Tạp chí CƠ HỌC, tập XIV, 1992, số 2 (17 — 22)

VỀ MỘT MÔ HÌNH DAO ĐỘNG XOẮN PHI TUYẾN CÓ CÁC KHỐI LƯỢNG THU GỌN BIẾN ĐỔI

NGUYỄN VĂN KHANG, TRẦN ĐÌNH SƠN

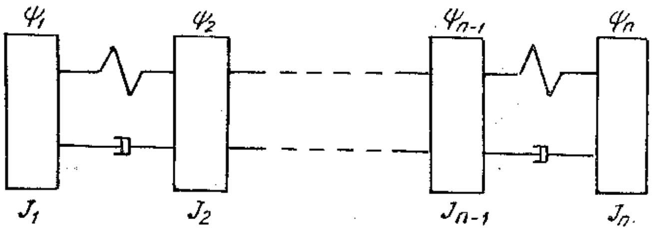
1. MỞ ĐẦU

Mô hình dao động xoắn của các hệ truyền động là một trong những mô hình dao động gặp phổ biến trong kỹ thuật cơ khí. Trong nhiều tài liệu về động lực học máy [1, 2, 3], người ta mới chỉ quan tâm tới tính toán dao động xoắn tuyến tính của các hệ mô tả bởi các phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng số. Bài toán dao động xoắn tuyến tính của hệ có khối lượng thu gọn biến đổi cũng đã được đề cập đến trong [4, 5, 8].

Các mô hình dao động xoắn phi tuyến còn ít được nghiên cứu. Trong công trình này, xét bài toán thiết lập các phương trình vi phân dao động tham số của các mô hình dao động xoắn phi tuyến của các hệ có nhiều khối lượng thu gọn biến đổi. Việc giải hệ phương trình này sẽ được đề cập đến trong những bài báo tiếp theo.

2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN PHI TUYẾN CỦA HỆ DAO ĐỘNG XOẮN CÓ CÁC KHỐI LƯỢNG THU GỌN BIẾN ĐỔI

Mô hình dao động xoắn của hệ có nhiều khối lượng thu gọn biến đổi được biểu diễn trên hình 1.



Hình 1

Trong đó các mômen quán tính thu gọn có dạng:

$$J_i = J_i(\psi_i) \qquad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{2.1}$$

Biểu thức động năng của hệ có dạng:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} J_i(\psi_i)\dot{\psi}_i^2 \tag{2.2}$$

Chú ý đến tính chất phi tuyến của các phần tử đàn hồi và phần tử cản, ta có các biểu thức của hàm thế và hàm hao tán như sau:

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} C_i^{(1)}(\psi_i - \psi_{i+1})^2 + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n-1} C_i^{(3)}(\psi_i - \psi_{i+1})^4 \tag{2.3}$$

$$R = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{(1)}(\dot\psi_i - \dot\psi_{i+1})^2 + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{(3)}(\dot\psi_i - \dot\psi_{i+1})^4 \tag{2.4}$$

Thế các biểu thức (2.2), (2.3), (2.4) vào phương trình Lagrange II

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\psi_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial \psi_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \psi_i} - \frac{\partial R}{\partial \dot\psi_i} + Q_i^*, \tag{2.5}$$

ta nhận được phương trình vi phân dao động xoắn phi tuyến của hệ có nhiều khối lượng thu gọn biến đổi:

