Tạp chí CƠ HỌC, tập XIV, 1992, số 3 (13 — 19)

GIẢI BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU CÁC HỆ THỐNG CÓ THỜI GIAN CHẬM

NGUYỄN NHẬT LỆ

Bài toán điều khiển tối ưu các hệ thống có thời gian chậm đã được một số tác giả xét đến trong các trường hợp riêng và giải bằng các phương pháp khác nhau [1, 2, 3]. Trong bài này ta xét bài toán điều khiển tối ưu các hệ thống có nhiều thời gian chậm, không đặt giới hạn trên hàm điều khiển và giải nó bằng phương pháp gradient liên hợp [4].

1 BÀI TOÁN

Xét hệ động lực được mô tả bởi hệ phương trình vi phân có thời gian chậm:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-\alpha_1), \ldots, x(t-\alpha_m), u(t), u(t-\beta_1), \ldots, u(t-\beta_s)) \tag{1.1}$$

Với điều kiện đầu:

$$\begin{aligned} x(t) &= \varphi(t); \quad -\alpha_m \leq t \leq 0 \\ u(t) &= \phi(t); \quad -\beta_s \leq t \leq 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Ở đây:
$x(t)$: Véctơ trạng thái n chiều
$u(t)$: Véctơ điều khiển r chiều
α_i, β_j : Các thời gian chậm, với giả thiết:

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_m, \qquad \beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_s \tag{1.3}$$

Tiêu chuẩn tối ưu được cho ở dạng phiếm hàm:

$$J = g(x(t_f)) + \int_0^{t_f} f_0(x(t), x(t-\alpha_1), \ldots, x(t-\alpha_m), u(t), u(t-\beta_1), \ldots, u(t-\beta_s))dt \tag{1.4}$$

Nếu $g \equiv 0$; $f_0 \equiv 1$ ta có bài toán điều khiển tối ưu về thời gian.
Gọi Ω là lớp các điều khiển cho phép
X^k là tập mục tiêu.
Bài toán điều khiển tối ưu các hệ thống có thời gian chậm được phát biểu như sau:
Hãy tìm hàm điều khiển $u*(t) \in \Omega$ sao cho $x(t)$ thỏa mãn hệ phương trình (1.1) với điều kiện đầu (1.2) và điều kiện cuối $x(t_f) \in X^k$, đồng thời phiếm hàm (1.4) đạt giá trị nhỏ nhất:

$$J(u^*) = \min_{u \in \Omega} J(u).$$

Hàm $u^*(t)$ thỏa mãn các điều kiện trên được gọi là điều khiển tối ưu, các trạng thái tương ứng, ký hiệu $x^*(t)$, được gọi là quĩ đạo tối ưu.

2. CÁC PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC HAMILTON

1. Để rõ ràng, đầu tiên giả thiết là chỉ có một thời gian chậm trong vectơ trạng thái và một thời gian chậm trong vectơ điều khiển. Các hàm điều khiển không bị giới hạn.

Cần làm cực tiểu phiếm hàm:

$$J = g(x(t_f)) + \int_0^{t_f} f_0(x(t), x(t-\alpha), u(t), u(t-\beta))dt \tag{2.1}$$

khi $x(t)$ thỏa mãn phương trình:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-\alpha), u(t), u(t-\beta)) \tag{2.2}$$

Với điều kiện đầu:

$$\begin{aligned} x(t) &= \varphi(t); \quad -\alpha \le t \le 0 \\ u(t) &= \phi(t); \quad -\beta \le t \le 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Xây dựng hàm Hamilton ở dạng:

$$H = f_0 + \psi^T f \tag{2.4}$$

Ở đây

$$\psi^T = [\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)]$$

Giả thiết đã có điều khiển tối ưu $u^*(t)$ và quĩ đạo tương ứng $x^*(t)$. Xét các biến phân:

$$\begin{aligned} x(t) &= x^*(t) + \delta x, \quad & x(t-\alpha) = y = x^*(t-\alpha) + \delta y, \\ u(t) &= u^*(t) + \delta u, \quad & u(t-\beta) = z = u^*(t-\beta) + \delta z \end{aligned}$$

