Tạp chí CƠ HỌC, tập XIV, 1992, số 3 (20 — 25)

MỘT PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN ỔN ĐỊNH ĐỘNG CỦA CÔNG TRÌNH ĐƯỢC TRÌNH BÀY THEO PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

LÊ VĂN MAI

1. MỞ ĐẦU

Khi giải các bài toán ổn định công trình, bên cạnh vấn đề ổn định tĩnh còn có những bài toán ổn định động. Bài toán này đã được đề xuất từ lâu và đã có nhiều tác giả quan tâm giải quyết. Vấn đề được đặt ra là xác định miền ổn định động và miền không ổn định động của một kết cấu dao động có thông số, hoặc kiểm tra trực tiếp trạng thái dao động của kết cấu đó xem trạng thái đó có ổn định hay không.

Nhiều tác giả như Bôlôtin V. V., Goldenblat Y. Y., Xmirnov A. F., v.v... [5], [7] đã tìm ra những phương pháp thực hành để xác định miền ổn định và miền không ổn định của các loại kết cấu khác nhau khi chúng dao động có thông số. Đối với những hệ có số bậc tự do lớn thì việc xác định các miền trên đòi hỏi khối lượng tính toán lớn.

Trong bài báo này, tác giả sẽ đi theo hướng thứ hai, không xác định các miền trên mà xét xem ứng với trường hợp cụ thể kết cấu đã cho có ổn định động hay không ổn định động. Về nội dung, tác giả chỉ giới hạn ở trường hợp không kể đến lực cản và phương trình dao động được mô tả theo phương pháp phần tử hữu hạn.

2. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

Theo phương pháp phần tử hữu hạn, phương trình vi phân của dao động có thông số của một kết cấu có n bậc tự do sẽ có dạng:

$$\{K_0 + [1 + C\phi(t)]K_\sigma\}q(t) + M\ddot{q}(t) = 0, \tag{2.1}$$

trong đó:

K_0 - ma trận đàn hồi thông thường của kết cấu đã cho;

K_σ - ma trận ứng suất ban đầu của kết cấu;

M - ma trận khối lượng của kết cấu.

Các ma trận này đều có cùng kích thước $n \times n$

$q(t)$ - vectơ chuyển vị nút của hệ đã cho.

$\ddot{q}(t)$ - vectơ gia tốc của chuyển vị của hệ đã cho.

Các vectơ này đều là hàm của thời gian t và có n thành phần.

$\phi(t)$ - hàm tuần hoàn có chu kỳ T. Đó là hàm biểu thị sự thay đổi của ngoại lực theo thời gian t. Trường hợp này ta giả thiết $\phi(t)$ có dạng

$$\phi(t) = \text{const} \tag{2.2}$$

C - hệ số hằng số nào đó.

Theo Bôlôtin V. V. [5], ứng với hệ số C và tần số $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ nhất định của ngoại lực, kết cấu đã cho có thể ổn định động hoặc không ổn định động. Khi không ổn định động, do việc kết cấu dao động trong miền không ổn định động nên vectơ chuyển vị $q(t)$ sẽ tăng vô hạn định; ngược lại, khi ổn định động, kết cấu sẽ dao động trong miền ổn định động, vectơ chuyển vị $q(t)$ sẽ dần tới 0. Trên các biên của các miền nói trên, vectơ chuyển vị $q(t)$ là một hàm thay đổi theo chu kỳ T hoặc $2T$. Nếu trong (2.1) cho C bằng 0, thì phương trình vi phân của dao động sẽ có dạng:

$$(K_0 + K_\sigma)q(t) + M\ddot{q}(t) = 0. \tag{2.3}$$

Lúc đó, kết cấu dao động ở trạng thái điều hòa với tần số $\Omega_k (k = 1, 2, \ldots, n)$, trong đó Ω_k được xác định từ phương trình:

$$|K_0 + K_\sigma - \Omega_k^2| = 0 \tag{2.4}$$

Nếu hệ số C không lớn ($C < 1$) thì các miền không ổn định động sẽ ở lân cận giá trị:

$$\omega = 2\Omega_k,\ \frac{2}{2}\Omega_k,\ \frac{2}{3}\Omega_k,\ \frac{2}{4}\Omega_k,\ \frac{2}{5}\Omega_k, \ldots \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.5}$$

trong đó miền ở lân cận giá trị

$$\omega = 2\Omega_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.6}$$

được gọi là miền không ổn định chính. Miền chính có ý nghĩa trong thực tế tính toán là miền ở lân cận giá trị