$$\begin{aligned}
&J_1\ddot\psi_1 + \frac{1}{2}J_1'\dot\psi_1^2 + C_1^{(1)}(\psi_1 - \psi_2) + C_1^{(3)}(\psi_1 - \psi_2)^3 + b_1^{(1)}(\dot\psi_1 - \dot\psi_2) + b_1^{(3)}(\dot\psi_1 - \dot\psi_2)^3 = M_1\\
&J_2\ddot\psi_2 + \frac{1}{2}J_2'\dot\psi_2^2 - c_1^{(1)}(\psi_1 - \psi_2) + C_2^{(1)}(\psi_2 - \psi_3) - C_1^{(3)}(\psi_1 - \psi_2)^3 + C_2^{(3)}(\psi_2 - \psi_3)^3 -\\
&\quad - b_1^{(1)}(\dot\psi_1 - \dot\psi_2) + b_2^{(1)}(\dot\psi_2 - \dot\psi_3) - b_1^{(3)}(\dot\psi_1 - \dot\psi_2)^3 + b_2^{(3)}(\dot\psi_2 - \dot\psi_3)^3 = M_2\\
&\dots\dots\dots\\
&J_n\ddot\psi_n + \frac{1}{2}J_n'\dot\psi_n^2 - C_{n-1}^{(1)}(\psi_{n-1} - \psi_n) - C_{n-1}^{(3)}(\psi_{n-1} - \psi_n)^3 -\\
&\quad - b_{n-1}^{(1)}(\dot\psi_{n-1} - \dot\psi_n) - b_{n-1}^{(3)}(\dot\psi_{n-1} - \dot\psi_n)^3 = M_n
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Dưới đây, xét bài toán hay gặp trong kỹ thuật. Đó là trường hợp mômen thu gọn của động cơ $J_1 = \text{const}$, mô tơ quay đều ($\psi_1 = \Omega t$), các góc quay của khâu thu gọn thứ i ($i = 2, 3, \dots, n$) khác góc quay của động cơ một đại lượng nhỏ, các mô men M_i là hàm tuần hoàn của t, chu kỳ $T = 2\pi/\Omega$. Như vậy ta có:

$$\begin{aligned}
&\psi_1 = \Omega t\\
&\psi_i = \psi_1 + \varphi_i = \Omega t + \varphi_i \quad (i = 2, 3, \dots, n)\\
&M_i(\Omega t, \psi_i, \dot\psi_i) = M_i(\Omega t + 2\pi, \psi_i, \dot\psi_i)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Do giả thiết φ_i nhỏ, ta có thể khai triển Taylor các hàm $J_i(\psi_i)$, $J_i'(\psi_i)$, $M_i(\Omega t, \psi_i, \dot\psi_i)$ thành các chuỗi như sau:

$$\begin{aligned}
&J_i(\psi_i) = \overline{J}_i(\Omega t) + \overline{J}_{i,i}(\Omega t)\varphi_i + \frac{1}{2}\overline{J}_{i,ii}(\Omega t)\varphi_i^2 + \frac{1}{6}\overline{J}_{i,iii}(\Omega t)\varphi_i^3 + \dots\\
&J_i'(\psi_i) = \overline{J}_{i,i}(\Omega t) + \overline{J}_{i,ii}(\Omega t)\varphi_i + \frac{1}{2}\overline{J}_{i,iii}(\Omega t)\varphi_i^2 + \frac{1}{6}\overline{J}_{i,iiii}(\Omega t)\varphi_i^3 + \dots\\
&M_i(\Omega t, \psi_i, \dot\psi_i) = \overline{M}_i(\Omega t) + \overline{M}_{i,i}(\Omega t)\varphi_i + \overline{M}_{i,,i}(\Omega t)\dot\varphi_i +\\
&+ \frac{1}{2}\overline{M}_{i,ii}(\Omega t)\varphi_i^2 + \frac{1}{2}\overline{M}_{i,,ii}(\Omega t)\dot\varphi_i^2 + \frac{1}{6}\overline{M}_{i,iii}(\Omega t)\varphi_i^2 + \frac{1}{6}\overline{M}_{i,,iii}(\Omega t)\dot\varphi_i^3 + \dots
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Trong đó ta ký hiệu:

$$\overline{J}_{i.\underbrace{ii\ldots i}_{k}}(\Omega t) = \left.\frac{d^k J_i(\psi_i)}{d\psi_i^k}\right|_{\varphi_i=0}$$

$$\overline{M}_{i.\underbrace{ii\ldots i}_{k}}(\Omega t) = \left.\frac{d^k M_i}{d\psi_i^k}\right|_{\substack{\varphi_i=0\\ \dot{\varphi}_i=0}}$$

$$\overline{M}_{i..\underbrace{ii\ldots i}_{k}}(\Omega t) = \left.\frac{d^k M_i}{d\dot{\psi}_i^k}\right|_{\substack{\varphi_i=0\\ \dot{\varphi}_i=0}}$$

