dao động của dầm dưới tác dụng của tải trọng di động. Trong công trình này, áp dụng phương pháp của Filipov [3, 4], xây dựng một hệ chương trình tính toán dao động uốn của dầm nhiều gối đỡ chịu tác dụng của tải trọng di động. Sau đó áp dụng để giải một vài bài toán thực tế.

2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN DAO ĐỘNG

Xét dao động uốn của dầm liên tục dài l , có ng gối đỡ trung gian (hình 1).



Hình 1

Một tải trọng có trọng lượng P_0 chuyển động trên dầm với vận tốc v không đổi. Giả thiết dầm đồng chất, thiết diện F và độ cứng chống uốn EI là các hằng số. Trong quá trình chuyển động, tải trọng không tách khỏi dầm. Ký hiệu ξ_i ($i = 1 \dots ng$) là khoảng cách từ gối mút bên trái đến gối trung gian thứ i . Gọi $\eta = vt$ là khoảng cách từ gối mút bên trái đến vị trí của tải trọng di động tại thời điểm t .

Với những giả thiết trên, dễ dàng thiết lập được phương trình dao động uốn của dầm liên tục dưới tác dụng của tải trọng di động [3]:

$$EI \frac{\partial^4 y^*}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 y^*}{\partial t^2} = p(x, t) \quad (2.1)$$

trong đó EI là độ cứng chống uốn, ρF là khối lượng đơn vị dài của dầm, y^* là độ võng của dầm. Hàm vế phải của (2.1) có dạng như sau:

$$p(x, t) = p_d(x, t)\delta(x - vt) + \sum_{i=1}^{ng} p_i(\xi_i, t)\delta(x - \xi_i) \quad (2.2)$$

trong (2.2) $\delta(x)$ là hàm delta Dirac, $p_d(x, t)$ là áp lực của tải trọng di động $p_i(\xi_i, t)$ là phản lực của gối đỡ trung gian.

Biểu thức áp lực của tải trọng di động có dạng [3, 4]

$$p_d(x, t) = p_0 - \frac{p_0}{g} \frac{\partial^2 y^*}{\partial t^2} + G_0 \sin \Omega t \quad (2.3)$$

trong đó $G_0 \sin \Omega t$ là thành phần thẳng đứng của lực quán tính sinh ra do khối lượng không cân bằng của vật thể lặn.

Biểu thức của phản lực đàn hồi tuyến tính của gối đỡ trung gian có dạng:

$$p_i(\xi_i, t) = -C_i^* y^*(\xi_i, t) \quad (2.4)$$

trong đó C_i^* là hệ số cứng của gối đàn hồi.

Đối với dầm hai đầu bản lề như hình 1, ta có các điều kiện biên sau:

$$x = 0 : \quad y^*(0, t) = 0; \quad \frac{\partial^2 y^*(0, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (2.5)$$

$$x = \ell : \quad y^*(\ell, t) = 0; \quad \frac{\partial^2 y^*(\ell, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (2.6)$$

Áp dụng phương pháp khai triển theo các hàm riêng ta tìm nghiệm của (2.1) dưới dạng:

$$y^*(x, t) = y_0 y(x, t) = y_0 \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) \sin \frac{i\pi x}{\ell} \quad (2.7)$$

trong đó:

$$y_0 = \frac{2p_0 \ell^3}{\pi^4 EI} \quad (2.8)$$

là độ võng tĩnh lớn nhất của dầm đơn giản khâu độ ℓ chịu tác dụng của lực p_0 đặt ở giữa dầm.