$$\omega = 2\Omega_1 \tag{2.7}$$

Để tìm biên của miền không ổn định chính thứ nhất, ta sẽ khai triển vectơ chuyển vị $q(t)$ dưới dạng chuỗi Fourier:

$$q(t) = \sum_{k=1,3,5}^{\infty} \left(a_k \sin\frac{k\omega t}{2} + b_k \cos\frac{k\omega t}{2} \right), \tag{2.8}$$

trong đó a_k và b_k là những vectơ gồm n thành phần. Từ phương trình (2.1) và biểu thức (2.8), ta nhận được 2 hệ phương trình đại số tuyến tính thuần nhất của các ẩn số a_k và b_k

$$\begin{aligned}
&\left[K_0 + \left(1 - \frac{C}{2}\right)K_\sigma - \frac{\omega^2}{4}M\right]a_1 + \frac{C}{2}K_\sigma a_3 = 0 \\
&\left(K_0 + K_\sigma - \frac{k^2\omega^2}{4}M\right)a_k + \frac{C}{2}K_\sigma(a_{k-2} + a_{k+2}) = 0 \qquad (k = 3, 5, 7, \ldots) \\
&\left[K_0 + \left(1 + \frac{C}{2}\right)K_\sigma - \frac{\omega^2}{4}M\right]b_1 + \frac{C}{2}K_\sigma b_3 = 0 \\
&\left(K_0 + K_\sigma - \frac{k^2\omega^2}{4}M\right)b_k + \frac{C}{2}K_\sigma(b_{k-2} + b_{k+2}) = 0 \qquad (k = 3, 5, 7, \ldots)
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Điều kiện để 2 hệ (2.9) có nghiệm không tầm thường là các định thức của chúng phải bằng không, tức là:

$$\begin{vmatrix} K_0 + (1 \pm \frac{C}{2})K_\sigma - \frac{\omega^2}{4}M & \frac{C}{2}K_\sigma & 0 & . \\ \frac{C}{2}K_\sigma & K_0 + K_\sigma - \frac{9}{4}\omega^2 M & \frac{C}{2}K_\sigma & . \\ & \frac{C}{2}K_\sigma & K_0 + K\sigma - \frac{25\omega^2}{4}M & . \\ \dots & \dots & \dots & . \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.10)$$

Biên của miền chính tại lân cận giá trị $\omega = 2\Omega_1$ được xác định một cách gần đúng từ hai phương trình:

$$\begin{aligned} &\left|K_0 + (1 + \frac{C}{2})K_\sigma - \frac{\omega_+^2}{4}M\right| = 0 \qquad (a) \\ &\left|K_0 + (1 - \frac{C}{2})K_\sigma - \frac{\omega_-^2}{4}M\right| = 0 \qquad (b) \end{aligned} \qquad (2.11)$$

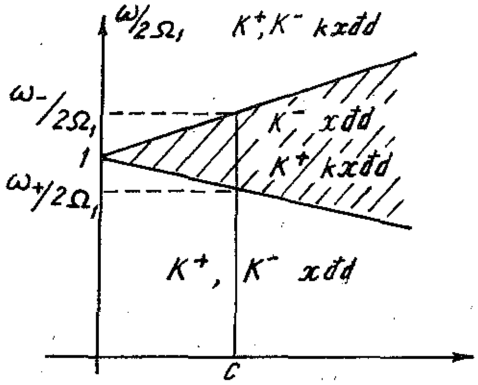
Từ (2.11) ta sẽ tìm được 2 giá trị ω_{+min} và ω_{-min} tương ứng với giá trị C đã cho. Cho C thay đổi, ta sẽ tìm được những giá trị ω_{+min} và ω_{-min} tương ứng. Trên hình 2.1 cho ta biết miền không ổn định chính tại lân cận giá trị $\omega = 2\Omega_1$ (miền gạch chéo)

Như vậy, nếu tần số của ngoại lực thỏa mãn điều kiện.

$$\omega_{+min} < \omega < \omega_{-min} \qquad (2.12)$$

thì kết cấu đã cho không ổn định động.

Việc thiết lập miền trên đòi hỏi một khối lượng tính toán lớn, đặc biệt đối với hệ số có số bậc tự do lớn.