Ở đây:

$$\begin{aligned} \delta y &= \delta x, \quad 0 \le t \le t_f - \alpha; \quad \delta y = 0, \quad t_f - \alpha \le t \le t_f; \\ \delta z &= \delta u, \quad 0 \le t \le t_f - \beta; \quad \delta z = 0, \quad t_f - \beta \le t \le t_f \end{aligned} \tag{2.5}$$

Phiếm hàm (2.1) có thể viết ở dạng:

$$J = g(x(t_f)) + \int_0^{t_f} (H - \psi^T \dot{x})dt$$

Biến phân của phiếm hàm là:

$$\delta J = g_x \delta x(t_f) + \int_0^{t_f} (H_x \delta x + H_y \delta y + H_u \delta u + H_z \delta z + H_\psi \delta \psi - \delta \psi^T \dot{x} - \psi^T \delta \dot{x}) dt \tag{2.6}$$

Trong đó: H_x, H_y, H_u, H_z, H_ψ là những gradient của hàm Hamilton theo x, y, u, z, và ψ. Lấy tích phân từng phân thành phần cuối cùng trong (2.6). Ta có:

$$\int_0^{t_f} \psi^T \delta \dot{x} dt = \psi^T \delta x\Big|_0^{t_f} - \int_0^{t_f} \dot{\psi}^T \delta x dt$$

Như vậy cùng với (2.5) ta có:

$$\begin{aligned} \delta J =& (g_x - \psi^T)\delta x(t_f) + \int_0^{t_f} \delta\psi (H_\psi^T - \dot{x}) dt + \int_0^{t_f} \delta x (H_x + H_y + \dot{\psi}^T) dt + \\ &+ \int_{t_f-\alpha}^{t_f} \delta x (H_x + \dot{\psi}^T) dt + \int_0^{t_f-\beta} \delta u (H_u + H_z) dt + \int_{t_f-\beta}^{t_f} \delta u H_u dt + \psi^T \delta x\Big|_{t_f-\alpha^+}^{t_f-\alpha^-} . \end{aligned} \tag{2.7}$$

Điều kiện $\delta J = 0$ với các biến phân $\delta x, \ldots, \delta \psi$ là độc lập, ta nhận được điều kiện cần của điều khiển tối ưu ở dạng các phương trình chính tắc Hamilton:

$$\dot{x}(t) = H_\psi^T = f(x(t), x(t-\alpha), u(t), u(t-\beta)); \quad 0 \le t \le t_f \tag{2.8}$$

$$\dot{\psi}^T(t) = -H_x = -\frac{\partial H(t)}{\partial x(t)}; \quad t_f - \alpha < t \le t_f \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} \dot{\psi}^T(t) &= -H_x - (H_y)\big|_{t+\alpha} = -\frac{\partial H(t)}{\partial x(t)} - \frac{\partial H(\tau)}{\partial x(\tau-\alpha)}\bigg|_{\tau=t+\alpha}; \quad 0 \le t < t_f - \alpha. \\ H_u &= \frac{\partial H(t)}{\partial u(t)} = 0; \qquad t_f - \beta < t \le t_f \\ H_u + (H_z)\big|_{t+\beta} &= \frac{\partial H(t)}{\partial u(t)} + \frac{\partial H(\tau)}{\partial u(\tau - \beta}\bigg|_{\tau=t+\beta}; \qquad 0 \le t < t_f - \beta \end{aligned} \tag{2.10}$$

Với các điều kiện:

$$\psi^T(t_f) = g_x\big|_{t=t_f}; \quad \psi(t_f - \alpha^+) = \psi(t_f - \alpha^-) \tag{2.11}$$

2. Đối với hệ có nhiều thời gian chậm, phương trình động lực có dạng (1.1) và phiếm hàm có dạng (1.4), bằng phương pháp tương tự, chúng ta nhận được các phương trình chính tắc Hamilton sau:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-\alpha_1), \ldots, x(t-\alpha_m), u(t), u(t-\beta_1), \ldots, u(t-\beta_s)) \tag{2.12}$$

$$\dot{\psi}^T(t) = -\frac{\partial H(t)}{\partial x(t)}\ ; \qquad t_f - \alpha_1 < t \le t_f \tag{2.13}$$

