

## VỀ CÁC PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ DƯỚI DỊCH CHUYỂN DƯ CỦA CÁC CÔNG TRÌNH CỨNG ĐẸO CHỊU TẢI TRỌNG ĐỘNG II

VŨ VĂN THẾ, TRẦN BÁ TÍNH

Trong bài báo này thiết lập biểu thức đánh giá tổng quát theo phương pháp trình bày trong [3]. Trên cơ sở kết quả nhận được ở đây và kết quả cho trong Stronge, chúng ta xác lập mối tương quan giữa hai phương pháp. Cuối cùng bài toán tối ưu hóa đánh giá dịch chuyển khi chọn hàm dạng và hàm biên độ được khảo sát chi tiết.

### 1. XÁC LẬP BIỂU THỨC ĐÁNH GIÁ THEO [3]

Chúng ta xuất phát từ công thức (1.11) trong [3], biểu thức đánh giá dưới của dịch chuyển cực đại  $\delta$  cho như sau:

$$\delta \geq \frac{T_a^* \int_V \rho \dot{u}_{k0} f_2(x_k) dv - T_a^{*2} \tilde{D}^*(f_2) \int_0^1 f_1(\tau) d\tau}{-\int_V \overset{\circ}{f}_1(0) f_2(x_k) dv + T_a^{*2} \tilde{C} \int_0^1 f_1(\tau) d\tau} \quad (1.1)$$

Vế phải của (1.1) sẽ đạt cực đại khi  $T_a^*$  nhận giá trị:

$$\tilde{T}^* = \frac{-\overset{\circ}{f}_1(0) \cdot \tilde{D}^*(f_2) \int_V \rho f_2(x_k) dv}{\tilde{C} \cdot \int_V \rho \dot{u}_{k0} f_2(x_k) dv} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{2\tilde{C}}{\tilde{D}^{*2}(f_2)} \cdot \frac{(\int_V \rho \dot{u}_{k0} f_2(x_k) dv)^2}{-\overset{\circ}{f}_1(0) \int_0^1 f_1(\tau) d\tau \cdot \int_V \rho f_2(x_k) dv}} \right] \quad (1.2)$$

Thế giá trị  $\tilde{T}^*$  từ (1.2) vào (1.1) chúng ta nhận được đánh giá dưới dịch chuyển cực đại  $\delta$ :

$$\delta \geq \tilde{\delta}^* = \frac{\tilde{D}^*(f_2)}{2\tilde{C}} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{2\tilde{C}}{\tilde{D}^{*2}(f_2)} \cdot \frac{(\int_V \rho \dot{u}_{k0} f_2(x_k) dv)^2}{-\overset{\circ}{f}_1(0) \int_0^1 f_1(\tau) d\tau \cdot \int_V \rho f_2(x_k) dv}} \right] \quad (1.3)$$

Nếu chọn  $f_1(\tau) = 1 - \tau$  từ (1.2), (1.3) chúng ta nhận được các đánh giá

$$\begin{aligned} \tilde{T}^* &= \frac{\tilde{D}^*(f_2)}{\tilde{C}} \cdot \frac{\int_V \rho f_2(x_k) dv}{\int_V \rho \dot{u}_{k0} f_2(x_k) dv} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{2\tilde{C}}{\tilde{D}^{*2}(f_2)} \cdot \frac{(\int_V \rho \dot{u}_{k0} f_2(x_k) dv)^2}{-f_1(0) \int_0^1 f_1(\tau) d\tau \cdot \int_V \rho f_2(x_k) dv}} \right], \\ \delta &\geq \frac{\tilde{D}^*(f_2)}{2\tilde{C}} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{2\tilde{C}}{\tilde{D}^{*2}(f_2)} \cdot \frac{(\int_V \rho \dot{u}_{k0} f_2(x_k) dv)^2}{-f_1(0) \int_0^1 f_1(\tau) d\tau \cdot \int_V \rho f_2(x_k) dv}} \right]. \end{aligned} \quad (1.4)$$

So sánh các công thức (1.14), (1.15) trong [3] và (1.4) ta thấy rằng khi  $f_1(\tau) = 1 - \tau$ , kết quả của hai phương pháp trùng nhau.

