Tạp chí CƠ HỌC, tập XIV, 1992, số 1 (17 — 23)

MỘT PHƯƠNG PHÁP KIỂM TRA SỰ ỔN ĐỊNH CỦA CÁC CÔNG TRÌNH ĐƯỢC TRÌNH BÀY THEO PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

LÊ VĂN MAI

I. MỞ ĐẦU

Bài toán ổn định của các công trình đã được đề xuất từ lâu và đã được nhiều nhà khoa học quan tâm giải quyết. Nội dung chính của bài toán là xác định các lực tới hạn (một cách tổng quát là các thông số tới hạn) của công trình.

Đối với bài toán ổn định tuyến tính (hay ổn định ban đầu), việc xác định các thông số tới hạn tương đối thuận lợi. Đối với bài toán ổn định của một kết cấu trong trạng thái biến dạng, việc xác định các thông số tới hạn rất phức tạp. Trường hợp này người ta thường chuyển sang kiểm tra trực tiếp xem ứng với trạng thái làm việc thực công trình có mất ổn định hay không.

Hiện nay, trong các ngành kỹ thuật, ta thường dùng phương pháp phần tử hữu hạn để tính toán các công trình phức tạp.

Khi giải bài toán ổn định của các công trình bằng phương pháp phần tử hữu hạn theo mô hình chuyển vị, trong trường hợp chung ta thường gặp ma trận độ cứng K_t của hệ có dạng [5]:

$$K_t = K_0 + K_c + K_\sigma \tag{1.1}$$

trong đó:

K_t - ma trận độ cứng tiếp tuyến toàn phần của kết cấu đã cho.
K_0 - ma trận độ cứng thông thường của hệ đã cho khi biến dạng bé.
K_c - ma trận độ cứng tương ứng với chuyển vị ban đầu của hệ đã cho.
K_σ - ma trận độ cứng tương ứng với ứng suất ban đầu của hệ đã cho.

Các ma trận trên đều là những ma trận đối xứng và có kích thước n x n (nếu hệ có n bậc tự do).

Theo tiêu chuẩn năng lượng :

1) Nếu ma trận K_t xác định dương thì kết cấu đã cho ở trạng thái ổn định.
2) Nếu $D(K_t) = 0$ thì kết cấu đã cho đạt đến trạng thái tới hạn.
3) Nếu K_t không xác định dương thì kết cấu đã cho ở trong trạng thái mất ổn định.

Dựa vào tiêu chuẩn đó, tác giả đề xuất một phương pháp mới nhằm kiểm tra nhanh chóng xem ứng với trạng thái làm việc sẵn có công trình đang xét có ổn định hay mất ổn định. Phương pháp này có thể áp dụng để kiểm tra độ ổn định của một kết cấu bất kỳ, nếu nguyên lý bảo toàn năng lượng đối với kết cấu đó được thỏa mãn.

II. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

Trước tiên ta thiết lập ma trận K theo công thức

$$K = -K_0^{-1}(K_c + K_\sigma) = -K_0^{-1}K_1, \tag{2.1}$$

trong đó:

$$K_1 = K_c + K_\sigma. \tag{2.2}$$

Gán cho kết cấu đã cho một trường chuyển vị q_0 bất kỳ, xây dựng các trường chuyển vị liên tiếp theo công thức:

$$q_m = K q_{m-1} \qquad (m = 1, 2, 3, \dots). \tag{2.3}$$

Bây giờ ta sẽ đề xuất và chứng minh một định lý để lấy đó làm cơ sở xây dựng phương pháp.

Định lý.

1) Nếu kết cấu ổn định thì khi m đủ lớn, ta sẽ có:

$$|q^i_m| < |q^i_{m-1}| \qquad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{2.4}$$

hoặc

$$\lim_{m\to\infty} q_m = 0 \tag{2.5}$$

quá trình lặp (2.3) hội tụ.

2) Nếu kết cấu ở trạng thái tới hạn thứ nhất thì

$$\lim_{m\to\infty} \frac{q^i_m}{q^i_{m-1}} = 1 \tag{2.6}$$

quá trình lặp (2.3) dừng, không hội tụ, không phân kỳ.

3) Nếu kết cấu mất ổn định thì khi m đủ lớn, ta sẽ có

$$|q^i_m| > |q^i_{m-1}| \qquad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{2.7}$$

quá trình lặp (3-2) phân kỳ.

Chứng minh

Gọi t_r là trị riêng thứ r tương ứng với vectơ riêng U_r của ma trận K $(r = 1, 2, \dots, n)$.