$$\dot{\psi}^T(t) = -\frac{\partial H(t)}{\partial x(t)} - \sum_{i=1}^{m-k} \frac{\partial H(\tau)}{\partial x(\tau - \alpha_i)}\bigg|_{\tau = t+\alpha_i}\ ; \qquad \begin{matrix} t_f - \alpha_{m+1-k} < t < t_f - \alpha_{m-k} \\ (k = 1, 2, \ldots, m-1) \end{matrix}$$

$$\dot{\psi}^T(t) = -\frac{\partial H(t)}{\partial x(t)} - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial H(\tau)}{\partial x(\tau - \alpha_i)}\bigg|_{\tau = t+\alpha_i}\ ; \quad 0 \le t < t_f - \alpha_m$$

$$\frac{\partial H(t)}{\partial u(t)} = 0\ ; \qquad t_f - \beta_1 < t \le t_f \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial H(t)}{\partial u(t)} + \sum_{j=1}^{s-k} \frac{\partial H(\tau)}{\partial u(\tau - \beta_j)}\bigg|_{\tau = t+\beta_j} = 0; \qquad \begin{matrix} t_f - \beta_{s+1-k} < t < t_f - \beta_{s-k} \\ (k = 1, 2, \ldots, s-1) \end{matrix}$$

$$\frac{\partial H(t)}{\partial u(t)} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial H(\tau)}{\partial u(\tau - \beta_j)}\bigg|_{\tau = t+\beta_j} = 0; \quad 0 \le t < t_f - \beta_s$$

$$\psi^T(t_f) = g_x\big|_{t=t_f}\ ; \quad \psi(t_f - \alpha_i^+) = \psi(t_f - \alpha_i^-)\ ; \quad i = 1, \ldots, m \tag{2.15}$$

Như vậy, (2.12) là phương trình động lực của hệ, (2.13) là các phương trình liên hợp, mỗi phương trình nghiệm trong một khoảng thời gian nhất định; (2.14) là những điều kiện cực trị của hàm Hamilton; còn (2.15) là những điều kiện cuối và điều kiện liên tục giữa các khoảng của $\psi(t)$.

Chúng ta có thể dùng những phương pháp số để giải các phương trình nói trên.

3. PHƯƠNG PHÁP GRADIENT LIÊN HỢP

Giả thiết tiêu chuẩn tối ưu được cho dưới dạng (1.4); phương trình động lực dưới dạng (1.1) với điều kiện đầu (1.2).

Chúng ta lập hàm Hamilton dưới dạng (2.4). Các phương trình liên hợp được thiết lập dưới dạng (2.13) với điều kiện (2.15). Điều kiện cực trị được viết dưới dạng (2.14).

Sau đây là thuật toán của phương pháp gradient liên hợp để giải bài toán nói trên.

1. Ước đoán điều khiển ban đầu $u_i(t)$; i - chỉ số lặp.
2. Giải hệ phương trình vi phân chứa thời gian chậm (1.1) với điều kiện đầu (1.2) từ $t = 0$ đến $t = t_f$. Nhận được $x_i(t)$. Đặt vào bộ nhớ $u_i(t)$ và $x_i(t)$.
3. Tính phiếm hàm (1.4) đối với $u_i(t)$ và $x_i(t)$ đã biết, nhận được $J(u_i)$.
4. Giải ngược hệ phương trình liên hợp (2.13) từ $t = t_f$ đến $t = 0$ trong các khoảng tương ứng và điều kiện (2.15), đồng thời tính gradient của hàm Hamilton khi $u(t) = u_i(t)$.

$$g_i(t) = \begin{cases} \dfrac{\partial H(t)}{\partial u(t)}\ ; \quad t_f - \beta_1 \le t \le t_f \\ \dfrac{\partial H(t)}{\partial u(t)} + \displaystyle\sum_{j=1}^{s-k} \frac{\partial H(\tau)}{\partial u(\tau - \beta_j)}\bigg|_{\tau = t+\beta_j}\ ; \quad \begin{matrix} t_f - \beta_{s+1-k} < t < t_f - \beta_{s-k} \\ (k = 1, \ldots, s-1) \end{matrix} \\ \dfrac{\partial H(t)}{\partial u(t)} + \displaystyle\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial H(\tau)}{\partial u(\tau - \beta_j)}\bigg|_{\tau = t+\beta_j}\ ; \quad 0 \le t < t_f - \beta_s \end{cases}$$