Hình 2.1

Vì lý do trên, ta nên chuyển sang cách kiểm tra trực tiếp xem kết cấu đã cho có ổn định động hay không. Muốn vậy ta gọi:

$$\begin{aligned} K^+ &= K_0 + (1 + \frac{C}{2})K_\sigma - \frac{\omega^2}{4}M \qquad (a) \\ K^- &= K_0 + (1 - \frac{C}{2})K_\sigma - \frac{\omega^2}{4}M \qquad (b) \end{aligned} \qquad (2.13)$$

Trong (2.13), mỗi một phần tử của K^+ và K^- có dạng:

$$
\begin{aligned}
k_{ij}^{+} &= k_{ij}^{0} + \left(1 + \frac{C}{2}\right)k_{ij}^{\sigma} - \frac{\omega^2}{4}m_{ij} \qquad (a)\\
k_{ij}^{-} &= k_{ij}^{0} + \left(1 - \frac{C}{2}\right)k_{ij}^{\sigma} - \frac{\omega^2}{4}m_{ij} \qquad (b)
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

Thay giá trị tần số ω của ngoại lực vào trong (2.13) hoặc (2.14), sau đó áp dụng tiêu chuẩn năng lượng của bài toán dao động riêng cho trường hợp này [6], ta sẽ có:

1 - Nếu

$$\omega < \omega_{+min} < \omega_{-min} \tag{2.15}$$

thì K^+ và K^- xác định dương.

2 - Nếu

$$\omega > \omega_{-min} > \omega_{+min} \tag{2.16}$$

thì K^+ và K^- không xác định dương

3 - Nếu

$$\omega_{+min} < \omega < \omega_{-min} \tag{2.17}$$

thì K^+ không xác định dương và K^- xác định dương.

Từ đó ta đi đến kết luận: Ứng với giá trị của hệ số C và của tần số ω, nếu K^+ không xác định dương còn K^- xác định dương thì kết cấu đã cho không ổn định động; còn nếu K^+ và K^- cùng xác định dương hoặc cùng không xác định dương thì kết cấu đã cho ổn định động.

Dựa vào tính chất xác định dương và không xác định dương của K^+ và K^- và 2 công thức lặp Zeidel sau đây:

$$q_m^{i(+)} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{k_{ij}^{+}}{k_{ii}^{+}} q_m^{j(+)} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{k_{ij}^{+}}{k_{ii}^{+}} q_{m-1}^{j(+)} \tag{2.18}$$

$$q_m^{i(-)} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{k_{ij}^{-}}{k_{ii}^{-}} q_m^{j(-)} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{k_{ij}^{-}}{k_{ii}^{-}} q_{m-1}^{j(-)} \tag{2.19}$$

với $q_0^{(+)}$ và $q_0^{(-)}$ bất kỳ, ta sẽ đi đến các tín hiệu về ổn định động và không ổn định động của một kết cấu đã cho.

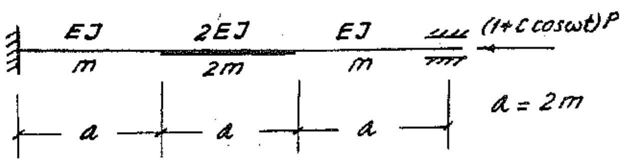
1) Nếu hai quá trình lặp (2.18) và (2.19) cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ thì kết cấu đã cho ổn định động.

2) Nếu quá trình lặp (2.18) phân kỳ và (2.19) hội tụ thì kết cấu đã cho không ổn định động.

Khi dùng hai quá trình lặp trên, ta chỉ cần thực hiện cho đến khi xuất hiện các tín hiệu nói trên đủ để kết luận kết cấu đó có ổn định hay không.

3. THÍ DỤ

Kiểm tra sự ổn định động của hệ cho trên hình vẽ 3.1 trong hai trường hợp.



Hình 3.1

1) Trường hợp thứ nhất: $C = 0,2$; $P = EJ$; $\omega = 1sec^{-1}$; $\dfrac{4m}{EJ} = 1$.