Thế (2.7) vào (2.1) và thực hiện một vài phép biến đổi đơn giản ta nhận được hệ vô hạn các phương trình vi phân thường

$$\begin{aligned} \ddot{q}_i(t) + \omega_i^{*2} q_i(t) = \frac{2}{\rho F \ell y_0} \left\{ \left[p_0 - \frac{p_0}{g} \frac{\partial^2 y(vt, t)}{\partial t^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + G_0 \sin \Omega t \right] \sin \frac{i\pi}{\ell} vt - \sum_{j=1}^{ng} C_j^* y_0 y(\xi_j, t) \sin \frac{i\pi \xi_j}{\ell} \right\} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Nếu chỉ xét tại vị trí tiếp xúc của tải trọng và dầm; thực hiện phép đổi biến $\eta = vt$ và đưa vào các tham số không thứ nguyên sau

$$\omega_i^2 = \frac{\omega_i^{*2}}{v^2}; \quad \nu = \frac{\Omega \ell}{\pi v}; \quad \alpha = \frac{v \ell}{\pi} \sqrt{\frac{F \rho}{EI}}; \quad \beta = \frac{p_0}{F \rho g \ell}; \quad C_i = \frac{C_i^* y_0}{p_0} \quad (2.10)$$

thì (2.9) có dạng

$$\frac{d^2 q_i(\eta)}{d\eta^2} + \omega_i^2 q_i(\eta) = f_i(\eta) \quad (2.11)$$

với

$$f_i(\eta) = \frac{\pi^2}{(\alpha\ell)^2} \left\{ \left[1 - 2\alpha^2\beta \frac{\ell^2}{\pi^2} \frac{d^2 y(\eta, \eta)}{d\eta^2} + \frac{G_0}{p_0} \sin \frac{\nu\pi\eta}{\ell} \right] \sin \frac{i\pi\eta}{\ell} - \sum_{j=1}^{ng} C_j y(\xi_j, \eta) \sin \frac{i\pi\xi_j}{\ell} \right\} \quad (2.12)$$

3. THUẬT TOÁN VÀ CHƯƠNG TRÌNH TÍNH

Nghiệm của (2.11) được viết trong dạng [3]

$$q_i(\eta) = A_i(b) \cos \omega_i \eta + B_i(b) \sin \omega_i \eta + \frac{1}{\omega_i} \int_b^\eta f_i(\zeta) \sin \omega_i(\eta - \zeta) d\zeta \quad (3.1)$$

trong đó $A_i(b)$, $B_i(b)$ là các hằng số, được xác định bởi hệ thức [3]:

$$\begin{aligned} A_i(b) &= q_i(b) \cos \omega_i b - \frac{1}{\omega_i} \frac{dq_i(b)}{d\eta} \sin \omega_i b \\ B_i(b) &= q_i(b) \sin \omega_i b + \frac{1}{\omega_i} \frac{dq_i(b)}{d\eta} \cos \omega_i b \end{aligned} \quad (3.2)$$

Nếu đưa vào hàm

$$\varphi(\eta) = \ell \frac{d^2 y(\eta, \eta)}{d\eta^2} \quad (3.3)$$

thì ta có [3]

$$y(\eta, \eta) = \frac{1}{\ell} K_1(b)\eta + K_2(b) + \frac{1}{\ell^2} \int_0^\eta (\eta - \zeta) \varphi(\zeta) d\zeta \quad (3.4)$$

với

$$\begin{aligned} K_1(b) &= \ell \frac{dy(b, b)}{d\eta} \\ K_2(b) &= y(b, b) - b \frac{dy(b, b)}{d\eta} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Từ điều kiện biên (2.5) và (2.6) suy ra

$$A_i(0) = B_i(0) = K_1(0) = K_2(0) = 0 \quad (3.6)$$

Đồng thời với $q_i(\eta)$ và $y(\eta, \eta)$ ta tính thêm các đạo hàm của chúng

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_i} \frac{dq_i(\eta)}{d\eta} &= -A_i(b) \sin \omega_i \eta + B_i(b) \cos \omega_i \eta + \\ &+ \frac{1}{\omega_i} \int_b^\eta f_i(\zeta) \cos \omega_i(\eta - \zeta) d\zeta \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\ell \frac{dy(\eta, \eta)}{d\eta} = K_1(b) + \frac{1}{\ell} \int_b^\eta \varphi(\zeta) d\zeta \quad (3.8)$$

Hệ thống các phương trình từ (3.1) đến (3.8) cho phép tìm được các đại lượng cần tính nếu tính được các tích phân về phải.