Thế (2.7), (2.8) vào (2.6) và bỏ qua các vô cùng bé ở bậc ≥ 4, ta thu được các phương trình sau:

$$\begin{aligned}
&-b_1^{(1)}\dot{\varphi}_2 - C_1^{(1)}\varphi_2 = M_1 + C_1^{(3)}\varphi_2^3 + b_1^{(3)}\dot{\varphi}_2^3\\
&\overline{J}_i\ddot{\varphi}_i - b_{i-1}^{(1)}\dot{\varphi}_{i-1} + \left[-\overline{M}_{i..i} + b_{i-1}^{(1)} + b_i^{(1)} + \Omega\overline{J}_{i.i}\right]\dot{\varphi}_i - b_i^{(1)}\dot{\varphi}_{i+1} -\\
&- C_{i-1}\varphi_{i-1} + \left[-\overline{M}_{i.i} + C_{i-1}^{(1)} + C_i^{(1)} + \frac{1}{2}\Omega^2\overline{J}_{i.ii}\right]\varphi_i - C_i^{(1)}\varphi_{i+1} =\\
&= h_i(\Omega t) + \Phi_i(\Omega t, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \dot{\varphi}_2, \ldots, \dot{\varphi}_n) \quad (i = 2, 3, \ldots, n)
\end{aligned} \tag{2.9}$$

trong đó, phương trình đầu tiên cho phép xác định mô men M_1 cần thiết để đảm bảo cho khâu thứ nhất quay đều, và ta qui ước đưa vào các tham số hình thức $C_n^{(1)} = b_n^{(1)} = C_n^{(3)} = b_n^{(3)} = 0$, $\varphi_1 \equiv 0$. Còn h_i và Φ_i được xác định như sau:

$$\begin{aligned}
h_i =&\overline{M}_i - \frac{1}{2}\Omega^2\overline{J}_{i,i}\\
\Phi_i =&\frac{1}{2}\overline{M}_{i.ii}\varphi_i^2 + \frac{1}{6}\overline{M}_{i,iii}\varphi_i^3 + \frac{1}{2}\overline{M}_{i..ii}\dot{\varphi}_i^2 + \frac{1}{6}\overline{M}_{i..iii}\dot{\varphi}_i^3 -\\
&- \overline{J}_{i.i}\left[\varphi_i\ddot{\varphi}_i + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_i^2\right] - \overline{J}_{i,ii}\left[\frac{1}{2}\varphi_i^2\ddot{\varphi}_i + \frac{1}{2}\varphi_i\dot{\varphi}_i^2 + \Omega\varphi_i\dot{\varphi}_i\right] -\\
&- \overline{J}_{i,iii}\left[\frac{1}{2}\Omega\varphi_i^2\dot{\varphi}_i + \frac{1}{4}\Omega^2\varphi_i^2\right] - \frac{1}{12}\Omega^2\overline{J}_{i,iiii}\varphi_i^3 + C_{i-1}^{(3)}(\varphi_{i-1} - \varphi_i)^3 -\\
&- C_i^{(3)}(\varphi_i - \varphi_{i+1})^3 + b_{i-1}^{(3)}(\dot{\varphi}_{i-1} - \dot{\varphi}_i)^3 - b_i^{(3)}(\dot{\varphi}_i - \dot{\varphi}_{i-1})^3
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Trong hệ phương trình (2.9), kể từ phương trình thứ hai trở đi, ta có thể viết dưới dạng ma trận như sau:

$$\underline{M}(\Omega t)\ddot{\vec{q}} + \underline{B}(\Omega t)\dot{\vec{q}} + \underline{C}(\Omega t)\vec{q} = \vec{h}(\Omega t) + \vec{\Phi}(\Omega t, \vec{q}, \dot{\vec{q}}, \ddot{\vec{q}}) \tag{2.11}$$

trong đó

$$\vec{q} = \begin{bmatrix}\varphi_2\\ \varphi_3\\ \vdots\\ \varphi_n\end{bmatrix} \; ; \quad \underline{M}(\Omega t) = \begin{bmatrix}\overline{J}_2 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \overline{J}_3 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & \overline{J}_n\end{bmatrix}$$

$$\underline{B}(\Omega t) =$$

$$\begin{bmatrix}(b_1^{(1)}+b_2^{(1)}+\Omega\overline{J}_{2.2}-\overline{M}_{2.2}) & -B_2^{(1)} & \ldots & 0\\ -b_2^{(1)} & (b_2^{(1)}+b_3^{(1)}+\Omega\overline{J}_{3,3}-\overline{M}_{3..3}) & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & (b_{n-1}^{(1)}+b_n^{(1)}+\Omega\overline{J}_{n.n}-\overline{M}_{n..n})\end{bmatrix}$$