Khi mật độ  $\rho = const$  và vật liệu chịu tác dụng của xung lực vận tốc phân bố đều tại mọi điểm ta có kết quả:

$$\begin{aligned} \tilde{T}^* &= \frac{\tilde{D}^*(f_2)}{\tilde{C} \dot{u}_{k0}} \cdot (-f_1(0)) \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{\tilde{C}}{\tilde{D}^{*2}(f_2)} \cdot \frac{\rho \dot{u}_{k0}^2 \int_V f_2(x_k) dv}{-f_1(0) \cdot \int_0^1 f_1(\tau) d\tau}} \right], \\ \delta &\geq \frac{\tilde{D}^*(f_2)}{2\tilde{C}} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{\tilde{C}}{\tilde{D}^{*2}(f_2)} \cdot \frac{\rho \dot{u}_{k0}^2 \int_V f_2(x_k) dv}{-f_1(0) \cdot \int_0^1 f_1(\tau) d\tau}} \right]. \end{aligned} \quad (1.5)$$

So với các kết quả nhận được trong Stronge, đánh giá (1.2), (1.3) được cho trong dạng tối giản. Đó chính là điều kiện thuận lợi cho chúng ta trong khảo sát so sánh và tối ưu hóa qua việc chọn hàm dạng và hàm biên độ.

## 2. SO SÁNH KẾT QUẢ CỦA HAI PHƯƠNG PHÁP

Theo phương pháp của Stronge chúng ta đã thu được các kết quả đánh giá thời gian và dịch chuyển như sau:

$$\begin{aligned} T_f \geq T^* &= \frac{\tilde{D}^*(f_2)}{\tilde{C}} \cdot \frac{\int_V \rho f_2(x_k) dv}{\left(\int_V \rho \dot{u}_{k0} f_2(x_k) dv\right)^2} \cdot \frac{-f_1(0)}{2\left(1 - \int_0^1 f_1(\tau) d\tau\right)} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{4\tilde{C}}{\tilde{D}^{*2}(f_2)} \cdot \frac{\left(\int_V \rho \dot{u}_{k0} f_2(x_k) dv\right)^2}{\int_V \rho f_2(x_k) dv} \cdot \frac{1 - \int_0^1 f_1(\tau) d\tau}{-f_1(0)}} \right], \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\delta \geq \delta^* = \frac{\tilde{D}^*(f_2)}{\tilde{C}} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{4\tilde{C}}{\tilde{D}^{*2}(f_2)} \cdot \frac{\left(\int_V \rho \dot{u}_{k0} f_2(x_k) dv\right)^2}{\int_V \rho f_2(x_k) dv} \cdot \frac{1 - \int_0^1 f_1(\tau) d\tau}{-f_1(0)}} \right]. \quad (2.2)$$

So sánh (2.1) với (1.2) và (2.2) với (1.3) ta rút ra các kết luận

- Hàm dạng  $f_2$  không gây ra sự khác nhau giữa các đánh giá của hai phương pháp.

- Hàm biên độ  $f_1$  ảnh hưởng đến các đánh giá thông qua các đại lượng  $1 - \int_0^1 f_1 d\tau$  và  $\frac{1}{\int_0^1 f_1 d\tau}$ .

Khi  $f_1 = 1 - \tau$ , các đánh giá của hai phương pháp là trùng nhau.

- Để so sánh kết quả giữa hai phương pháp chúng ta chỉ cần xét tương quan giữa hai đại lượng:

$$1 - \int_0^1 f_1(\tau) d\tau \quad \text{và} \quad \frac{1}{\int_0^1 f_1 d\tau}$$

Với  $f_1(\tau)$  được chọn thỏa mãn các điều kiện sau:

$$f_1(0) = 1, \quad f_1(1) = 0, \quad -\overset{\circ}{f}_1(1) > 0, \quad \overset{\circ\circ}{f}_1 > 0. \quad (A)$$

(xem điều kiện (\*\*\*) trong [1]).

Do các điều kiện trên,  $f_1(\tau)$  sẽ là một hàm lõm luôn luôn nằm dưới đường thẳng CD (xem hình 1).

$$\text{Đặt } y = \int_0^1 f_1(\tau) d\tau$$

Rõ ràng rằng  $y \in [0, \frac{1}{2}]$

$$\text{Xét hai hàm } F_1 = 1 - y, \quad F_2 = \frac{1}{4y}$$

$$\text{và hàm thương } \frac{F_1}{F_2} = 4y(1 - y) = g$$

$g$  - sẽ là hàm tăng trong khoảng biến thiên  $y \in (0, 1/2)$ . Đạt cực trị tại nút  $y = 1/2$ ;  $g(1/2) = 1$ .