5. Xác định hướng tìm:

$$s_i(t) = -g_i(t) + \omega_{i-1} \cdot s_{i-1}(t)$$

Ở đây:

$$\omega_{i-1} = \frac{I_i}{I_{i-1}}, \quad i \geq 0; \quad \omega_{-1} = 0$$

$$I_i = \int_0^{t_f} g_i^T(t) \cdot g_i(t)dt \ ; \quad s_0(t) = -g_0(t) = -g(t)\Big|_{u=u_0}$$

6. Xác định điều khiển mới:

$$u_{i+1}(t) = u_i(t) + \lambda_i \cdot s_i(t)$$

Ở đây thông số λ_i được tìm bằng phương pháp cực trị một hướng:

$$J(u_i + \lambda_i s_i) = \min_{\lambda \geq 0} J(u_i + \lambda s_i)$$

Các bước 2, 3, 4, 5, 6 được lặp lại cho tới khi đạt được độ chính xác chọn trước.

Nếu đặt $\omega_i = 0$ thì phương pháp gradient liên hợp chuyển thành phương pháp độ dốc lớn nhất.

4. ÁP DỤNG

Xét hệ động lực:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\
\dot{x}_3(t) &= x_4(t) \\
\dot{x}_4(t) &= -a_1 x_1(t) - a_2 x_2(t) - a_3 x_3(t) - a_4 x_4(t) - b_1 x_1(t-\alpha_1) - b_2 x_2(t-\alpha_1) - \\
&\quad - b_3 x_3(t-\alpha_1) - c_1 x_1(t-\alpha_2) + c_1 u(t-\beta) + c_2 z(t-\beta)
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Trong đó: a_i, b_i, c_i là các hằng số, còn $z(t)$ là hàm cho trước.

Phiếm hàm có dạng:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{t_f} \Big(\sum_{i=1}^{4} p_i(\Delta x_i)^2 + \eta(\Delta u)^2\Big) dt \tag{4.2}$$

$$\Delta x_i = x_i(t) - x_{iz} \ ; \quad i = 1, \ldots, 4$$

$$\Delta u = u(t) - u_z$$

p_i và η là các trọng số.

Ở đây: x_{iz} và u_z là những giá trị đầu của các trạng thái và điều khiển.

Xây dựng hàm Hamilton ở dạng:

$$H = f_0 + \psi^T \cdot f \tag{4.3}$$

f là vế phải của (4.1), f_0 là hàm trong dấu tích phân của (4.2), còn $\psi^T = [\psi_1, \dots, \psi_4]$ là các biến liên hợp. Phương trình vi phân đối với các biến liên hợp.

- Trong khoảng I : $t_f - \alpha_1 \leq t \leq t_f$

$$\dot{\psi}_i(t) = -\frac{\partial H(t)}{\partial x_i(t)}\ ; \quad i = 1, \dots, 4 \tag{4.4}$$

- Trong khoảng II: $t_f - \alpha_2 \leq t \leq t_f - \alpha_1$

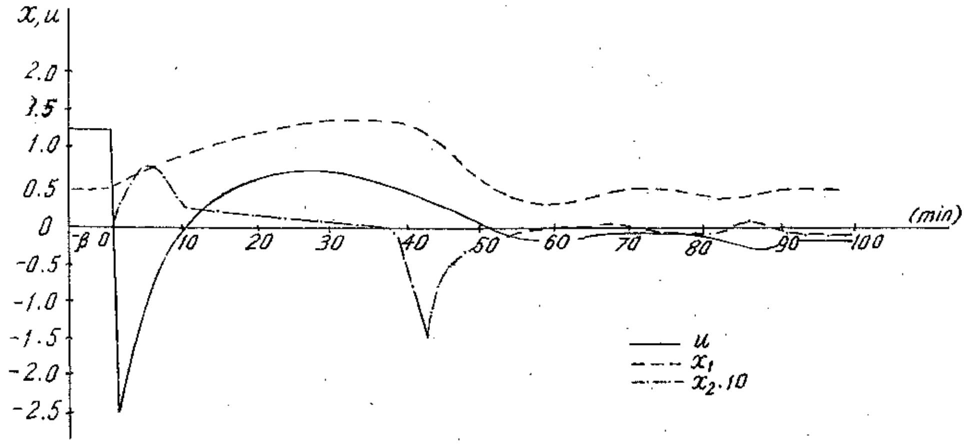
$$\dot{\psi}_i(t) = -\frac{\partial H(t)}{\partial x_i(t)} - \left.\frac{\partial H(\tau)}{\partial x_i(\tau - \alpha_1)}\right|_{\tau = t+\alpha_1}\ ; \quad i = 1, \dots, 4 \tag{4.5}$$