Chia đoạn $[0, \ell]$ thành n phần bằng nhau với độ dài

$$\tau = \frac{\ell}{n} \quad (3.9)$$

Viết (3.1), (3.4), (3.7) và (3.8) trên n khoảng từ 1 đến n với các hằng số tích phân A_i, B_i, K_1, K_2 được xác định từ khoảng trước đó theo công thức (3.2) và (3.5) như cách làm trong [3]. Độ dài τ chọn đủ nhỏ để có thể xem các hàm $f_i(\eta), \varphi(\eta)$ là các hàm biến đổi chậm do đó có thể xem chúng là hằng và bằng các giá trị trung bình trên khoảng. Ý tưởng quan trọng này khiến ta có thể tính được các tích phân.

Để cho gọn ta đưa vào các ký hiệu

$$\begin{aligned} Q(i, m) &= q_i(m\tau), & Y(m) &= y(m\tau, m\tau), \\ DQ(i, m) &= \frac{1}{\omega_i} \frac{dq_i(m\tau)}{d\eta}, & DY(m) &= \frac{\ell}{n} \frac{dy(m\tau)}{d\eta} \end{aligned} \quad (3.10)$$

và chú ý rằng trên đoạn $m\tau \leq \eta \leq m\tau + \tau$ ta có

$$f_i^*(\eta) = \frac{\pi^2}{(\alpha\ell)^2} \left[1 - \frac{2\alpha^2\beta}{\pi^2} \varphi_{m+1} + \frac{G_0}{p_0} \sin \frac{\nu\pi(2m+1)}{2\ell} \right] \sin \frac{i\pi(2m\tau + \tau)}{2\ell} + \sum_{j=1}^{ng} C_j y_{m+1} \sin \frac{i\pi\xi_j}{\ell} \quad (3.11)$$

trong đó $f_i^*(\eta), \varphi_{m+1}, y_{m+1}$ là các giá trị trung bình của $f_i(\eta), \varphi(\eta), y(\eta)$ trên đoạn đó.

Ta có các hệ truy hồi sau

$$\begin{aligned} Q(i, m+1) &= Q(i, m)CS(i) + DQ(i, m)SN(i) + T_{i, m+1}(1 - CS(i)) \\ DQ(i, m+1) &= DQ(i, m)CS(i) - Q(i, m)SN(i) + T_{i, m+1}SN(i) \\ Y(m+1) &= Y(m) + DY(m) + \frac{1}{2n^2} \varphi_{m+1} \\ DY(m+1) &= DY(m) + \frac{1}{n^2} \varphi_{m+1} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Ở đây ta đã đưa vào các ký hiệu

$$\begin{aligned} CS(i) &= \cos \frac{i^2\pi}{\alpha n}; & SN(i) &= \sin \frac{i^2\pi}{\alpha n} \\ T_{i, m+1} &= \frac{1}{i^4} \left\{ \left[1 - \frac{2\alpha^2\beta}{\pi^2} \varphi_{m+1} + \frac{G_0}{p_0} \sin \frac{\nu\pi(2m+1)}{2n} \right] \sin \frac{i\pi(2m+1)}{2n} - \sum_{j=1}^{ng} C_j y_j \sin \frac{i\pi\xi_j}{\ell} \right\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Khi $m=0$ ta có

$$Q(i, 0) = DQ(i, 0) = Y(0) = DY(0) = 0 \quad (3.14)$$

Khi $\eta = m\tau + \tau$ sử dụng (3.10) ta có

$$Y(m+1) = \sum_{i=1}^{\infty} Q(i, m+1) \sin \frac{i\pi(m+1)}{n} \quad (3.15)$$

Đặt $Y(m+1), Q(i, m+1)$ tính từ (3.12) vào (3.15) ta đi đến hệ phương trình đại số tuyến tính để xác định $ng+1$ ẩn: y_j và φ_{m+1}

