Tạp chí CƠ HỌC, tập XIV, 1992, số 2 (13 — 16)

THUẬT TOÁN MÔ HÌNH DẺO TRƯỢT ĐA TINH THỂ TRƯỜNG HỢP TỔNG QUÁT

BÙI HỮU DÂN

1. MỞ ĐẦU

Mô hình dẻo trượt đa tinh thể được các tác giả Y. Ohashi, M. Tokuda và J. Kratochvil đề nghị 1981 [4] dựa trên các kết quả thực nghiệm rất mới mẻ và chính xác [1, 2, 3]. Trong những năm gần đây mô hình đó được nghiên cứu mạnh cả về mặt lý luận chung thuật toán tính toán và các nghiên cứu thực nghiệm so sánh [5, 8, 9, 10]. Năm 1983 tác giả đã đề nghị một thuật toán mở rộng ứng dụng của mô hình đa tinh thể cho các bài toán phẳng tổng quát, việc mở rộng này đã cho phép tính toán được nhiều kết quả tiêu biểu cúa bài toán phẳng [8]. Bài toán phẳng tổng quát được biểu diễn trong không gian ứng suất ba chiều [6] nên thuật toán được sử dụng là các phép tính vectơ trong không gian ba chiều - không gian vectơ đóng kín đối với phép nhân vectơ hữu hướng. Trong trường hợp tổng quát, các vectơ ứng suất và biến dạng được biểu diễn trong không gian 5 chiều [6, 10]. Theo đại số vectơ Clifford [7], mọi không gian vectơ từ 4 chiều trở lên sẽ không đóng kín đối với phép nhân hữu hướng của hai vectơ, nên việc mở rộng thuật toán của mô hình dẻo đa tinh thể không thể sử dụng khái niệm "vectơ" pháp tuyến của một mặt và "phép nhân hữu hướng hai vectơ". Ở đây chúng tôi đề nghị thuật toán mới giải quyết vấn đề này dựa trên đại số vectơ Clifford [7].

2. MỞ RỘNG THUẬT TOÁN DẺO TRƯỢT ĐA TINH THỂ CHO TRƯỜNG HỢP TỔNG QUÁT

A. A. Ilyushin đã chỉ ra, tenxơ biến dạng ε_{ij} và tenxơ ứng suất σ_{ij} có thể được phân tích thành tổng hai tenxơ: tenxơ cầu và tenxơ lệch. Tenxơ cầu được đặc trưng bởi một biến độc lập: độ nở khối (đối với tenxơ biến dạng) hoặc áp lực thủy tĩnh (đối với tenxơ ứng suất); Tenxơ lệch được đặc trưng bởi 5 biến độc lập. Trong lý thuyết dẻo, đặc trưng của tính dẻo của vật liệu chỉ thể hiện ở tenxơ lệch, vì vậy 5 hàm độc lập của các thành phần của nó được xem như 5 thành phần của vectơ trong không gian ứng suất biến dạng dẻo.

Như ở [6, 10] vectơ biến dạng dẻo được biểu diễn trong không gian vectơ 5 chiều:

$$\vec{e} = e_i \vec{e}_i \qquad (i = 1, \dots, 5) \tag{2.1}$$

vectơ ứng suất lệch:

$$\vec{s} = s_i \vec{e}_i \qquad (i = 1, \dots, 5) \tag{2.2}$$

ở đây $\vec{e}_i$ $(i = 1, 2, \dots, 5)$ là các vectơ đơn vị của hệ tọa độ Đề các của không gian vectơ 5 chiều.

Để lập thuật toán ta thừa nhận nhận xét sau đây rút ra từ thực nghiệm biến dạng dẻo của mô hình đa tinh thể: trong quá trình biến dạng dẻo của vật liệu đa tinh thể, gia số vectơ ứng suất dẻo tức thời $\Delta\vec{s}$, gia số vectơ biến dạng dẻo $\Delta\vec{e}$ và vectơ ứng suất dẻo $\vec{s}$ là đồng phẳng:

$$\Delta\vec{s} = k_1\Delta\vec{e} + k_2\vec{s} \tag{2.3}$$

ở đây các hệ số vô hướng k_1, k_2 nói chung là hàm của thời gian và lịch sử biến dạng, xác định nhờ hệ phương trình xác định của mô hình và thực nghiệm như trong trường hợp ba chiều.

Trước khi trình bày thuật toán ta nhận xét rằng, một qũy đạo cong bất kỳ trơn từng khúc trong không gian n chiều có thể xấp xỉ bằng một qũy đạo gấp khúc (thẳng từng đoạn). Vì vậy về nguyên tắc ta chỉ cần trình bày thuật toán này của mô hình dẻo trượt đa tinh thể cho qũy đạo biến dạng gấp khúc là đủ. Hơn thế nữa, ta chỉ cần trình bày thuật toán cho hai đoạn tuyến tính kề nhau và thuật toán chuyển tiếp tại điểm góc.