- Trong khoảng III: $0 \leq t \leq t_f - \alpha_2$

$$\dot{\psi}_i(t) = -\frac{\partial H(t)}{\partial x_i(t)} - \left.\frac{\partial H(\tau)}{\partial x_i(\tau - \alpha_1)}\right|_{\tau = t+\alpha_1} - \left.\frac{\partial H(\tau)}{\partial x_i(t - \alpha_2)}\right|_{\tau = t+\alpha_2}\ ; \quad i = 1, \dots, 4 \tag{4.6}$$

Gradient của hàm Hamilton được xác định theo (2.14) và trong khoảng như trên.

Dùng phương pháp mô tả trong đoạn III, đối với trường hợp $\alpha_1 = 20$ phút; $\alpha_2 = 17$ phút; $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 = 37$ phút được kết quả biểu diễn trên hình 1 và hình 2.

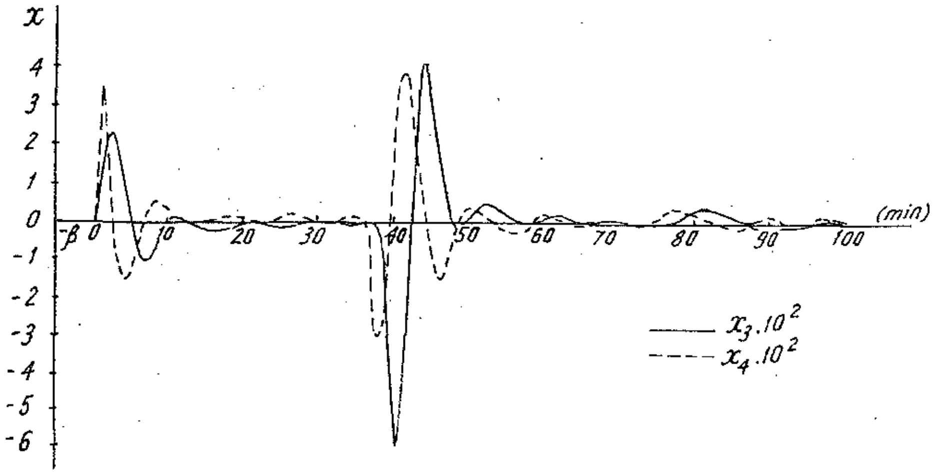


Hình 1

Chương trình máy tính cũng được thử nghiệm cho ví dụ trong [5]. Ở đây chỉ có một thời gian chậm trong biến trạng thái và tác giả giải bằng phương pháp nhúng. Hai kết quả là trùng nhau.

KẾT LUẬN

Đã thiết lập được các phương trình chính tắc Hamilton đối với hệ có nhiều thời gian chậm. Đã dùng phương pháp gradient liên hợp và xây dựng một chương trình máy tính để giải quyết bài toán đặt ra.



Hình 2

Địa chỉ:
Trường đại học Bách khoa Hà Nội

Nhận ngày 14/2/1992

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Aggarwal J. K. Computation of control for time delay systems. IEEE, Trans. Aut. Control, 1970, AC-15; No 6.
2. Frankena J. E. Optimal Control problems with delay J. of Eng. Mathematics, 1975, Vol. 9, No 1.
3. Ray W. H., Soliman M. A. The optimal control of processes containing pure delays. Chem. Eng. Science, 1970, Vol. 25.
4. Ladson L. S. Conjugate gradient method for optimal control problems. IEEE. Trans. Aut. Control, 1967, AC-12; No 2.
5. Chan H. C., Perkins W. R. Optimization of time delay systems using parameter imbedding. Automatica, 1973, Vol. 9, No 2.

SUMMARY

OPTIMAL CONTROL OF SYSTEMS WITH TIME DELAYS

Hamilton's canonical equations and an algorithm of the conjugate gradient method are developed for systems with time delays. The results are applied to one concrete system.