Ta có:

$$\begin{aligned} &KU_r = t_r U_r \\ &-K_0^{1}K_1 U_r = t_r U_r; \\ &-K_1 U_r = t_r K_0 U_r; \\ &t_r(K_0 U_r, U_r) = -(K_1 U_r, U_r); \end{aligned} \tag{2.8}$$

hoặc

$$t_r a_r = -b_r \tag{2.9}$$

trong đó:

$$\begin{aligned} a_r &= (K_0 U_r, U_r) \quad (a) \\ b_r &= (K_1 U_r, U_r) \quad (b) \end{aligned} \tag{2.10}$$

Mặt khác:

$$(K_t U_r, U_r) = (K_0 U_r, U_r) + (K_1 U_r, U_r). \tag{2.11}$$

Gọi:

$$c_r = (K_t U_r, U_r) \tag{2.12}$$

ta có:

$$-b_r = a_r - c_r \tag{2.13}$$

Dựa vào (2.9) và (2.13) ta có thể viết:

$$t_r = (a_r - c_r) : a_r. \tag{2.14}$$

Bây giờ ta sẽ xét các trường hợp cụ thể:

1. Khi kết cấu đã cho ở trạng thái ổn định thì K_t xác định dương, còn K_0 là ma trận độ cứng thông thường của kết cấu làm việc trong giai đoạn đàn hồi tuyến tính nên luôn luôn xác định dương; tức là:

$$c_r > 0 \qquad \text{và} \qquad a_r > 0. \tag{2.15}$$

Mặt khác, ta biết rằng ứng với hệ đã cho, nếu bây giờ cho K_1 đồng nhất bằng 0, tức là ta đã đặt thêm vào hệ các liên kết, làm cho độ cứng của hệ tăng lên (năng lượng biến dạng của hệ sẽ tăng lên). Từ đó ta có thể suy ra:

$$a_r > c_r > o. \tag{2.16}$$

Dựa vào (2.14) và (2.16), ta sẽ có:

$$0 < t_r = (a_r - c_r) \ : \ a_r < 1 \quad (r = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.17}$$

Quá trình lặp (2.3) hội tụ, tức là:

$$|q^i_m| < |q^i_{m-1}|;$$

hoặc

$$\lim_{m \to \infty} q_m = 0.$$

2. Kết cấu ở trạng thái tới hạn thứ nhất. Lúc này dạng toàn phương $W_t = (Kq, q)$ có thể nhận những giá trị dương hoặc bằng 0. Từ đó có thể suy ra:

$$c_r \geq 0, \tag{2.18}$$

$$0 < t_r = (a_r - c_r) \ : \ a_r \leq 1. \tag{2.19}$$

Bây giờ còn phải chứng minh rằng, trong trường hợp này chắc chắn K sẽ có một trị riêng lớn nhất:

$$t_1 = 1. \tag{2.20}$$

Thật vậy, t_1 là nghiệm của phương trình đặc trưng

$$|tK_0 + K_c + K_\sigma| = 0. \tag{2.21}$$

Mặt khác, vì kết cấu đã cho ở trạng thái tới hạn nên

$$D = |K_0 + K_c + K_\sigma| = 0. \tag{2.22}$$

So sánh (2.21) với (2.22), ta thấy rằng K sẽ có một trị riêng $t_1 = 1$, đó là trị riêng lớn nhất. Vì vậy, quá trình lặp (2.3) dừng, không hội tụ, không phân kỳ.

3. Kết cấu đã cho mất ổn định.

Lúc này K_t không xác định dương, còn K_0 vẫn luôn luôn xác định dương. từ đó suy ra:

$$a_1 = (K_0 U_1, U_1) > 0. \tag{2.23}$$

Phân tích vectơ chuyển vị q_0 theo các vectơ riêng U_r:

$$q_0 = e_1 U_1 + e_2 U_2 + \cdots + e_n U_n \tag{2.24}$$

Dựa vào (2.3), ta có thể viết:

$$q_m = t_1^m e_1 U_1 + t_2^m e_2 U_2 + \cdots + t_n^m e_n U_n = t_1^m U_m^* \tag{2.25}$$

trong đó:

$$U_m^* = e_1 U_1 + e_2 \Big(\frac{t_2}{t_1}\Big)^m U_2 + \cdots + e_n \Big(\frac{t_n}{t_1}\Big)^m U_n. \tag{2.26}$$

Để cho đơn giản trong việc chứng minh định lý, ta giả thiết rằng:

$$|t_1| > |t_i| \qquad (i = 2, 3, \ldots, n). \tag{2.27}$$

Từ (2.26) và (2.27) có thể suy ra:

$$\lim_{m \to \infty} U_m^* = e_1 U_1. \tag{2.28}$$

Lập dạng toàn phương:

$$(K_t q_m, q_m) = t_1^{2m} (K_t U_m^*, U_m^*) \tag{2.29}$$

Dựa vào (2.28), ta có:

$$\lim_{m \to \infty} (K_t U_m^*, U_m^*) = e_1^2 (K_t U_1, U_1) \tag{2.30}$$

Vậy:

$$\lim_{m \to \infty} (K_t q_m, q_m) = e_1^2 t_1^2 (K_t U_1, U_1). \tag{2.31}$$

Từ (2.31) ta thấy rằng khi $m \to \infty$ thì:

$$\operatorname{sign}(K_t q_m, q_m) = \operatorname{sign}(K_t U_1, U_1). \tag{2.32}$$

Liên hệ (2.32) cũng thỏa mãn khi m đủ lớn.