$$K_0 = \frac{EJ}{2}\begin{bmatrix} 9 & 3 & -6 & 6 \\ 3 & 12 & -6 & 4 \\ -6 & -6 & 9 & -3 \\ 6 & 4 & -3 & 12 \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

$$K = \frac{-P}{15}\begin{bmatrix} 18 & 0 & -9 & 1,5 \\ 0 & 8 & -1,5 & -1 \\ -9 & -1,5 & 18 & 0 \\ 1,5 & -1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

$$M = \frac{2m}{105}\begin{bmatrix} 117 & 11 & 27 & -13 \\ 11 & 12 & 13 & -6 \\ 27 & 13 & 117 & -11 \\ -13 & -6 & -11 & 12 \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

$$\frac{2}{EJ}K^{+} = \begin{bmatrix} 6,081429 & 2,973810 & -4,744286 & 5,810952 \\ 2,973810 & 10,798096 & -5,810952 & 4,160953 \\ -4,744286 & -5,810952 & 6,081429 & -2,973810 \\ 5,810952 & 4,160953 & -2,973810 & 10,798096 \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

$$\frac{2}{EJ}K^{-} = \begin{bmatrix} 6,561429 & 2,973810 & -4,984286 & 5,850952 \\ 2,973810 & 11,011429 & -5,850952 & 4,134286 \\ -4,984286 & -5,850952 & 6,561429 & -2,973810 \\ 5,850952 & 4,134286 & -2,973810 & 11,011429 \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

Dùng quá trình lặp (2.18) và (2.19) với

$$q_0^{+} = q_0^{-} = [1 \quad 2 \quad 1 \quad 1]' \tag{3.6}$$

quá trình lặp trên đều hội tụ; hệ đã cho ổn định động.

2) Trường hợp thứ hai:

$$C = 0,4; \quad P = EJ; \quad \omega^2 = 1,2/sec^2; \quad \frac{4m}{EJ} = 1$$

Ứng với trường hợp này:

$$\frac{2}{EJ}K^{+} = \begin{bmatrix} 5,785714 & 2,968571 & -4,637143 & 5,797143 \\ 2,968571 & 10,685714 & -5,797143 & 4,177143 \\ -4,637143 & -5,797143 & 5,785714 & -2,968571 \\ 5,797143 & 4,177143 & -2,968571 & 10,685714 \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

$$\frac{2}{EJ}K^{-} = \begin{bmatrix} 6,745714 & 2,968571 & -5,117143 & 5,877143 \\ 2,968571 & 11,112381 & -5,877143 & 4,123810 \\ -5,117143 & -5,877143 & 6,745714 & -2,968571 \\ 5,877143 & 4,123810 & -2,968571 & 11,112381 \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

Áp dụng công thức lặp (2.18) và (2.19) với

$$q_0^{+} = q_0^{-} = [1 \quad 2 \quad 1 \quad -2]' \tag{3.9}$$

ta thấy quá trình (2.18) phân kỳ và quá trình (2.19) hội tụ. Vậy kết cấu đã cho không ổn định động.

4. KẾT LUẬN

Áp dụng phương pháp này, có thể dễ dàng kiểm tra trạng thái dao động có thông số của một kết cấu bất kỳ được trình bày theo phương pháp phần tử hữu hạn, số phần tử có thể lớn. Thuật toán được dùng khá đơn giản, rất tiện dùng trong tính toán các công trình thực tế.

Địa chỉ:
Trường đại học Xây Dựng Hà Nội

Nhận ngày 27/12/1991

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Lê Văn Mai. Phương pháp phần tử hữu hạn - Bài toán dao động riêng. Tạp chí khoa học kỹ thuật, số 9 + 10/1990
2. Lê Văn Mai. Một phương pháp giải bài toán ổn định các công trình. Tuyển tập các báo cáo hội nghị khoa học toàn quốc cơ học vật rắn biến dạng. Hà nội, 8-1991
3. Oden J. T. Finite elements of nonlinear continua. Mc. Graw - Hill Book Company, 1972
4. Zienkiewicz O. C. The finite elements method in engineering science. Mc. Graw Hill - London, 1971.
5. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. Гостехиздат - 1956.
6. Матевосян Р. Р. Устойчивость сложных стержневых систель. Государственное издательство литературы по строительству, Архитектуре и строительным материалам. Москва 1961.
7. Смирнов А. Ф. Статическая и динамическая устойчивость сооружений. Трансгелдориздат. 1947.

RESUME

SUR UNE METHODE VERIFIANT LA STABILITE DYNAMIQUE DES SYSTEMES DE STRUCTURE SUIVANT LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Dans cet article, l'auteur a présenté une nouvelle méthode pour vérifier rapidement la stabilité dynamique d'un système de structure se composant d'un grand nombre des éléments finis.

En se basant sur les signes très simples, on peut savoir exactement l'état de travail d'un système considéré:

- L'état de stabilité dynamique
- L'état de non-stabilité dynamique.