$$A \bar{x} = \bar{b} \quad (3.16)$$

trong đó A là ma trận vuông cấp $ng + 1$ với các phần tử có dạng

$$\begin{aligned} a_{ij} &= C_j \sum_{k=1}^{ng} S_{kj} \sin \frac{k\pi \xi_i}{\ell} + \delta_j^i, \quad i, j = \overline{1, ng} \\ a_{ng+1, j} &= C_j \sum_{k=1}^{ng} S_{kj} \sin \frac{k\pi(m+1)}{n}, \quad j = \overline{1, ng} \\ a_{i, ng+1} &= \frac{2\alpha^2 \beta}{\pi^2} \sum_{k=1}^{ng} \gamma_{km} \sin \frac{k\pi \xi_i}{\ell}, \quad i = \overline{1, ng} \\ a_{ng+1, ng+1} &= \frac{1}{2n^2} + \frac{2\alpha^2 \beta}{\pi^2} \sum_{k=1}^{ng} \gamma_{km} \sin \frac{kn(m+1)}{n} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Các phần tử của vectơ \bar{b} có dạng

$$\begin{aligned} b_i &= \sum_{k=1}^{ng} T_{km} \sin \frac{k\pi \xi_i}{\ell}, \quad i = \overline{1, ng} \\ b_{ng+1} &= \sum_{k=1}^{ng} T_{km} \sin \frac{k\pi(m+1)}{n} - Y(m) - DY(m) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Ở đây ta đã đưa vào các ký hiệu

$$\begin{aligned} \gamma_{km} &= \frac{1}{k^2} \sin \frac{k\pi(2m+1)}{2n} (1 - CS(k)) \\ T_{km} &= \left[1 - Gp \sin \frac{\nu\pi(2m+1)}{2n} \right] \gamma_{km} + \\ &\quad + Q(k, m)CS(k) + DQ(k, m)SN(k) \\ S_{kj} &= \frac{1}{k^4} \sin \frac{k\pi \xi_j}{\ell} (1 - CS(k)) \\ Gp &= \frac{G_0}{p_0} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Vectơ \bar{x} chứa $ng + 1$ ẩn với các thành phần.

$$\begin{aligned} x_j &= y_j \quad \text{với } j = \overline{1, ng} \\ x_{ng+1} &= \varphi_{m+1} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Như vậy quá trình tính toán sẽ thực hiện theo thứ tự

- 1 - Thay (3.14) vào (3.17), (3.18), (3.19) để xác định A, \bar{b} .
 - 2 - Giải hệ phương trình (3.16) để xác định y_j, φ_{m+1} .
 - 3 - Thay y_j, φ_{m+1} vào (3.12) tính được $Q(i, 1), DQ(i, 1), Y(1), DY(1)$.
 - 4 - Sử dụng các giá trị này vào các bước 1, 2 trên, tính được $Q(i, 2), DQ(i, 2), Y(2), DY(2)$
- cứ như vậy cho đến khi $m = n - 1$ thì dừng lại.
 Khi đó độ võng và ứng suất động lực được xác định bởi biểu thức.

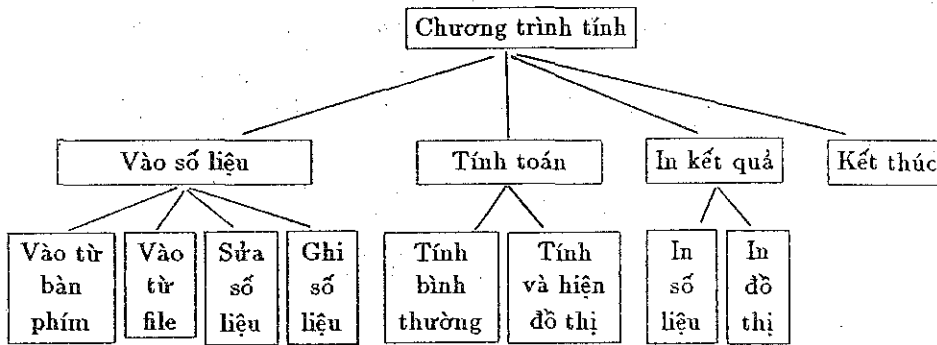
$$\begin{aligned} y(m\tau + \tau, x) &= y_0 \sum_{i=1}^{\infty} Q(i, m+1) \sin \frac{i\pi x}{\ell} \\ \sigma^*(m\tau + \tau, x) &= \frac{8 p_0 \ell}{\pi^2 4W} \sum_{i=1}^{\infty} i^2 Q(i, m+1) \sin \frac{i\pi x}{\ell} \end{aligned} \quad (3.21)$$