Đến đây, ta phải xét 2 khả năng để rồi loại đi một khả năng:

a/ Khả năng thứ nhất:

$$(K_t U_1, U_1) > 0 \quad \text{tức là} \quad (K_t q_m, q_m) > 0.$$

Như vậy, từ một tập hợp vô hạn các vectơ chuyển vị q_0, có thể thiết lập được một tập hợp vô hạn các vectơ chuyển vị q_m mà mọi phần tử của tập hợp đó thỏa mãn hệ thức:

$$(K_t q_m, q_m) > 0 \tag{2.33}$$

tức là K_t xác định dương. Điều này trái với giả thiết của định lý ở phần 3 là kết cấu mất ổn định nên K_t không xác định dương. Vậy chỉ còn lại khả năng thứ hai.

b/ Khả năng thứ hai:

$$(K_t U_1, U_1) < 0, \quad \text{tức là} \quad c_1 < 0.$$

Suy ra:

$$(K_t q_m, q_m) < 0 \tag{2.34}$$

và

$$t_1 = (a_1 - c_1) \ : \ a_1 > t_1. \tag{2.35}$$

Ma trận K có trị riêng lớn nhất $t_1 > 1$, quá trình lặp (2.3) phân kỳ, tức là:

$$|q^i_m| > |q^i_{m-1}|.$$

Định lý trên đã được chứng minh xong. Dựa vào đó có thể đưa ra phương pháp kiểm tra sự ổn định của một kết cấu bất kỳ như sau:

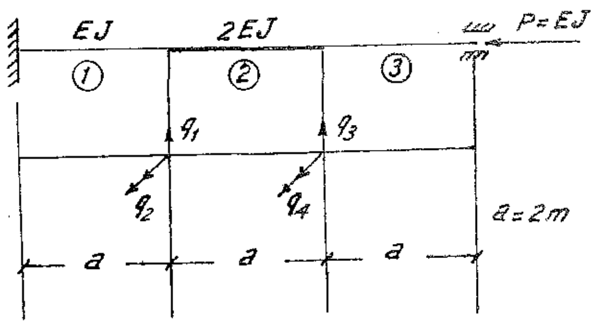
Giả sử kết cấu đã cho có các ma trận K_0, K_c và K_σ tương ứng đang ở trong một trạng thái nào đó mà cần xác định. Để có thể biết chính xác trạng thái đó, chỉ cần gắn cho kết cấu đó một trường chuyển vị q_0 nào đó, rồi dùng công thức lặp (2.3) để lập các trường chuyển vị liên tiếp q_m.

1. Nếu quá trình lặp hội tụ: kết cấu ở trạng thái ổn định.
2. Nếu quá trình lặp dừng: kết cấu ở trạng thái tới hạn thứ nhất.
3. Nếu quá trình lặp phân kỳ: kết cấu đã mất ổn định.

Khi dùng công thức (2.3), không nhất thiết phải tiến hành tính toán đến cùng mà nên dừng lại ở thời điểm xuất hiện một trong 3 dấu hiệu trên, dựa vào đó có thể kết luận được kết cấu đang xét ở trong trạng thái nào.

III- THÍ DỤ

1. Kiểm tra sự ổn định của hệ cho trên hình 1.



Hình 1

Hệ đã cho có các ma trận K_0 và K_σ như sau :

$$K_0 = \frac{EJ}{2}\begin{pmatrix} 9 & 3 & -6 & 6 \\ 3 & 12 & -6 & 4 \\ -6 & -6 & 9 & -3 \\ 6 & 4 & -3 & 12 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

$$K_\sigma = \frac{-EJ}{15}\begin{pmatrix} 18 & 0 & -9 & 1,5 \\ 0 & 8 & -1,5 & -1 \\ -9 & -1,5 & 18 & 0 \\ 1,5 & -1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Hệ đã cho có các chuyển vị ban đầu, ma trận K_c tương ứng với chuyển vị đó có dạng:

$$K_c = \frac{EJ}{2}\begin{pmatrix} 0,002571 & -0,036571 & -0,001714 & 0,073142 \\ -0,036571 & 0,002286 & 0 & -0,000096 \\ -0,001714 & 0 & 0,002571 & -0,073142 \\ 0,073142 & -0,000096 & -0,073142 & 0,002286 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