$$\underline{C}(\Omega t) = \begin{bmatrix} (C_1^{(1)}+C_2^{(1)}+\frac{\Omega^2}{2}\overline{J}_{2,22}-\overline{M}_{2,2}) & -C_2^{(1)} & \dots & 0 \\ -C_2^{(1)} & (C_2^{(1)}+C_3^{(1)}+\frac{\Omega^2}{2}\overline{J}_{3,33}-\overline{M}_{3,3}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (C_{n-1}^{(1)}+C_n^{(1)}+\frac{\Omega^2}{2}\overline{J}_{n,nn}-\overline{M}_{n,n}) \end{bmatrix}$$

3. CÁC TRƯỜNG HỢP RIÊNG

1. Hệ phi tuyến có hai khối lượng tập trung

Trong (2.9), ta cho $n = 2$, thì sẽ thu được phương trình dao động dạng như sau:

$$\begin{aligned} &\overline{J}_2\ddot{\varphi}_2 + [b_1^{(1)} + \Omega\overline{J}_{2,2} - \overline{M}_{2,,2}]\dot{\varphi}_2 + [C_1^{(1)} + \frac{1}{2}\Omega^2\overline{J}_{2,22} - \overline{M}_{2,2}]\varphi_2 = \\ &= \overline{M}_2 - \frac{1}{2}\Omega^2\overline{J}_{2,2} + \frac{1}{2}\overline{M}_{2,22}\varphi_2^2 + \frac{1}{6}\overline{M}_{2,222}\varphi_2^3 + \frac{1}{2}\overline{M}_{2,,22}\dot{\varphi}_2^2 + \\ &+ \frac{1}{6}\overline{M}_{2,,222}\dot{\varphi}_2^3 - \overline{J}_{2,2}[\varphi_2\ddot{\varphi}_2 + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_2^2] - \overline{J}_{2,22}[\frac{1}{2}\varphi_2^2\ddot{\varphi}_2 + \frac{1}{2}\varphi_2\dot{\varphi}_2^2 + \Omega\varphi_2\dot{\varphi}_2] - \\ &- \overline{J}_{2,222}[\frac{1}{4}\Omega^2\varphi_2^2 + \frac{1}{2}\Omega\varphi_2^2\dot{\varphi}_2] - \frac{1}{12}\Omega^2\overline{J}_{2,2222}\varphi_2^3 - C_1^{(3)}\varphi_2^3 - b_1^{(3)}\dot{\varphi}_1^3 \end{aligned} \tag{3.1}$$

2. Hệ phi tuyến có ba khối lượng tập trung

Từ (2.9), (2.10), (2.11) ta thấy, với $n = 3$, phương trình dao động có dạng:

$$\underline{M}(\Omega t)\ddot{\vec{q}} + \underline{B}(\Omega t)\dot{\vec{q}} + \underline{C}(\Omega t)\vec{q} = \vec{h}(\Omega t) + \vec{\Phi}(\Omega t, \vec{q}, \dot{\vec{q}}, \ddot{\vec{q}}) \tag{3.2}$$

trong đó:

$$\vec{q} = \begin{bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} ; \qquad \underline{M}(\Omega t) = \begin{bmatrix} \overline{J}_2 & 0 \\ 0 & \overline{J}_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \underline{B}(\Omega t) &= \begin{bmatrix} (b_1^{(1)} + b_2^{(1)} + \Omega\overline{J}_{2,2} - \overline{M}_{2,,2}) & -b_2^{(1)} \\ -b_2^{(1)} & (b_2^{(1)} + \Omega\overline{J}_{3,3} - \overline{M}_{3,,3}) \end{bmatrix} \\ \underline{C}(\Omega t) &= \begin{bmatrix} (C_1^{(1)} + C_2^{(1} + \frac{1}{2}\Omega^2\overline{J}_{2,22} - \overline{M}_{2,2}) & -C_2^{(1)} \\ -C_2^{(1)} & (C_2^{(1)} + \frac{1}{2}\Omega^2\overline{J}_{3,33} - \overline{M}_{3,3}) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Còn $\vec{h}$, $\vec{\Phi}$ được xác định như sau:

$$\begin{aligned} \vec{h}(\Omega t) &= \begin{bmatrix} \overline{M}_2 - \frac{1}{2}\Omega^2\overline{J}_{2,2} \\ \overline{M}_3 - \frac{1}{2}\Omega^2\overline{J}_{3,3} \end{bmatrix} \\ \vec{\Phi}(\Omega t) &= \begin{bmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.4}$$

trong đó:

$$
\begin{aligned}
\Phi_2 = & \frac{1}{2}\overline{M}_{2,22}\varphi_2^2 + \frac{1}{6}\overline{M}_{2,222}\varphi_2^3 + \frac{1}{2}\overline{M}_{2,,22}\dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{6}\overline{M}_{2,,222}\dot{\varphi}_2^3 - \overline{J}_{2.2}\big[\varphi_2\ddot{\varphi}_2 + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_2^2\big] - \\
& - \overline{J}_{2,22}\big[\frac{1}{2}\varphi_2^2\ddot{\varphi}_2 + \frac{1}{2}\varphi_2\dot{\varphi}_2^2 + \Omega\varphi_2\dot{\varphi}_2\big] - \overline{J}_{2,222}\big[\frac{1}{2}\Omega\varphi_2^2\dot{\varphi}_2 + \frac{1}{4}\Omega^2\varphi_2^2\big] - \\
& - \frac{1}{12}\Omega^2\overline{J}_{2,2222}\varphi_2^3 + C_1^{(3)}(-\varphi_2)^3 - C_2^{(3)}(\varphi_2 - \varphi_3)^3 + b_1^{(3)}(-\dot{\varphi}_2)^3 - b_2^{(3)}(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3)^3 \\
\Phi_3 = & \frac{1}{2}\overline{M}_{3,33}\varphi_3^2 + \frac{1}{6}\overline{M}_{3,333}\varphi_3^3 + \frac{1}{2}\overline{M}_{3,,33}\dot{\varphi}_3^2 + \frac{1}{6}\overline{M}_{3,,333}\dot{\varphi}_3^3 - \\
& - \overline{J}_{3,3}\big[\varphi_3\ddot{\varphi}_3 + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_3^2\big] - \overline{J}_{3,33}\big[\frac{1}{2}\varphi_3^2\ddot{\varphi}_3 + \frac{1}{2}\varphi_3\dot{\varphi}_3^2 + \Omega\varphi_3\dot{\varphi}_3\big] - \\
& - \overline{J}_{3,333}\big[\frac{1}{2}\Omega\varphi_3^2\dot{\varphi}_3 + \frac{1}{4}\Omega^2\varphi_3^2\big] - \frac{1}{12}\Omega^2\overline{J}_{3,3333}\varphi_3^3 + C_2^{(3)}(\varphi_2 - \varphi_3)^3 + b_2^{(3)}(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3)^3
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

4. VỀ MỘT KHẢ NĂNG TÍNH TOÁN DAO ĐỘNG XOẮN PHI TUYẾN

Dưới đây xét trường hợp các ma trận $\underline{M}(\Omega t)$, $\underline{B}(\Omega t)$ và $\underline{C}(\Omega t)$ của phương trình (2.11) có dạng như sau:

$$
\begin{aligned}
\underline{M}(\Omega t) &= \underline{M}_0 + \varepsilon\underline{M}^*(\Omega t) \\
\underline{B}(\Omega t) &= \varepsilon\underline{B}^*(\Omega t) \\
\underline{C}(\Omega t) &= \underline{C}_0 + \varepsilon\underline{C}^*(\Omega t)
\end{aligned}
$$

với $\underline{M}_0$, $\underline{C}_0$ là các ma trận hằng số thực đối xứng, ε là tham số bé. Khi đó phương trình (2.11) được viết lại dưới dạng:

$$
\underline{M}_0\ddot{\vec{q}} + \underline{C}_0\vec{q} = \vec{h}(\Omega t) + \varepsilon\vec{\Phi}^*(\Omega t, \vec{q}, \dot{\vec{q}}, \ddot{\vec{q}}) \tag{4.1}
$$