Với mọi giá trị còn lại của  $y$  ta có  $g < 1$ . Suy ra  $F_1 < F_2$ .

Hay

$$1 - \int_0^1 f_1(\tau) d\tau < \frac{1}{4 \int_0^1 f_1(\tau) d\tau} \quad (B)$$

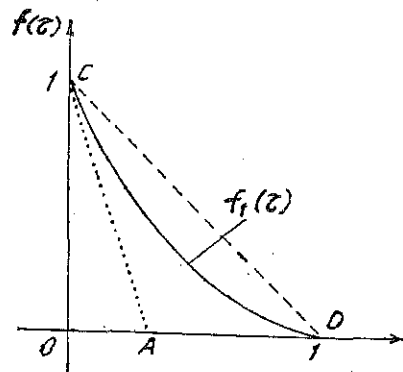
Với mọi cách chọn hàm  $f_1(\tau)$  thỏa mãn điều kiện (A) để cho phép chúng ta có thể rút ra được các đánh giá (1.2), (1.3), (2.1), (2.2).

Chú ý thêm rằng  $2(1 - \int_0^1 f_1(\tau) d\tau) \geq 1$ . Kết hợp với (B) ta dễ dàng suy ra rằng:

$$\tilde{\delta}^* \geq \delta^*, \quad \tilde{T}^* \geq T^* \quad (2.3)$$

### 3. TỐI ƯU HÓA ĐÁNH GIÁ DƯỚI DỊCH CHUYỂN DƯ QUA VIỆC CHỌN HÀM DẠNG $f_2$ VÀ HÀM BIÊN ĐỘ $f_1$

Chúng ta đã có đánh giá dịch chuyển:



Hình 1. Đồ thị hàm  $f_1$

$$\delta \geq \bar{\delta}^* = \frac{\bar{D}^*(f_2)}{2\tilde{C}} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{4\tilde{C}}{\bar{D}^{*2}(f_2)} \frac{\left( \int_V \rho \dot{u}_{k0} f_2(x_k) dv \right)^2}{\int_V \rho f_2(x_k) dv}} \right] \cdot \frac{1}{4 \left( -\overset{\circ}{f}_1(0) \int_0^1 f_1(\tau) d\tau \right)} \quad (3.1)$$

Việc tối ưu hóa đánh giá (3.1) theo hàm biên độ, đưa về bài toán chọn hàm  $f_1(\tau)$  thỏa mãn các điều kiện (A) sao cho  $\frac{1}{-\overset{\circ}{f}_1(0) \int_0^1 f_1(\tau) d\tau}$  đạt giá trị cực đại.

Trên hình 1, nếu ký hiệu CA là tiếp tuyến của đường cong  $f_1(\tau)$  tại  $\tau = 0$ . Ta có:

$$-\overset{\circ}{f}_1(0) = \frac{1}{OA}, \quad \int_0^1 f_1(\tau) d\tau \geq \frac{OA}{2}.$$

Suy ra

$$\frac{1}{-\overset{\circ}{f}_1(0) \int_0^1 f_1(\tau) d\tau} \leq \frac{1}{\frac{1}{OA} \cdot \frac{OA}{2}} = 2.$$

Giá trị cực đại của biểu thức này đạt được khi  $\int_0^1 f_1(\tau) d\tau = \frac{OA}{2}$ .

Điều này chỉ có thể xảy ra khi  $f_1(\tau) = 1 - \tau$ .

Khi đó đánh giá tối ưu hóa với hàm biên độ có dạng (1.4)

$$\delta \geq \bar{\delta}^* = \frac{\bar{D}^*(f_2)}{2\tilde{C}} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{2\tilde{C}}{\bar{D}^{*2}(f_2)} \frac{\left( \int_V \rho \dot{u}_{k0} f_2(x_k) dv \right)^2}{\int_V \rho f_2(x_k) dv}} \right] \quad (3.2)$$

Với (3.2) việc tối ưu hóa đánh giá qua việc chọn hàm dạng  $f_2$  trong trường hợp tổng quát rất khó khăn, vì còn phụ thuộc vào hao tán năng lượng  $\bar{D}^*$  và hệ số  $\tilde{C}$ . Các đại lượng này khác nhau đối với từng công trình cụ thể. Để có được một lượng thông tin đặc trưng có thể suy luận tiếp cho các trường hợp bản tròn và vỏ tròn xoay, chúng ta hãy xét dầm khâu độ  $2L$ , độ dày  $h$ , chịu xung lực vận tốc phân bố ban đầu  $\dot{W}_0$  theo phương vuông góc với mặt phẳng của dầm.