Từ đó ta có:

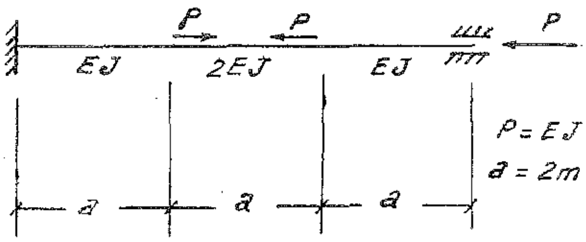
$$K = -K_0^{-1}(K_c + K_\sigma) = \begin{pmatrix} 0,486292 & 0,027541 & 0,114044 & -0,110977 \\ 0,016389 & 0,126568 & 0,188137 & -0,028710 \\ 0,133365 & 0,071525 & 0,469042 & -0,022928 \\ -0,204697 & -0,026975 & 0,003621 & 0,157520 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

Dùng công thức lặp (2.3) với

$$q_0 = \begin{bmatrix} 6,5 & 2,6 & 7,0 & -2,4 \end{bmatrix}' \tag{3.5}$$

ta thấy rằng quá trình lặp đó hội tụ. Vậy kết cấu đã cho ổn định.

2. Kiểm tra sự ổn định ban đầu của hệ cho trên hình 2.



Hình 2

Ma trận K_0 và K_c vẫn được xác định theo các công thức (1.3) và (3.3) còn K_σ xác định theo công thức:

$$K_\sigma = \frac{-EJ}{2}\begin{pmatrix} 5,4 & 0,3 & -3,6 & 0,6 \\ 0,3 & 2,4 & -0,6 & -0,4 \\ -3,6 & -0,6 & 5,4 & -0,3 \\ 0,6 & -0,4 & -0,3 & 2,4 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

Ma trận K xác định theo công thức :

$$K = -K_0^{-1}(K_c + K_\sigma) = \begin{pmatrix} 0,888920 & 0,200095 & 0,013269 & -0,218385 \\ -0,052983 & 0,321149 & 0,358194 & -0,176856 \\ 0,032565 & 0,218933 & 0,871670 & -0,181142 \\ -0,374754 & -0,185689 & 0,072993 & 0,322667 \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

Dùng công thức lặp (2.3) với

$$q_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 1 & -0,5 \end{bmatrix}' \tag{3.8}$$

Ta thấy rằng quá trình lặp đó phân kỳ. Vậy kết cấu đã cho mất ổn định.

IV. KẾT LUẬN

Phương pháp vừa trình bày rất tiện dùng để kiểm tra sự ổn định của một kết cấu bất kỳ được trình bày theo ngôn ngữ của phương pháp phần tử hữu hạn. Nếu dựa vào các công cụ tính toán hiện đại, có thể giải được các bài toán phức tạp, vì thuật toán rất đơn giản nhưng lại cho ta kết quả đúng đắn.

Ngoài ra, ta có thể kết hợp giải đồng thời bài toán xác định chuyển vị và ứng suất trong kết cấu với bài toán kiểm tra sự ổn định của kết cấu, bởi vì chuyển vị nút trong kết cấu đã cho theo phương pháp phần tử hữu hạn được xác định bởi công thức:

$$q = K_0^{-1} R,$$

trong đó ma trận K_0^{-1} cũng được dùng trong công thức (2.1) khi thiết lập ma trận K trong bài toán ổn định.

Địa chỉ:
Trường đại học Xây dựng

Nhận ngày 13/12/1991

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Lê Văn Mai. Phương pháp phần tử hữu hạn - Bài toán dao động riêng. Tạp chí khoa học kỹ thuật, số 9 + 10, 1990.
2. Lê Văn Mai. Phương pháp phần tử hữu hạn - Bài toán ổn định các công trình. Tạp chí Khoa học và kỹ thuật xây dựng, số 16 (1-1991).
3. Lê Văn Mai. Một phương pháp giải bài toán ổn định các công trình. Tuyển tập các báo cáo hội nghị cơ học vật rắn biến dạng - Hà Nội, 8-1991.
4. Oden J. T. Finite elements of nonlinear continua. Mc Graw Hill Book Company, 1972.
5. Zienkiewiez O. C. The finite elements method in engineering science. Mc Graw Hill - London, 1971.

RESUME

SUR UNE METHODE VERIFIANT LA STABILITE DES SYSTEMES DE STRUCTURE SUIVANT LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Dans cet article, l'auteur a présenté une nouvelle méthode pour vérifier rapidement la stabilité d'un système de structure quelconque se composant d'un grand nombre des éléments finis.

En se basant sur la théorème donnée, on peut savoir exactement l'état de travail d'un système considéré:

- L'état de stabilité.
- L'état de non-stabilité.
- L'état critique.