Gọi $\underline{V}$ là ma trận dạng riêng, ta thực hiện phép biến đổi:

$$
\vec{q} = \underline{V}\,\vec{y} \tag{4.2}
$$

Khi đó phương trình (4.1) có thể được đưa về dạng sau:

$$
\underline{V}^T\underline{M}_0\underline{V}\ddot{\vec{y}} + \underline{V}^T\underline{C}_0\underline{V}\,\vec{y} = \underline{V}^T\vec{h} + \varepsilon\underline{V}^T\vec{\Phi}^* \tag{4.3}
$$

Do [2]

$$
\underline{V}^T\underline{M}_0\underline{V} = \begin{bmatrix} \mu_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{bmatrix}, \quad \underline{V}^T\underline{C}_0\underline{V} = \begin{bmatrix} \gamma_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_n \end{bmatrix}
$$

nên phương trình (4.3) có thể viết được dưới dạng vế trái tách rời nhau.

Thực hiện phép đổi biến:

$$
\tau = \frac{\Omega t}{m} \tag{4.4}
$$

trong đó m là số tự nhiên nào đó. Ký hiệu đạo hàm của y theo τ là dấu phẩy. Ta có:

$$\dot{y}_i = \frac{\Omega}{m} y_i' ; \qquad \ddot{y}_i = \frac{\Omega^2}{m^2} y_i'' .$$

Từ các kết quả trên, phương trình (4.3) có thể được đưa về dạng sau:

$$y_i'' + \lambda_i y_i = f_i(\tau) + \epsilon F_i(\tau, \vec{y}, \vec{y}', \vec{y}'') \tag{4.5}$$

trong đó:

$$\omega_i^2 = \frac{\gamma_i}{\mu_i}, \quad \lambda_i = \frac{m^2 \omega_i^2}{\Omega^2}, \quad f_i(\tau) = \frac{m^2}{\Omega^2 \mu_i} \sum_{j=2}^{n} v_j^{(i)} h_j(\tau), \quad F_i(\tau, \vec{y}, \vec{y}', \vec{y}'') = \frac{m^2}{\Omega^2 \mu_i} \sum_{j=2}^{n} v_j^{(i)} \Phi_j^*$$

Việc giải hệ phương trình (4.5) đã được bàn đến trong [6].

5. KẾT LUẬN

Trong bài báo này đã xét việc thiết lập phương trình vi phân của một hệ dao động xoắn phi tuyến có các khối lượng biến đổi. Đây là bài toán hay gặp trong nghành cơ khí.

Việc giải hệ phương trình vi phân dao động này tương đối phức tạp, được trình bày trong [7] và các công trình tiếp theo.

Địa chỉ:
Trường đại học Bách khoa Hà Nội

Nhận ngày 14/2/1992

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Kozesnik J. Maschinendynamik. VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1965.
2. Holzweissig F., Dresig H. Lehrbuch der Maschinendynamik. VEB Fachbuchverlag Leipzig 1979.
3. Phan Nguyên Di, Nguyễn Văn Khang. Tính toán dao động máy. Nxb Khoa học và kỹ thuật. Hà Nội 1991.
4. Nguyễn Văn Khang. Zur numerischen Berechnung der periodischen Torsionsschwingungen in Antriebssystemen in ungleichfoerming uebersetzenden Getrieben. Theoretical and applied mechanics, Sofia 1986, N. 1, p. 11-17.
5. Dresig H., Vulfson I. I. Dynamik der Mechanismen. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1989.
6. Nguyễn Văn Khang. Xác định dao động của hệ có số hạng quán tính phi tuyến bằng phương pháp tham số bé. Tạp chí cơ học, Hà Nội 1980, Số 4, Tr. 12-18
7. Nguyễn Văn Khang, Trần Đình Sơn. Về cộng hưởng tham số phi tuyến của một hệ dao động xoắn có khối lượng thu gọn biến đổi. Tạp chí cơ học (sẽ in)
8. Вульфсон И. И. Колебания машин с механизмами циклового действия. "Машиностроение", Ленинград 1990.

SUMMARY

ON A MODEL OF THE NONLINEAR TORSIONAL VIBRATION WITH VARIABLE GENERALIZED MASSES

In this paper the establishment of the parametric vibration differential equations for a model of the nonlinear torsional vibration with variable generalized masses considered.