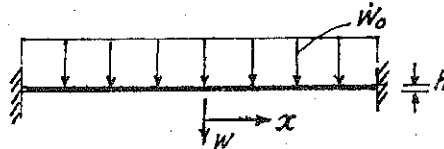
Trong trường hợp này ta có các hệ thức cơ bản sau:

- Hệ thức đánh giá dịch chuyển

$$\delta \geq \bar{\delta}^* = \frac{\bar{D}^*(f_2)}{2\tilde{C}} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{2\tilde{C}}{\bar{D}^{*2}(f_2)} \rho \dot{W}_0^2 \int_0^1 f_2(x) dx} \right] \quad (3.3)$$

- Các thành phần của tốc độ biến dạng xác định qua dịch chuyển:

$$\dot{K}^* = \dot{W}''^*, \quad \dot{E}^* = W' \dot{W}'^* \quad (3.4)$$



Hình 2. Dầm ngàm chịu xung lực vận tốc đều.

- Điều kiện dẻo biểu hiện qua lực dọc trục  $N$  và mô men uốn  $M$  có dạng:

$$\frac{M}{M_0} + \left(\frac{N}{N_0}\right)^2 = 1 \quad (3.5)$$

Như đã chỉ ở trên, trường vận tốc dịch chuyển ảo được chọn trong dạng tách biến:

$$\dot{W}^* = A(1 - \tau) f_2(\tau) \quad (3.6)$$

Các đại lượng biểu thức (3.3) được xác định như sau:

$$\tilde{D}^*(f_2) = \int_0^1 M_0 |f_2''(x)| dx + \sum_K |f_2'(x_k)| M_0. \quad (3.7)$$

Ở đây số hạng thứ hai trong (3.7) là hao tán năng lượng tại điểm gãy. Hệ số  $\tilde{C}$  được đánh giá từ tích phân sau:

$$\int_0^L N_0 |f_2' W'| dx \leq \tilde{C} \delta \quad (3.8)$$

Chúng ta xét một số lớp các hàm dạng có thể được dùng phổ biến trong bài toán về dầm:

a)

$$f_2(x) = \left[1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right]^n \quad \text{với } n > 1$$

Theo (3.7), (3.8) ta sẽ thu được kết quả sau:

$$\begin{aligned} \tilde{D}^*(f_2) &= \frac{8n(n-1)M_0}{L(2n-1)^{3/2}}, \quad \tilde{C} = \frac{4n(n-1)N_0}{(2n-1)^{3/2}}, \\ \int_0^1 f_2(x) dx &= L \cdot \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j n!}{j!(n-j)!(2j+1)}, \\ \delta &\geq \frac{h}{4} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{\rho L^2 \dot{W}_0^2}{2h \cdot M_0} \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j (n-2)!(2n-1)^{3/2}}{j!(n-j)!(2j+1)}} \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \text{Khi } n=1 &\rightarrow \delta \geq \frac{h}{4} \left[ -1 + \sqrt{1 + 0,69 \cdot \frac{\rho L^2 \dot{W}_0^2}{h M_0}} \right], \\ n=3 &\rightarrow \delta \geq \frac{h}{4} \left[ -1 + \sqrt{1 + 0,43 \cdot \frac{\rho L^2 \dot{W}_0^2}{h M_0}} \right], \\ n=4 &\rightarrow \delta \geq \frac{h}{4} \left[ -1 + \sqrt{1 + 0,32 \cdot \frac{\rho L^2 \dot{W}_0^2}{h M_0}} \right], \\ &\dots \end{aligned}$$

Tính toán trực tiếp khi  $n=1$  ta nhận được đánh giá

$$n = 1 \quad \delta \geq \frac{h}{4} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{1}{2} \frac{\rho L^2 \dot{W}_0^2}{h M_0}} \right]$$

Từ các kết quả trên đây cho thấy hàm dạng  $f_2 = [1 - (\frac{x}{L})^2]^2$  cho ta đánh giá lớn nhất.