trong đó W là mô men kháng uốn của dầm

Dựa vào thuật toán trên một hệ chương trình tính toán dao động uốn của dầm dưới tác dụng của tải trọng di động đã được xây dựng. Sử dụng khả năng mạnh của Turbo - Pascal version 5.5; tận dụng những phần mềm sẵn có của khoa Cơ học ứng dụng trường đại học Bách khoa Hà Nội chúng tôi đã xây dựng hệ thống chương trình khá tiện ích như khả năng lựa chọn theo menu, khả năng đồ họa, lưu trữ, sửa số liệu v.v...

Chương trình có thể chạy trên các máy IBM-PC XT hoặc AT và không phụ thuộc vào màn hình cụ thể.

Dưới đây là cấu trúc của chương trình.



Hình 2

4. THÍ DỤ

Để minh họa việc áp dụng chương trình chúng ta xét hai ví dụ sau

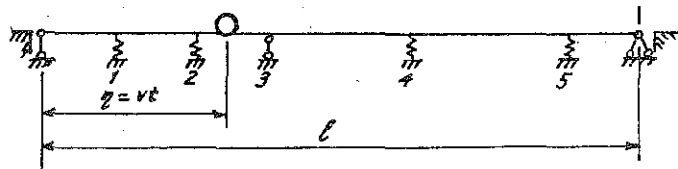
Thí dụ 1

Ta tính dao động uốn của cầu treo dây xiên chịu tác dụng của tải trọng di động. Ở đây các dây xiên được thay thế bằng các gối đàn hồi với độ cứng được xác định theo [5].

$$C_i^* = \frac{E_i^c F_i^c}{S_i} \sin \alpha_i \quad (4.1)$$

trong đó E_i^c , F_i^c , S_i , α_i lần lượt là mô đun đàn hồi, diện tích tiết diện, độ dài và góc nghiêng của dây van.

Mô hình tính toán được vẽ ở hình 3, với các số liệu sau: $l = 540m$, $EI = 550120e + 10T/m$, $F = 0.103e + 2m^2$, $W = 0.2184e + 2m^3$, $ng = 5$, $v = 44700m/h$, $p_0 = 27.2250T$, $nc = 20$, $mc = 8$.



Hình 3

Thứ tự	Tọa độ các gối (m)	Độ cứng các gối (T/m)
1	60m	0.1716 e+6
2	120m	0.2897 e+6
3	180m	0.2100 e+11
4	300m	0.1716 e+6
5	420m	0.0652 e+6

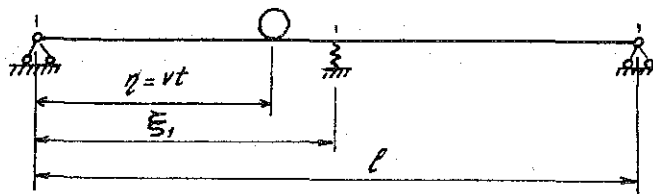
Kết quả cho biết ứng suất và độ võng động lực tại các mặt cắt ở các thời điểm khác nhau. Dưới đây là kết quả tính toán tại mặt cắt $x = 360m$ trong 8 thời điểm khác nhau:

Thời điểm	Độ võng động lực (m)	Ứng suất động lực (T/m ²)
1	-0.1809 e-7	-0.2096 e-1
2	-0.4608 e-7	-0.4856 e-1
3	0.3931 e-7	0.3749 e-1
4	1.7454 e-7	0.9021 e-1
5	7.8511 e-7	1.5099 e-1
6	18.2738 e-7	2.7782 e-1
7	20.9628 e-7	3.3383 e-1
8	0.0000 e-7	0.0000 e-1

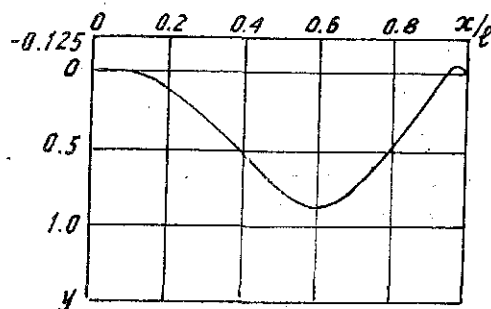
Thí dụ 2

Trên hình 4 minh họa việc sử dụng chương trình để tính dao động uốn của dầm có một gối trung gian bằng các tham số không thứ nguyên: $\alpha = 0.5$; $\beta = 0.5$; $C_1 = 1$.

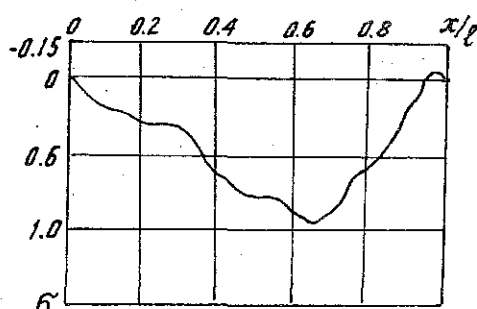
Hình 5 và 6 là đồ thị hệ số độ võng, hệ số ứng suất động lực của dầm tại mặt cắt giữa dầm.



Hình 4



Hình 5



Hình 6

5. KẾT LUẬN

Trên cơ sở thuật toán của Filippov [3, 4] có cải tiến, một hệ chương trình tính dao động uốn của dầm liên tục dưới tác dụng của tải trọng di động đã được xây dựng bằng ngôn ngữ Turbo - Pascal version 5.5. Hệ chương trình này có thể sử dụng để tính toán thiết kế các loại cầu vòm, các kết cấu dầm liên tục chịu tác dụng của tải trọng di động.

Việc xét dầm liên tục dưới tác dụng của nhiều tải trọng di động với quan điểm động lực học hỗn hợp vật rắn và vật thể đàn hồi đang được nghiên cứu. Các kết quả về vấn đề này sẽ được công bố trong thời gian tới.

Địa chỉ:
Trường đại học Bách khoa Hà Nội

Nhận ngày 14/2/1992

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Đỗ Xuân Thọ. Tính toán độ võng và ứng suất động lực của dầm một nhịp chịu tải trọng di động. Tuyển tập các kết quả nghiên cứu khoa học, Viện Khoa học kỹ thuật GTVT, 1988, trang 93 đến 99.
2. Болотин В. В. Задача о колебаниях мостов под действием подвижной нагрузки. Механика и Машиностроение, № 4, 1961, С. 109-115.
3. Филиппов А. П., Кохманюк С. С., Воробьев Ю. С. Воздействие динамических нагрузок на элементы конструкций. Изд. Наукова думка - Киев 1974.
4. Филиппов А. П., Кохманюк С. С. Динамическое воздействие подвижных нагрузок на стезжни. Изд. Наукова думка. Киев, 1967.
5. Качурин В. К. Проектирование вицячих и вантовых мостов. Изд. Транспорт. 1971.

SUMMARY

NUMERICAL CALCULATION OF THE TRANVERSE VIBRATIONS OF THE MULTISPAN BEAMS FOR MOVING LOAD

In this paper the numerical calculation of the transverse vibrations of the multispans beams for moving load is considered. A program has been worked out for the numerical intergration of the motion equations on IBM-PC AT or XT. This program is useful in calculating the vibrations of the suspension bridges.