Giả thiết vectơ chỉ phương của đoạn thẳng thứ k trong qũy đạo biến dạng gấp khúc của ta là $\vec{E}_k$, ta có:

$$\vec{E}_k = \sum_{i=1}^{5} \gamma_i^k \vec{e}_i \tag{2.4}$$

trong đó $\sum\limits_{i=1}^{5} (\gamma_i^k)^2 = 1$. Độ dài đoạn thẳng thứ k là L_k. Phương trình vectơ của các đoạn thẳng của qũy đạo biến dạng gấp khúc đó là:

$$\begin{aligned}
&\text{Đối với đoạn thứ nhất } (k=1):\ \vec{\mathcal{L}}_1 = \delta_1\vec{E}_1 \qquad 0 \le \delta_1 \le L_1\\
&\text{Đối với đoạn thứ hai } (k=2):\ \vec{\mathcal{L}}_2 = L_1\vec{E}_1 + \delta_2\vec{E}_2 \qquad 0 \le \delta_2 \le L_2\\
&\text{Đối với đoạn thứ } k\ \vec{\mathcal{L}}_k = L_1\vec{E}_1 + \cdots + L_{k-1}\vec{E}_{k-1} + \delta_k\vec{E}_k \qquad 0 \le \delta_k \le L_k
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Từ giả thiết (2.3) ta thấy mặt phẳng mô hình tương ứng với tất cả các điểm của cùng một đoạn thẳng qũy đạo biến dạng sẽ không đổi. Mặt phẳng mô hình của đoạn thẳng thứ $(k-1)$, vectơ ứng suất $\vec{s}$ tại điểm góc (giữa đoạn $(k-1)$ và đoạn (k)) đã biết và các vectơ gia số biến dạng của các đoạn thẳng của qũy đạo biến dạng gấp khúc được cho trước. Gọi

$$s_i, \quad \Delta\gamma_i^{k-1}, \quad \Delta\gamma_i^{(k)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 5) \tag{2.6}$$

là các thành phần của các vectơ ứng suất và các gia số biến dạng tương ứng $\vec{s}$, $\Delta\vec{E}_{k-1}$, $\Delta\vec{E}_k$.

Mặt phẳng mô hình T_k của đoạn thẳng thứ k nhận được từ T_{k-1} bằng "phép quay" quanh vectơ $\vec{s}$, vì vậy các vectơ chỉ phương $\vec{f}_1(k)$, $\vec{f}_2(k)$ của hệ tọa độ Đề các trên T_k nhận được từ các vectơ chỉ phương tương ứng trên T_{k-1}; Khi xác định vectơ $\vec{f}_1(k)$, $\vec{f}_2(k)$ theo $\vec{f}_1(k-1)$, $\vec{f}_2(k-1)$ ta không được sử dụng hai khái niệm "pháp tuyến của một mặt phẳng" và "tích hữu hướng của hai vectơ" trong không gian vectơ 5 chiều (lớn hơn 3 chiều). Trước khi đưa ra thuật toán xác định ta thấy $\vec{f}_1(k)$, $\vec{f}_2(k)$ phải thỏa mãn các điều kiện sau đây:

1) $\measuredangle\left(\vec{f}_1(k), \vec{s}\right) = \measuredangle\left(\vec{f}_1(k-1), \vec{s}\right)$
hay

$$\sum_{i=1}^{5} s_i\alpha_i = \sum_{i=1}^{5} s_i\alpha_i' \tag{2.7}$$

trong đó s_i, α_i, α_i' $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ là các thành phần của vectơ $\vec{s}$, $\vec{f}_1(k-1)$, $\vec{f}_1(k)$ trong không gian 5 chiều.

2) Vectơ $\vec{f}_1(k)$ phải là tổ hợp tuyến tính của vectơ $\Delta\vec{E}_k$ và vectơ $\vec{s}$:

$$\vec{f}_1(k) = n_1\Delta\vec{E}_k + n_2\vec{s}$$

hay

$$\vec{f}_1(k) = \sum_{i=1}^{5} (n_1 \Delta\gamma_i^k + n_2 s_i)\vec{e}_i \tag{2.8}$$

ở đây n_1, n_2 chưa biết, cần xác định.

3) Trên mặt phẳng T_k sẽ tồn tại hai vectơ $\vec{f}_1(k)$ thỏa mãn hai điều kiện trên. Để duy nhất ta chọn $\vec{f}_1(k)$ sao cho vị trí tương đối của 3 vectơ $\vec{f}_1(k)$, $\Delta\vec{E}_k$ và $\vec{s}$ trên mặt phẳng T_k giống như vị trí tương đối của 3 vectơ $\vec{f}_1(k-1)$, $\Delta\vec{E}_{k-1}$ và $\vec{s}$ trên mặt phẳng T_{k-1}. Điều này có nghĩa là hình chiếu của $\vec{f}_1(k-1)$ lên phương thành phần vuông góc với $\vec{s}$ của $\Delta\vec{E}_{k-1}$ (trên T_{k-1}) bằng hình chiếu của $\vec{f}_1(k)$ lên phương thành phần vuông góc với $\vec{s}$ của $\Delta\vec{E}_k$ (trên T_k). Việc chọn này dẫn đến phương trình:

$$\sum_{i=1}^{5} \xi_i' \alpha_i' = \sum_{i=1}^{5} \xi_i \alpha_i \tag{2.9}$$

với

$$\xi_i = \frac{\gamma_i^{k-1} - \Big(\sum\limits_{i=1}^{5} \gamma_j^{k-1} s_j\Big) s_i}{\Big\{\sum\limits_{i=1}^{5} \Big[\gamma_i^{k-1} - \Big(\sum\limits_{j=1}^{5} \gamma_j^{k-1} s_j\Big) s_i\Big]^2\Big\}^{1/2}} \tag{2.10}$$

$$\xi_i' = \frac{\gamma_i^{k} - \Big(\sum\limits_{j=1}^{5} \gamma_j^{k} \cdot s_j\Big) s_i}{\Big\{\sum\limits_{i=1}^{5} \Big[\gamma_i^{k} - \Big(\sum\limits_{j=1}^{5} \gamma_j^{k-1} s_j\Big) s_i\Big]^2\Big\}^{1/2}} \tag{2.11}$$

Dựa vào 7 phương trình đại số tuyến tính độc lập (2.7), (2.8), (2.9) ta sẽ xác định được 7 giá trị α_i' $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ và n_1, n_2 qua các giá trị đã biết hoặc cho trước. Vectơ $\vec{f}_1(k-1)$ $(\alpha_i, i = 1, 2, \ldots, 5)$ đã hoàn toàn xác định ở giai đoạn trước.

Một cách tương tự ta sẽ xác định được vectơ $f_2(k)(\beta_i', i = 1, \ldots, 5)$ qua các thành phần của vectơ $f_2(k-1)$ $(\beta_i, i = 1, \ldots, 5)$.

Như vậy mặt phẳng mô hình cho đoạn thẳng qũy đạo thứ k được xác định cùng với hệ tọa độ Đề các hai chiều trên nó. Từ đây thuật toán của mô hình dẻo trượt đa tinh thể dựa trên hệ phương trình xác định [4, 5] được áp dụng cho đoạn thẳng qũy đạo biến dạng thứ k. Cứ như thế thuật toán lần lượt tính tất cả các đoạn thẳng của qũy đạo biến dạng gấp khúc bất kỳ.

Trở lại trường hợp 3 chiều, thuật toán trên cho ta kết quả đã thu được ở [8].

3. KẾT LUẬN

Với việc xấp xỉ qũy đạo biến dạng dẻo bất kỳ bằng đường gấp khúc trong không gian 5 chiều và sử dụng khái niệm "mặt mô hình" thuật toán dựa trên mô hình dẻo trượt đa tinh thể của các tác giả Y. Ohashi, M. Tokuda, J. Kratochvil đã được mở rộng cho trường hợp tổng quát nhất của biến dạng dẻo. Từ thuật toán này ta thấy tính di truyền (phụ thuộc lịch sử biến dạng) mà mô hình dẻo trượt đa tinh thể thể hiện tốt trong các trường hợp trước đây cũng như sẽ giữ nguyên ý nghĩa trong trường hợp tổng quát.

Việc mở rộng này cho thấy có thể chương trình hóa tự động tính toán trong các ứng dụng cụ thể.

Địa chỉ:
Viện Cơ Viện KHVN

Nhận ngày 25/5/1991

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Ohashi Y., Tokuda M. and Tanaka Y. J. Mech. Phys. Solids, Vol. 25, 1987.
2. Ikegami K. J. Soc. Mat. Sci. 24 (261), p. 491-505, 1975.
3. Ikegami K. J. Soc. Mat. Sci. 24 (263), p. 709-719, 1975.
4. Tokuda M., Kratochvil J., Ohashi Y. Mechanism of induced plastic anisotropy on polycrystalline metals. Phys. stat. sci. 68 (629), 1981.
5. Kratochvill J., Ohashi Y.. Satra M., Tokuda M. Pro 4^{th} Inter. Conf. on Continuum Models of Discrete systems, Stoekholm 1981, Nort-Holland Publ. Co.
6. Ilyushin A. A. Plasticity, Moscow 1963.
7. Gaston Casanova. Iálgebre vectorielle, Paris 1976.
8. Bui H. D., Kratochvill J., Satra M. Mở rộng mô hình dẻo trượt đa tinh thể cho biến dạng phẳng tổng quát. Tạp chí Cơ học số 4, 1991.
9. Tokuda M., Ohno N., Kratochvill J. Unified constitutive equations for inelastic behaviours of polycrystaalline metals based on a sami-micro approach. Inter. Conference on Creep, April 1986, Tokyo.
10. Bui H. D. The slip theory of plasticity and its application. Viện HLKH Tiệp Khắc, Praha 1983 (luận án).

SUMMARY

THE PROCEDURE OF THE SLIP MODELS OF POLYCRYSTALLINE PLASTICITY IN THE GENERAL CASES

The computation procedure of the slip model of polycrystalline plasticity was extended for the most general cases, when the stress and strain state are expressed in the five-dimention vector space. this extention is based on the knowledges of Clifford algebra in the many-dimension (more than 3) vector space. The results would be reduced into the old results given in the more simple cases.