b)

$$f_2(x) = (1 - \frac{x}{L})^n$$

$$\tilde{D}^*(f_2) = \frac{2nM_0}{L}; \quad \tilde{C} = \frac{nM_0}{L}; \quad \int_0^L f_2(x) dx = \frac{L}{n+1};$$

$$\delta \geq \frac{h}{4} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{2}{n(n+1)} \frac{\rho L^2 \dot{W}_0^2}{h M_0}} \right]$$

khi  $n = 1$  chúng ta nhận được đánh giá lớn nhất

$$\delta \geq \frac{h}{4} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{\rho L^2 \dot{W}_0^2}{h M_0}} \right]$$

c)

$$f_2(x) = \cos \frac{\pi x}{2L}$$

$$\tilde{D}^*(f_2) = \frac{\pi M_0}{L}; \quad \tilde{C} = \frac{\pi M_0}{2L}; \quad \int_0^L f_2(x) dx = \frac{2L}{\pi};$$

$$\delta \geq \frac{h}{4} \left[ -1 + \sqrt{1 + 0,81 \frac{\rho L^2 \dot{W}_0^2}{h M_0}} \right]$$

d)

$$f_2(x) = \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \frac{\pi x}{L} \right)$$

$$\tilde{D}^*(f_2) = \frac{\pi M_0}{L}; \quad \tilde{C} = \frac{\pi M_0}{2L}; \quad \int_0^L f_2(x) dx = \frac{L}{2};$$

$$\delta \geq \frac{h}{4} \left[ -1 + \sqrt{1 + 0,63 \frac{\rho L^2 \dot{W}_0^2}{h M_0}} \right]$$

e)

$$f_2(x) = 1 - \frac{3}{2} \left[ \frac{x}{L} - \frac{1}{3} \left( \frac{x}{L} \right)^3 \right]^4$$

$$\delta \geq \frac{h}{4} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{1}{2} \frac{\rho L^2 \dot{W}_0^2}{h M_0}} \right]$$

Qua các thí dụ trên đây trong phạm vi hàm dạng được chọn chúng ta có thể rút ra các kết luận sau đây:

- Tỷ số  $\frac{\tilde{D}^*(f_2)}{C}$  không phụ thuộc vào việc chọn hàm dạng  $f_2(x)$ . Đánh giá dịch chuyển chỉ phụ thuộc vào đại lượng  $\int_0^L f_2(x) dx / \tilde{D}^*(f_2)$
- Hàm dạng  $f_2(x) = 1 - \frac{x}{L}$  cho đánh giá lớn nhất.
- Những kết quả trên đây chúng ta cũng thu được đối với bản tròn và vỏ trụ.

#### 4. KẾT LUẬN

Trong công trình này chúng ta đã đưa ra công thức đánh giá cho dịch chuyển và thời gian theo phương pháp trình bày trong [3]. Khi chọn trường vận tốc dịch chuyển cho phép trong dạng  $A \cdot f_1 \cdot f_2$ .

Kết quả nhận được cho phép chúng ta so sánh mối tương quan giữa hai phương pháp. Đã chỉ ra rằng phương pháp trình bày trong [3] luôn cho ta đánh giá tốt hơn. Bài toán tối ưu đánh giá qua việc chọn hàm biên độ  $f_1$ , chỉ ra rằng  $f_1 = 1 - t/T^*$ , cho đánh giá tối ưu. Bài toán tối ưu qua việc chọn hàm dạng  $f_2$ , mặc dầu chưa được giải quyết triệt để, nhưng qua tính toán đối với dầm theo một số lớp hàm đủ rộng cho ta một số dự toán định hướng khi sử dụng các phương pháp đánh giá.

Địa chỉ:

Viện Cơ học Thành phố HCM  
Trường Đại học Tổng Hợp Huế

Nhận ngày 3/6/1991

#### TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Vũ Văn Thế. Phương pháp đánh giá dưới dịch chuyển lớn vỏ trụ cứng dẻo chịu tải trọng động. Tạp chí KHKT No. 1+2 - 1984.
2. Vũ Văn Thế. Sawczuk a lower bound to large displacements of impulsively loaded plastically orthotropic structures. Int. J. Sol. Struct. Vol 19, No. 3 - 1983.
3. Vũ Văn Thế, Trần Bá Tĩnh. Về các phương pháp đánh giá dưới dịch chuyển dư các công trình cứng dẻo chịu tải trọng động I. T/c Cơ học số 4, 1991.

#### SUMMARY

##### LOWER BOUND ON DEFORMATION FOR DYNAMICALLY LOADED RIGID-PLASTIC STRUCTURES

In this work comparisons are made between lower bound obtaining in [3], Stronge and lower bound by The-Sawczuk. Finally the optimal problem is considered, namely that it must be choosen  $f_{i1}(t) f_{i2}(x_k)$ , for which a lower bound displacement is maximized.